ZAKARIA
Boucha
WtSp: 0617074062

Les fonctions logarithmiques

2 Bac pc - Svt - Tech

Ex 1

Première Partie :

On considère les fonctions numériques g et h définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x-1-\ln x \quad \text{et} \quad h(x)=x+(x-2)\ln x$$

1) a) Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in]0;+\infty[$ puis étudier les variations de la fonction g.

b) En déduire que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ g(x)\geq 0$.

2) a) Vérifier que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$h(x)=1+g(x)+(x-1)\ln x$$

b) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ (x-1)\ln x\geq 0$.

c) En déduire que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ h(x)>0$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=1+x\ln x-(\ln x)^2$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ puis étudier la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

2) a) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f'(x)=\dfrac{h(x)}{x}$.

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3) Soit (Δ) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(1;1)$.

a) Montrer que $y=x$ est une équation cartésienne de la droite (Δ).

b) Vérifier que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$f(x)-x=(\ln x-1)g(x)$$

c) Étudier le signe de $f(x)-x$ puis en déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (Δ)

4) Construire (Δ) et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion dont l'abscisse appartient à $\left]1;\frac{3}{2}\right[$)

Troisième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0=\sqrt{2} \ \text{ et } \ u_{n+1}=f(u_n) \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 1<u_n<e$

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On pourra utiliser le résultat de **3)** c) de la deuxième partie)

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Ex 2

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x-1+2\ln x$$

1) Étudier les variations de la fonction g.

2) Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3) En déduire que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$x>1\Rightarrow g\left(\frac{1}{x}\right)<0 \quad \text{et} \quad 0<x<1\Rightarrow g\left(\frac{1}{x}\right)>0$$

Deuxième Partie :

Soit f fonctions numérique définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x-x^2\ln x & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : $2cm$)

1) Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0.

2) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f'(x)=xg\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α tel que : $\dfrac{7}{4}<\alpha<2$.

6) Soit (Δ) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point O.

a) Montrer que $y = x$ est une équation cartésienne de la droite (Δ).

b) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (Δ).

7) Construire (Δ) et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Troisième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 \in]0;1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < u_n < 1$.

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Ex 3 :

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + x - 2 + 2\ln x$$

1) Vérifier que : $g(1) = 0$.

2) À partir du tableau de variations de la fonction g en-dessous :

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

Montrer que $g(x) \le 0$ pour tout $x \in]0;1]$ et que $g(x) \ge 0$ pour tout $x \in [1;+\infty[$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $1cm$)

1) Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite (D) d'équation $y = x$.

3) a) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) En déduire que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.

4) a) Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$ l'équation :

$$\left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x = 0$$

b) En déduire que $\mathscr{C}_f$ coupe la droite (D) en deux points dont on déterminera les coordonnées.

c) Montrer que pour tout $x \in [1;2]$: $f(x) \le x$ et en déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (D) sur l'intervalle $[1;2]$.

5) Construire (D) et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(On admet que $\mathscr{C}_f$ possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre $2,4$ et $2,5$).

Troisième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = \sqrt{3}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 \le u_n \le 2$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

(On pourra utiliser le résultat de la question **4) c)** de la deuxième partie).

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Examen National 2017 (Session Normale)

EX3 :

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{2}{x}-1+2\ln x$$

Le tableau en-dessous donne les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

1) Calculer $g(1)$.

2) Déduire à partir du tableau que :

$$g(x)>0 \text{ pour tout } x\in\,]0;+\infty[$$

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=3-3x+2(x+1)\ln x$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $2\,cm$)

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. (Pour calculer la limite, on pourra écrire $f(x)$ sous la forme : $f(x)=x\left[\frac{3}{x}-3+2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x\right]$)

b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinages de $+\infty$.

3) a) Montrer que : $(\forall x\in\,]0;+\infty[)\;\; f'(x)=g(x)$.

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

4) a) Montrer que $I(1;0)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

b) Montrer que $y=x-1$ est une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ en ce point.

c) Construire, dans le même repère, la droite (T) et la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Résoudre graphiquement dans l'intervalle $]0;+\infty[$ l'inéquation : $(x+1)\ln x\geq\frac{3}{2}(x-1)$

Examen National 2016 (Session De Rattrapage)

EX 4

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^2-1+2x^2\ln x$$

1) Montrer que x^2-1 et $2x^2\ln x$ ont le même signe sur l'intervalle $]0;1[$ puis en déduire que $g(x)\leq 0$ pour tout $x\in\,]0;1[$.

2) Montrer que x^2-1 et $2x^2\ln x$ ont le même signe sur $]1;+\infty[$ puis en déduire que $g(x)\geq 0$ pour tout $x\in\,]1;+\infty[$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=(x^2-1)\ln x$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $2\,cm$)

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$. (On pourra écrire $\frac{f(x)}{x}$ sous la forme : $\frac{f(x)}{x}=\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\ln x$).

En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera la direction.

2) a) Montrer que : $(\forall x\in\,]0;+\infty[)\;\; f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ et interpréter géométriquement $f'(1)=0$.

b) En déduire que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0;1[$ et croissante sur $]1;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f puis montrer que : $(\forall x\in\,]0;+\infty[)\;\; f(x)\geq 0$.

3) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Examen National 2012 (Session Normale

Ex 5

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^3-x-2\ln x+3$$

1) a) Vérifier que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$3x^3-x-2=(x-1)(3x^2+3x+2)$$

b) Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$g'(x)=\frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$$

2) a) Vérifier que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ \frac{3x^2+3x+2}{x}>0$

b) En déduire que le signe de $g'(x)$ est celui de $x-$

sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3) a) Montrer que la fonction g st décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

b) En déduire que $g(x)>0$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $1cm$)

1) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ puis en déduire que f est croissante sur $]0;+\infty[$.

2) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat.

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1+\ln x}{x^2}=0$ puis que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

c) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x-1$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$

3) a) Montrer que $y=3(x-1)$ est une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $(1;0)$.

b) Construire, dans le même repère, la droite (T) et la courbe $\mathscr{C}_f$. (On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet unique point d'inflexion que l'on ne cherchera pas à déterminer).

Examen National 2010 (Session De Rattrapage)

Ex 6

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x\ln x}{1+\ln x} & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que : $D_f=\left[0;\frac{1}{e}\right[\cup\left]\frac{1}{e};+\infty\right[$.

2) Montrer que f est continue à droite en 0.

3) Calculer : $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

6) a) Montrer que pour tout $x\in D_f-\{0\}$:

$$f'(x)=\frac{\ln^2 x+\ln x+1}{(1+\ln x)^2}$$

et en déduire que : $(\forall x\in D_f-\{0\})\ f'(x)>0$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

7) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

8) a) Montrer que pour tout $x\in D_f-\{0\}$:

$$f''(x)=\frac{\ln^2 x-1}{x(1+\ln x)^4}$$

b) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$.

9) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

Ex7

EXERCICE 39

Première Partie :

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x)=(\ln x)^3+\ln x-2$$

a) Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Calculer $g(e)$ et en déduire le signe de $g(x)$

Deuxième Partie :

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x)=\ln x-\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{(\ln x)^2}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que : $D_f=]0;1[\cup]1;+\infty[$.

2) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

3) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

4) a) Montrer que : $(\forall x\in D_f)\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(\ln x)^3}$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

5) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse e.

6) Montrer qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{e^e};\dfrac{1}{e}\right[$ tel que : $f(\alpha)=0$.

7) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe (Γ) d'équation $y=\ln x$.

8) Tracer les courbe $\mathscr{C}_f$ et (Γ) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Ex 8

EXERCICE 40

Première Partie :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $h(x)=x-\ln x$.

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to0^+}h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$.

2) Calculer $h'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ puis dresser le tableau de variations de h.

3) En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ x-\ln x\geq1$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{x-\ln x} & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Vérifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. Que peut-on déduire ?

3) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

4) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

5) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

6) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe la droite (Δ) d'équation $y=x$ en deux points dont on déterminera les coordonnées.

7) a) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x)-x=\frac{x(1-h(x))}{h(x)}$$

b) En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (Δ).

8) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$

au point d'abscisse 1.

9) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

Troisième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq u_n \leq 1$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On pourra utiliser le résultat de 7) de la deuxième partie)

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Ex 9

EXERCICE 41

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle par $I = [0;+\infty[$: $f(x) = \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x}\right)$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Que peut-on déduire ?

3) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu. (On pourra poser : $t = x + \sqrt{x^2+2x}$).

4) a) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}}$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

5) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

6) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

b) Donner le tableau de variations de f^{-1}.

c) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en $\ln(2+\sqrt{3})$ puis déterminer $(f^{-1})'\left(\ln(2+\sqrt{3})\right)$.

d) Tracer $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Ex 10

EXERCICE 42

Soit f et g les fonctions numériques définies sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}$$

et : $$g(x) = \frac{1}{x} - \ln(x+1) + \ln x$$

1) a) Montrer que pour tout $x \in [1;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} \quad \text{et} \quad g'(x) = \frac{-1}{x^2(x+1)}$$

b) Dresser les tableaux de variations de f et g.

c) En déduire que pour tout $x \in [1;+\infty[$:

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$$

2) On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq1}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + .. + \frac{1}{n}$

a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n \geq \ln(n+1)$.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Ex 11

Soit f et g les fonctions numériques définies sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}$$

et : $$g(x) = \frac{1}{x} - \ln(x+1) + \ln x$$

1) a) Montrer que pour tout $x \in [1;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} \quad \text{et} \quad g'(x) = \frac{-1}{x^2(x+1)}$$

b) Dresser les tableaux de variations de f et g.

c) En déduire que pour tout $x \in [1;+\infty[$:

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$$

2) On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq1}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + .. + \frac{1}{n}$

a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n \geq \ln(n+1)$.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Ex 12

EXERCICE 43

Soit f la fonction numérique définie sur $[1;+\infty[$ par :

$$f(x)=x\sqrt{\ln x}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Vérifier que pour tout $x\in]1;+\infty[$:

$$\frac{f(x)}{x-1}=x\sqrt{\frac{\ln x}{x-1}\times\frac{1}{x-1}}$$

b) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 1 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Montrer que : $(\forall x\in]1;+\infty[)\ f'(x)=\dfrac{2\ln x+1}{2\sqrt{\ln x}}$

Puis dresser le tableau de variation de f.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis déterminer la nature de la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

4) a) Montrer que :

$$(\forall x\in]1;+\infty[)\ f''(x)=\frac{2\ln x-1}{4x\sqrt{\ln^3 x}}$$

b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

5) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

6) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

b) Donner le tableau de variations de f^{-1}.

c) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en e puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(e)$.

d) Tracer $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Ex 13

EXERCICE 46

Première Partie :

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x)=x-2\ln x$$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ puis dresser le tableau de variations de g.

3) En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ g(x)>0$.

Deuxième Partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x)=x+1-\ln^2 x$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (poser : $x=X^2$)

b) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

c) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x)\geq x \Leftrightarrow x\in\left[\frac{1}{e};e\right]$$

3) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ f''(x)=\dfrac{2(-1+\ln x)}{x^2}$.

b) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

6) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

c) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 2 puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

d) Tracer $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Troisième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} .$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{1}{e} \leq u_n \leq e$.

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante. (On pourra utiliser le résultat de 2) c) de la deuxième partie).

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Ex 14

EXERCICE 48

Première Partie :

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x) = 2x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1)$$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$g'(x) = 2x\left[1 - \ln(x^2+1)\right]$$

b) Montrer que la fonction g est strictement croissante sur $\left[0;\sqrt{e-1}\right]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{e-1};+\infty\right[$.

c) Donner le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}^+$.

3) Montrer qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $\left[\sqrt{e-1};\sqrt{e^2-1}\right]$ tel que : $g(\alpha) = 0$.

4) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

Deuxième Partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0 puis déterminer $f'_d(0)$.

2) a) Montrer que : $(\forall x \geq 1) \quad 0 \leq f(x) \leq \dfrac{\ln(2x^2)}{x}$.

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*_+) \; f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2(1+x^2)}$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

4) Montrer que : $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}$.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.