ROYAUME DU MAROC
Ministère de l'Éducation Nationale
Et de la Formation Professionnelle de
l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Académie Régionale d'Éducation et de Formation
Région de Marrakech – Safi
Direction Rhamna

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
جهة مراكش- آسفي
مديرية الرحامنة

Lycée d'Excellence de Benguerir Etablissement privé	LYCEE D'EXCELLENCE DE BENGUERIR	ثانوية التميـــز التأهيلية الخصوصية ابن جرير
Niveau :2SMA1&2 **Mathématiques**	**Examen blanc** **Juin 2020**	**8/06/2020** **Durée :4h** **coefficient : 9**

$\mathcal{NB}$: L'épreuve comporte 5 exercices , le candidat doit choisir entere l'exercice 1 ou 2 et les exercices 3 ; 4 et 5 sont obligatoires

Exercice 1 (4 points)

	On rappelle que $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire intègre
	Soient $*$ et T les deux lois de composition internes définies sur $\mathbb{Z}$ par :
	$(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2)\quad x*y=x+y-2$ et $xTy=xy-2x-2y+6$
0.75	1) Montrer que $(\mathbb{Z},*)$ est un groupe commutatif
	2) On considère l'application φ définie de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$ par : $(\forall x\in\mathbb{Z})$: $\varphi(x)=x+2$
0.25	a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{Z},\times)$ vers $(\mathbb{Z},T)$
0.25	b)Déterminer l'élément neutre pour la loi T dans $\mathbb{Z}$
0.5	3) Montrer que la loi T est distributive par rapport à la loi $*$ dans $\mathbb{Z}$
0.75	4) Montrer que $(\mathbb{Z},*,T)$ est un anneau commutatif unitaire
0.5	5) a) Montrer que l'anneau $(\mathbb{Z},*,T)$ est intègre
0.5	b) $(\mathbb{Z},*,T)$ est -il un corps ? justifier votre réponse
0.5	6) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $x^{(1)}=x$ et $x^{(n+1)}=x^{(n)}Tx$,résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $4Tx^{(3)}=18$

Exercice 2 (4 points)

0.25	1) Montrer que 163 est un nombre premier
0.75	2)Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $13x-162y=1$
	3)On considère dans $\mathbb{Z}$ le système (S) : $\begin{cases}x\equiv a[13]\\x\equiv b[162]\end{cases}$. tel que $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$
0.25	a)Montrer que le nombre $x_0=325b-324a$ est une solution de (S)
0.5	b) Soit $x\in\mathbb{Z}$, montrer que x est solution de (S) si et seulement si 2106 divise $x-x_0$
0.5	c)Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système (S)
	4)Soit $x\in\mathbb{Z}$ tel que $x^{25}\equiv 3[163]$
0.5	a) Montrer que $x\wedge 163=1$
0.75	b) Montrer que $x^{25}\equiv 3[163]\Leftrightarrow x\equiv 3^{13}[163]$
0.5	c) déterminer l'entier naturel x tel que $\begin{cases}x^{25}\equiv 3[163]\\x\leq 162\end{cases}$

Exercice 3 (5 points)

Les parties I) , II) et III) sont indépendantes

0.5 I) 1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 = 1$

0.5 2) En déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation $z^3 - (z+1)^3 = 0$ sous leurs formes algébriques

II) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe $(O; \vec{u}; \vec{v})$

Soit B le point d'affixe $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Soit f l'application qui à tout point $M(z)$ différent de B associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \dfrac{1 + j\overline{z}}{\overline{z} - \overline{j}}$

0.5 1)vérifier que $\overline{j} = j^2$ et que $1 + j + j^2 = 0$

0.75 2)a) Montrer que $z' = j + 2\dfrac{z - j}{|z - j|^2}$, en déduire que $M' \neq B$

0.5 b) Montrer que les points B ; M et M' sont alignés

c) On pose (E) l'ensemble des points invariants par f

0.5 Montrer que (E) est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon

III) On considère le point Ω d'affixe 2

Et soit r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$

1) Pour tout point $M(z)$ du plan on pose $M''(z'')$ son image par l'application $g = h \circ r$

0.5 a) Montrer que $z - z'' = i(2 - z'')$

0.25 b) En déduire la nature du triangle $\Omega M M''$ lorsque$M \neq \Omega$

c) Soit A le point d'affixe $a = 2 + i$

Pour tout entier naturel n on pose $A_0 = A$ et $A_{n+1} = g(A_n)$ et on pose z_n l'affixe du point A_n

0.5 Montrer que $z_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2$

0.5 d)Déterminer l'entier naturel n pour que les points Ω , A_0 et A_n soient alignés

Exercice 4 (2 points)

1) Soit n un entier naturel non nul

0.5 a) Montrer que $(\forall t \geq 0)$: $1 + \sum_{k=1}^{k=2n-1} (-1)^k t^k \leq \dfrac{1}{t+1} \leq 1 + \sum_{k=1}^{k=2n} (-1)^k t^k$

(C' est-à-dire $1 - t + t^2 - \cdots - t^{2n-1} \leq \frac{1}{t+1} \leq 1 - t + t^2 - \cdots - t^{2n-1} + t^{2n}$)

0.5 b) En déduire que pour tout $x \geq 0$ on a $\sum_{k=1}^{k=2n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \leq \ln(x+1) \leq \sum_{k=1}^{k=2n+1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$

2) On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$définie par :$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$

0.5 a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes

0.5 b) Calculer $\lim u_n$?

Exercice 5 (9 points)

Partie I) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on considère l'équation : (E) : $\quad x\ln(x) = \frac{1}{n}$ tel que $x \in]0; +\infty[$

0.5 1) Etudier les variations de la fonction définie par par $g(x) = x\ln(x)$

0.5 2)Montrer que l'équation (E) admet une solution unique α_n dans l'intervalle $]0; +\infty[$

0.5 3)a) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{(n\geq 1)}$ est strictement décroissate et en déduire qu'elle est convergente

0.5 b)Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $\quad 1 < \alpha_n < e^{\frac{1}{n}}$, en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$

0.5 c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\alpha_n^n)$

Partie II) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; On considère la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = xe^{\frac{-1}{nx}} \text{ ; si } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

et on note par (C_n) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

0.5 1)Étudier la continuité et la dérivabilité de f_n à droite en 0

0.25 2)a)Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

0.5 b)Montrer que f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$; puis dresser son tableau de variation

0.5 3)a)Montrer que : $(\forall t \geq 0)\quad 0 \leq 1 - e^{-t} \leq t$

0.5 b)En déduire que $(\forall x \geq 0)$: $\quad 0 \leq e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$

0.75 c)Montrer que la droite d'équation $y = x - \frac{1}{n}$ est une asymptote oblique à la courbe (C_n) , puis précisez la position relative de la courbe (C_n) avec son asymptote oblique

0.25 4)a)Soit $n \in \mathbb{N}^*$;étudier la position relative de (C_{n+1}) et (C_n)

0.5 b)Tracer les courbes (C_1) et (C_2) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Partie III)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $F_n(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2n\ln(x)}}^{\frac{1}{n\ln(x)}} f_n(t)\mathrm{d}t$

0.25 1)a)Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x > 1)$: $\quad f_n\left(\dfrac{1}{2n\ln(x)}\right) = \dfrac{1}{2nx^2\ln(x)}$

0.5 b)Montrer que $(n \in \mathbb{N}^*)(\forall x > 1)$: $\quad \dfrac{1}{(2nx\ln(x))^2} \leq F_n(x)$; en déduire $\lim\limits_{x\to1^+} F_n(x)$

0.5 2)Montrer que $(\forall t > 1)$: $\quad 0 \leq te^{-\frac{1}{nt}} \leq t$; en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x) = 0$

0.5 3)a)En utilisant le changement de variable $u = e^{-\frac{1}{nt}}$, montrer que :

$$(\forall x > 1) : \quad F_n(x) = \frac{1}{n^2}\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x^2}} \frac{1}{\ln^3(u)}\mathrm{d}u$$

0.75 b) Montrer que F_n est dérivable sur $]1; +\infty[$ et que :

$$(\forall x \in]1; +\infty[) : \quad F_n'(x) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1-4x}{4x^3\ln^3(x)}\right)$$

0.25 c)En déduire le sens de variation de F_n sur $]1; +\infty[$