Série 4 limites et continuité

Ajitfham Academy

Prof zakaria bouicha

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul.
Calculer les limites suivantes :

1.
$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{(2-x)^n-1}$$

2.
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2n}}\frac{\sqrt{\frac{\sin 2nx}{1+\cos nx}}}{4n^2x^2-\pi^2}$$

3.
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\times\cos 2x\times\cdots\times\cos nx}{x^2}$$

4.
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)(1-\sin^2 x)\dots(1-\sin^n x)}{\cos^{2n} x}$$

Exercice 2

Soit f_m la fonction définie par :

$$f_m(x)=\begin{cases}\frac{\cos\left(\frac{2}{3}x\right)-\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos(2x)}, & \text{si } x>0,\\ x^2+mx+m+\frac{2m+1}{x+1}, & \text{si } x\leq 0 \text{ et } x\neq -1.\end{cases}$$

Où m est un paramètre réel.
1) Calculer : $\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}} f_m(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f_m(x)$.
2) Déterminer m pour que f_m soit continue en 0.
3) Déterminer m pour que f_m soit prolongeable par continuité en -1.

Exercice 3

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Arctan}(3x)}{x}\quad;\quad\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Arctan}(x^2+4x)}{x}$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\mathrm{Arctan}(x^4-x)\quad;\quad\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\mathrm{Arctan}(x)-\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-2\sqrt{\mathrm{Arctan}(x)-\frac{\pi}{4}}-1}{x-1}\quad\lim_{x\to 1^+}\frac{\mathrm{Arctan}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}{x-1}$$

Exercice 4

Partie I

Simplifier les expressions suivantes :

$$\text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{41\pi}{17}\right)\right)\,; \quad \text{Arctan}\left(\tan\left(-\frac{79\pi}{3}\right)\right)$$

$$\text{Arctan}\left(5\times\text{Arctan}\left(\sqrt{3}\right)\right)\,; \quad \text{Arctan}\left(\frac{1}{\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)}\right)$$

$$\tan\left(\text{Arctan}(2016)\right)\,; \quad \tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right)\times\text{Arctan}\left(\frac{3}{7}\right)\right)$$

$$\tan\left(-\text{Arctan}(5)\right)\,; \quad \tan\left(2\times\text{Arctan}(3)\right)$$

Partie II

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par :

$$f(x)=\frac{\text{Arctan}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}{x-1}$$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 1.
2. On note par g le prolongement de f, montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.
3. a) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, on a $|g(x)|\leq\frac{\pi}{2|x-1|}$.

b) Déduire que

$$\lim_{|x|\to+\infty} y(x)=0.$$

Exercice 5

Partie I

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{2-2x^3}, & \text{si } x < 1, \\ \frac{1}{2}\text{Arctan}\left(\frac{3}{x^2+2} - 1\right), & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

1) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4) a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à déterminer.
b) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Partie II

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 - 6x^2 + 11.$$

4) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$, notées x_1, x_2 et x_3.
(On adoptera l'ordre suivant $x_1 < x_2 < x_3$).
5) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

Soit f une fonction définie par $f(x) = \arctan\left(\frac{2\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$.

1.
   a) Déterminer D_f, le domaine de définition de f.

   b) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.

2. f admet-elle un prolongement par continuité en 1 ?
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)$.

4.

a) Montrer que

$$f(x)=\begin{cases}-2\text{Arctan}\left(\sqrt[4]{x}\right), & 0\leq x<1\\ -2\text{Arctan}\left(\sqrt[4]{x}\right)+\pi, & x>1\end{cases}$$

b) Étudier la continuité de f sur chacun des intervalles $[0;1[$ et $]1;+\infty[$.

5. Soit g la restriction de f sur $]1,+\infty[$.

a) Montrer que f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur un intervalle à déterminer.

b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in]1,+\infty[$.

6. Montrer que $\exists c\in]0;1[$: $\arctan\left(\frac{2\sqrt[4]{c}}{\sqrt{c}-1}\right)=\frac{-2}{n}\sum_{i=1}^{n}\text{Arctan}(\sqrt[4]{x_i})$, où n est un entier naturel non nul et $x_1,x_2,\ldots,x_n$ des éléments de l'intervalle $[0;1]$.