Exercice 1 (12 points)

• partie I

0,5 1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $\frac{x^2}{2} \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2} e^x$

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x) = x e^x - 2e^x + x + 2$$

0,5 a) Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}^+$.

0,25 b) Déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $g(x) > 0$.

• Partie 2 : On considère la fonction f_n définie sur $[0;+\infty[$ par : $f_n(0) = 1$ et $\forall x \in]0;+\infty[$ $f_n(x) = \frac{x}{e^x - 1} - nx$

0,5 1) Montrer que f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$

0,5 2) a) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -\frac{1}{2} - n$

(Indice : utiliser la question 1 partie I)

0,25 b) Interpréter graphiquement le résultat.

0,5 3) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$

0,25 b) Déduire que (C_n) admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ et déterminer son équation.

0,5 4) a) Montrer que f_n est dérivable sur $]0;+\infty[$, puis que

$$\forall x \in]0;+\infty[\quad f_n'(x) = -\frac{g'(x)}{(e^x-1)^2} - n$$

0,5 b) Dresser le tableau de variations de f_n.

0,5 c) Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[\quad f_n''(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(e^x-1)^3}$

0,25 d) Etudier la concavité de (C_n).

1 5) Construire la courbe (C_0) de la fonction f_0.

(On donne $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\,cm$)

Partie III

On note f_0 par f

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi :

$$\begin{cases} U_{n+1} = f(U_n) \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}, \\ U_0 = 1 \end{cases}$$

0,5 1) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in \mathbb{R}_+$

0,25 2) a) Montrer que $\forall x > 0 \quad f'(x) + \frac{1}{2} = \dfrac{e^{2x} - 2x e^x - 1}{2(e^x-1)^2}$

0,5 b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$

puis en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$

0,5 3) a) Montrer en utilisant le Théorème des accroissements finis que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$

0,5 b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-\alpha)$

0,25 c) Montrer que (U_n) est convergente en précisant sa limite.

partie IV Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt \quad \text{où} \quad \begin{cases} f(t) = \dfrac{t}{e^t - 1} \; ; t \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On donne : f est continue sur $\mathbb{R}$ et décroissante sur $\mathbb{R}$

0,5 1) Montrer que : $\forall x \geq 0 \qquad 0 \leq F(x) \leq x f(x)$

en déduire la limite suivante $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

0,5 2) Montrer que : $\forall x \leq 0 \qquad F(x) \leq x f(x)$

En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{F(x)}{x}$

1 3) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$F'(x) = \frac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

et en utilisant le Théorème de la moyenne m.q : $F'(0) = 1$
(indice : encadrer $\dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0}$ puis calculer sa limite)

1,5 4) Dresser le tableau de variations de la fonction F.

Puis construire la courbe (C_F) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 2 (2,5 points)

Rappel : $(\mathbb{R} ; + ; \times)$ est un corps commutatif ; $0_{\mathbb{R}} = 0$

et $1_{\mathbb{R}} = 1$; $(M_2(\mathbb{R}) ; + ; \times)$ est un anneau unitaire

$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(M_2(\mathbb{R}) ; + ; \cdot)$ est un espace vectoriel.

Soit $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} ; a^2 + b^2 = 1 \;/\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

0,25 1) a) Vérifier que : $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$

$$M(a,b) \times M(c,d) = M(ac-bd\,;\,ad+bc)$$

0,25 b) Montrer que E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,;\,\times)$

2) Soit $U = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\}$, Rappelant que $(U;\times)$ est un groupe commutatif

On considère l'application f définie ainsi :

$$f : (U;\times) \longrightarrow (E;\times)$$
$$x+iy \longrightarrow M(x,y)$$

0,5 a) Montrer que f est un isomorphisme de $(U;\times)$ vers $(E;\times)$

0,5 b) En déduire que $(E;\times)$ est un groupe commutatif

0,5 3) On pose $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $A^{n+1} = A^n \times A$; $A^1 = A$;

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1/2 \end{pmatrix}$$

Ecrire A^n en fonction de n

0,5 4) Résoudre dans E l'équation $X^4 = A$

Exercice 3 : (3 points)

Soit (E) : $iz^2 + (1-i)(1+ia)z + (a^2-1) = 0$; $z \in \mathbb{C}$

$a \in \mathbb{C} \setminus \{1,-1\}$.

0,25 1) a) Vérifier que le discriminant de (E) est $\Delta = -2i(a+i)^2$.

0,25 b) En déduire que les solutions de (E) sont $U = i(1+a)$; $V = 1-a$

2) Soient $A(ia)$; $B(U)$; $C(V)$; $D(V^2)$; $E(W)$; $W = \frac{U^2+a}{1-i}$

0,5 a) Déterminer l'ensemble des points $M(a)$ tels que $\{B, C, O\}$ sont Allignés.

0,25 b) Soit : $r = \text{rotation}(\Omega, \frac{\pi}{2})$, Déterminer Ω sachant que $r(A) = C$

3) Dans ce qui suit, on suppose que : $|a| = 1$; $a^2 + (2+i)a + 1 \neq 0$

0,5 a) Montrer que : $A \neq D$; $A \neq E$; $D \neq E$

0,5 b) Montrer que : ADE est un triangle rectangle et isocèle en E.

0,75 c) Montrer que les points O ; A ; D ; E sont cocycliques

Exercice 4 : (2,5 points)

1) Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 3.

Soit l'équation (E) : $ax \equiv 1 [p]$; $x \in \mathbb{Z}$; $a \in A_p = \{1, 2, \dots, p-1\}$

0,5 a) Montrer que le nombre a^{p-2} est une solution de l'équation (E)

0,5 b) Soit r le reste de la division euclidienne de a^{p-2} par p.
Montrer que $r \in A_p$ et que r est la solution de (E) dans A_p.

2) Par la suite, on prend $p = 31$.

0,5 a) Déterminer les valeurs de r pour lesquelles on ait : $a = 2$ puis $a = 3$.

0,5 b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations : $(F_1) : 2x \equiv 1 [31]$
$(F_2) : 3x \equiv 1 [31]$

0,5 c) En déduire la résolution de l'équation $(F) : 6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 [31]$.

وفقكم الله.