Chapter 8. 일반선형변환

8.1 일반선형변환

(1) 선형변환

$T : V \to W$가 벡터공간 V에서 W로의 사상일 때 V내의 벡터 $\bar{u}$, $\bar{v}$ 그리고 모든 스칼라 k에 대해서 동질성과 합의성질을 만족할 때 선형변환이라 하고 $V = W$ 일 때 선형연산자라고 합니다

① 동질성 $T(k\bar{u}) = kT(\bar{u})$

② 합의성질 $T(\bar{u} + \bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$

③ $T(\bar{0}) = \bar{0}$

④ $T(\bar{u} - \bar{v}) = T(\bar{u}) - T(\bar{v})$

⑤ $T(-\bar{v}) = -T(\bar{v})$

(2) 선형변환의 종류

① 행렬변환

② 영변환

③ 항등연산자

④ 확대 및 축소 연산자

Chapter 8. 일반선형변환

(3) 기저벡터의 상에 의한 선형변환

$T : R^n \to R^m$에서 R^n의 표준기저벡터를 $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots\cdots\cdots, \bar{e}_n$이라고 하고 $T(\bar{u}) = \bar{v}$라고 하면 R^n에 속하는 $\bar{u} = span(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots\cdots, \bar{e}_n) = c_1\bar{e}_1 + c_2\bar{e}_2 + \cdots\cdots + c_n\bar{e}_n$이 되고

$T(\bar{u}) = T(c_1\bar{e}_1 + c_2\bar{e}_2 + \cdots\cdots + c_n\bar{e}_n)$는 동질성의 원칙에 의해

$T(\bar{u}) = c_1T(\bar{e}_1) + c_2T(\bar{e}_2) + \cdots\cdots + c_nT(\bar{e}_n)$이 됩니다

결국 선형변환의 상의 R^n의 기저벡터의 상의 선형결합이 됩니다

$ex)$ $T : R^3 \to R^2$이고 R^3의 기저가 $\bar{v}_1 = (1,1,1)$, $\bar{v}_2 = (1,1,0)$, $\bar{v}_3 = (1,0,0)$이고

$T(\bar{v}_1) = (1,0)$, $T(\bar{v}_2) = (2,-1)$, $T(\bar{v}_3) = (4,3)$ 일 때, $T(2,-3,5)$를 구하시오

(4) 핵과 치역

① 핵(Kernel) : $T : V \to W$가 선형변환이고 T가 $\bar{0}$로 사상하는 V 벡터들의 집합입니다

② 치역(Range) : $T : V \to W$가 선형변환이고 V의 최소 한 개 벡터의 T에 의한 상이 되는 W의 모든 벡터들의 집합을 T의 치역이라고 합니다

③ 선형변환의 핵과 치역

ⓐ 행렬변환의 핵과 치역

ⓑ 영변환의 핵과 치역

ⓒ 항등연산자의 핵과 치역

ⓓ 정사영의 핵과 치역

ⓔ 회전의 핵과 치역

④ 핵과 치역의 성질과 차원

ⓐ $T: V \rightarrow W$가 선형변환이면 $\ker(T)$는 V의 부분공간입니다

ⓑ $T: V \rightarrow W$가 선형변환이면 $\mathrm{R}(T)$는 W의 부분공간입니다

ⓒ $Rank(T) = Dim(R(T))$

ⓓ $Nullity(T) = Dim(Ker(T))$