

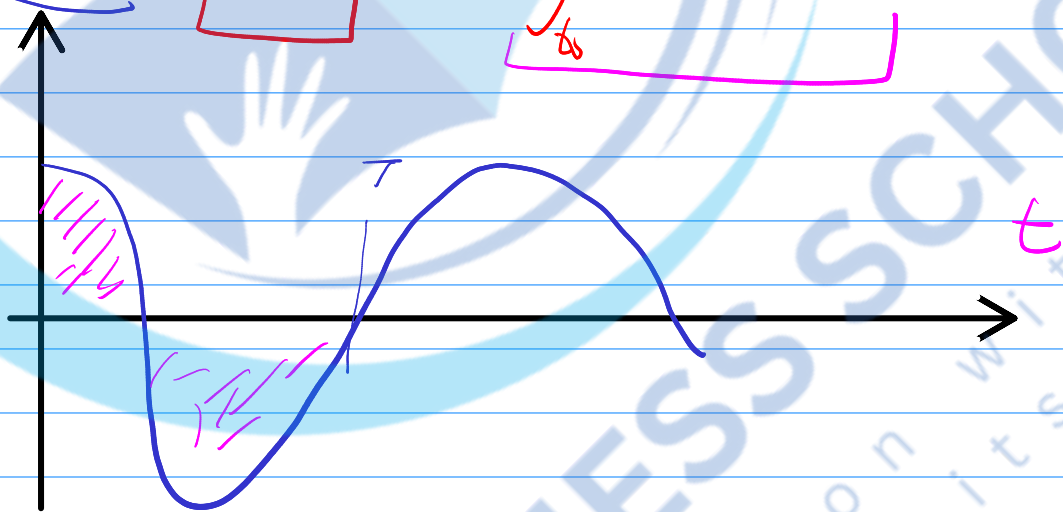
Chapitre 1: Composition en fréquence d'un signal périodique

Rappel : $s(t) = s_m \cos(\omega t + \varphi)$

s_m : l'amplitude maximale
 φ : phase à l'origine
 ω : pulsation
 f : fréquence
 T : la période

$\omega : \text{pulsation} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

* $\langle s(t) \rangle = s_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt$



$s_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt = \langle s^2 \rangle \neq \langle s \rangle^2$

Exemple

$I \rightarrow \boxed{R} \rightarrow P = RI^2$
 $i(t) = I_m \cos(\omega t) \rightarrow \boxed{R} \rightarrow P = R(I_{\text{eff}}^2)$

$$S_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt} \times$$

1/ Théorème de Fourier:

Toutes fonctions $s(t)$ période de fréquence f peut être décomposé en une série de Fourier:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

a_0 : Composante continue (offset) ou valeur moyenne

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$

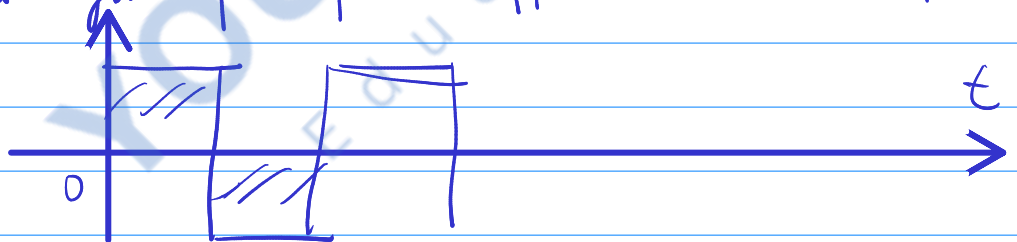
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(n\omega t) dt$$

Règle de calcul:

Soit un signal symétrique par rapport à l'axe du temps

$$a_0 = 0$$



Parité:

- Si la fonction $f(t)$ est paire:

$$\boxed{b_n = 0}$$

- Si la fonction est impaire:

$$\boxed{a_n = 0}$$

$$\Delta(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

C_n et ϕ_n en a_n et b_n

$$\begin{aligned} \text{on a: } C_n \cos(n\omega t + \phi_n) &= C_n \left\{ \cos(n\omega t) \cos(\phi_n) - \sin(n\omega t) \sin(\phi_n) \right\} \\ &= C_n \cos \phi_n \cos(n\omega t) - C_n \sin \phi_n \sin(n\omega t) \end{aligned}$$

$$\Delta(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{C_n \cos \phi_n}_{a_n} \cos(n\omega t) - \underbrace{C_n \sin \phi_n}_{b_n} \sin(n\omega t)$$

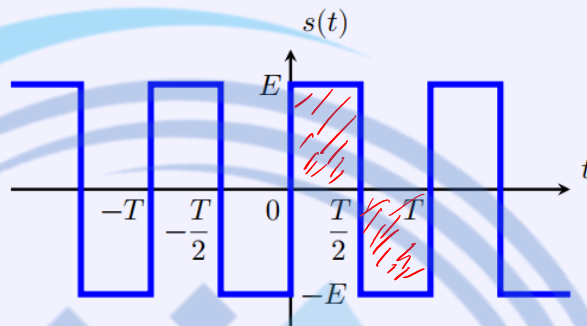
$$\Delta(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$\begin{cases} a_n = C_n \cos \phi_n \\ b_n = -C_n \sin \phi_n \end{cases} \Rightarrow C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \left| \tan \phi_n = - \frac{b_n}{a_n} \right.$$

Exercice 1

Considérons le signal créneau, d'amplitude E et de période T décrit par la fonction $s(t)$ impaire, explicitée ci-dessous pour un intervalle $[0; T]$ tel que :

$$\begin{cases} s(t) = E & \forall t \in \left[0; \frac{T}{2}\right] \\ s(t) = -E & \forall t \in \left[\frac{T}{2}; T\right] \end{cases}$$



1. Calculer les coefficients de Fourier A_n et B_n et donner la décomposition de $s(t)$.

$a_0 = 0$;

$a_n = 0$

$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(n\omega t) dt$

$= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} E \sin(n\omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{T/2}^T -E \sin(n\omega t) dt$

$\frac{2}{T} \int_0^{T/2} E \sin(n\omega t) dt = \frac{2E}{T} \left[-\frac{1}{n\omega} \cos(n\omega t) \right]_0^{T/2}$

$\omega T = 2\pi$

$$= \frac{2E}{T n \omega} \left(-\cos\left(n\omega \frac{T}{2}\right) + 1 \right)$$
$$= \frac{2E}{2\pi n} \left(1 - \cos(n\pi) \right)$$

$$\frac{2}{T} \int_0^{T/2} E \sin(n\omega t) dt = \frac{E}{\pi n} (1 - \cos(n\pi)) = \frac{E}{\pi n} (1 - (-1)^n)$$

$$e^{ni\pi} = \cos n\pi = \underbrace{(e^{i\pi})^n}_{-1}$$

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$\frac{2}{T} \int_{T/2}^T -E \sin(n\omega t) dt = -\frac{2E}{n\omega T} \left[-\cos(n\omega t) \right]_{T/2}^T$$

$$= +\frac{2E}{2\pi n} \left\{ \underbrace{\cos(n\omega T) - \cos(n\omega \frac{T}{2})}_{\cos(2\pi n)} \right\}$$

$$= +\frac{2E}{2\pi n} \left\{ 1 - \cos(n\pi) \right\}$$

$$= \frac{E}{\pi n} (1 - (-1)^n)$$

$$B_n = \frac{2E}{\pi n} (1 - (-1)^n)$$

• Si n est pair: $n = 2p$

$$B_{2p} = \frac{2E}{\pi n} (1 - 1) = 0$$

Si n est impair $n = 2p+1$

$$B_{2p+1} = \frac{2E}{\pi n} (1 - (-1)) = \frac{4E}{\pi(2p+1)}$$

$$s(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} B_{2p+1} \times \sin((2p+1)\omega t)$$

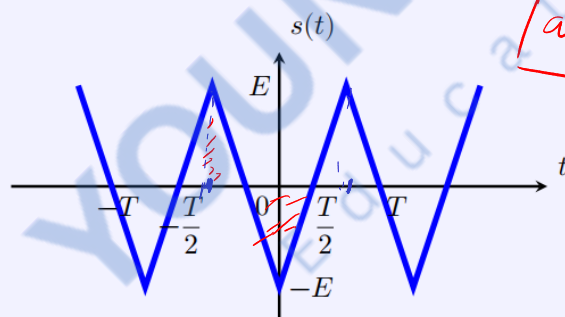
$$s(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4E}{(2p+1)\pi} \times \sin[(2p+1)\omega t]$$

$$s(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin((2p+1)\omega t)}{(2p+1)}$$

Exercice 2

Considérons un signal triangulaire, d'amplitude E et de période T décrit par la fonction $s(t)$ paire, explicitée ci-dessous pour un intervalle $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$ tel que :

$$\begin{cases} s(t) = -\frac{4E}{T}t - E & \forall t \in \left[-\frac{T}{2}; 0\right] \\ s(t) = \frac{4E}{T}t - E & \forall t \in \left[0; \frac{T}{2}\right] \end{cases}$$

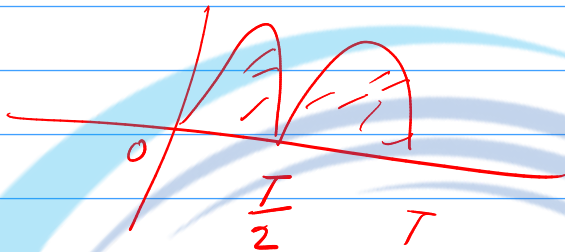


$$a_0 = 0$$

1. Calculer les coefficients de Fourier A_n et B_n et donner la décomposition de $s(t)$.

$$B_n = 0$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cos(n\omega t) dt$$



$$a_n = \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 \left(-\frac{4E}{T} t - E \right) \cos(n\omega t) dt + \int_0^{T/2} \left(+\frac{4E}{T} t - E \right) \cos(n\omega t) dt \right]$$

$$a_n = \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 -\frac{4E}{T} t \cos(n\omega t) dt + \int_0^{T/2} \frac{4E}{T} t \cos(n\omega t) dt \right]$$

$$\underbrace{\left(-\frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 E \cos(n\omega t) dt - \frac{2}{T} \int_0^{T/2} E \cos(n\omega t) dt \right)}_{=0}$$

$$= \frac{2}{T} \left\{ \int_0^{T/2} E \cos(n\omega t) dt - \int_0^{T/2} E \cos(n\omega t) dt \right\}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \left[+ \int_0^{T/2} + \frac{4E}{T} t \cos(n\omega t) dt + \int_0^{T/2} \frac{4E}{T} t \cos(n\omega t) dt \right]$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \frac{4E}{T} t \cos(n\omega t) dt$$

$$= \frac{16E}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos(n\omega t) dt$$

intégrer par partie:

$$u = t \rightarrow u' = 1$$

$$v' = \cos(n\omega t) \rightarrow v = \frac{1}{n\omega} \sin(n\omega t)$$

$$\int_0^{T/2} t \cos(n\omega t) dt = \left[\frac{1}{n\omega} t \sin(n\omega t) \right]_0^{T/2} - \int_0^{T/2} \frac{1}{n\omega} \sin(n\omega t) dt$$

$$= \frac{1}{n\omega} \times \frac{T}{2} \sin(n\omega \frac{T}{2}) - \frac{1}{(n\omega)^2} \left[-\cos(n\omega t) \right]_0^{T/2}$$

$$\sin(n\pi) = 0$$

$$= -\frac{1}{(n\omega)^2}$$

$$a_n = -\frac{4E}{n^2\pi^2} (1 - (-1)^n)$$

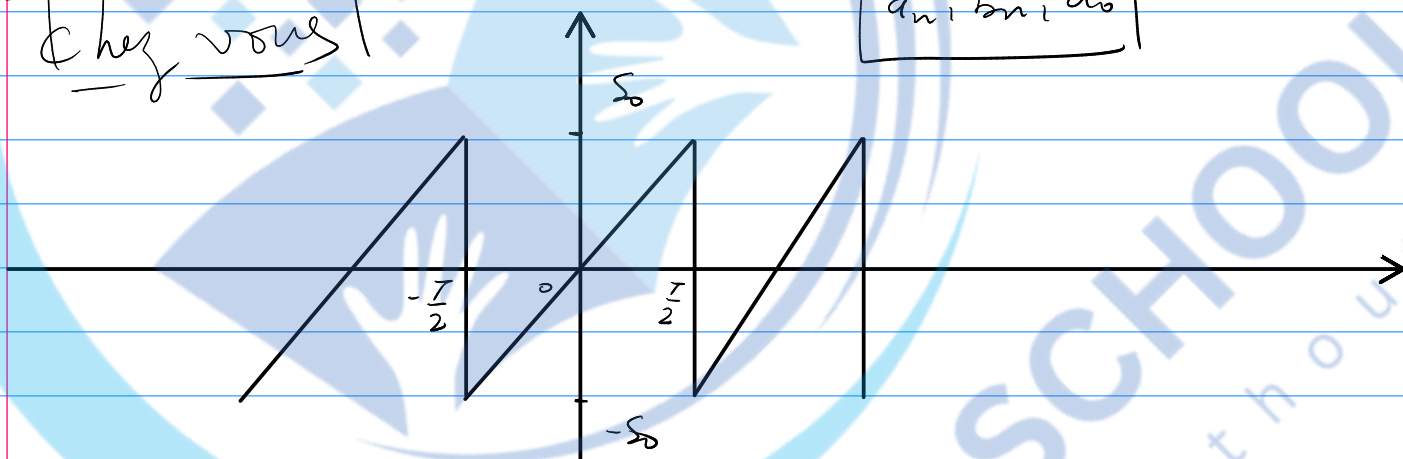
si n est pair: $a_{2p} = 0$; si n est impair:

$$a_{2p+1} = -\frac{4E}{(2p+1)^2\pi^2} (1 - (-1)) = -\frac{8E}{(2p+1)^2\pi^2}$$

$$f(t) = -\frac{8E}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos((2p+1)\omega t)}{(2p+1)^2}$$

Chez vous

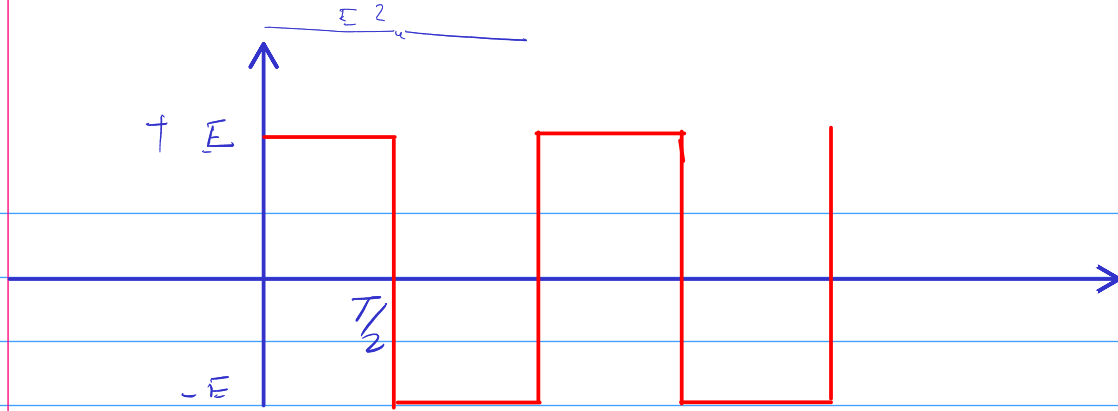
a_n, b_n, a_0



* Parseval:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$\boxed{P_{eff} = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}} \quad \text{Formule de Parseval}$$



$$\frac{1}{T} \int_0^T e^2(t) dt$$

$$e_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T E^2 dt = \frac{1}{T} E^2 \int_0^T dt = \frac{E^2}{T} \times T = E^2$$

$$e_{\text{eff}}^2 = E^2$$

En utilisant le théorème de Parseval :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

$$e(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin((2p+1)\omega t)}{(2p+1)}$$

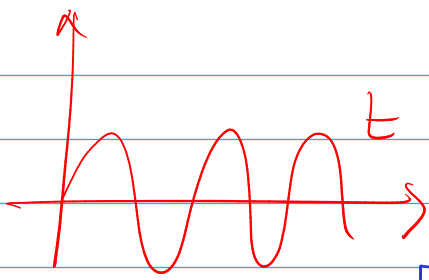
$$e_{\text{eff}}^2 = \left(\frac{4E}{\pi} \right)^2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \times \frac{1}{(2p+1)^2} = E^2$$

$$\frac{16E^2}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = E^2$$

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

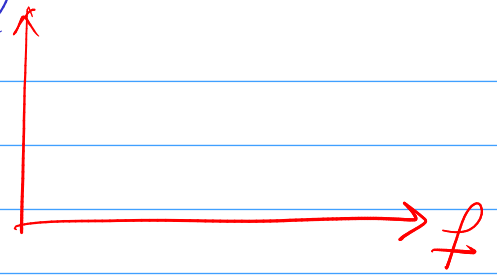
Signal

spectre en amplitude

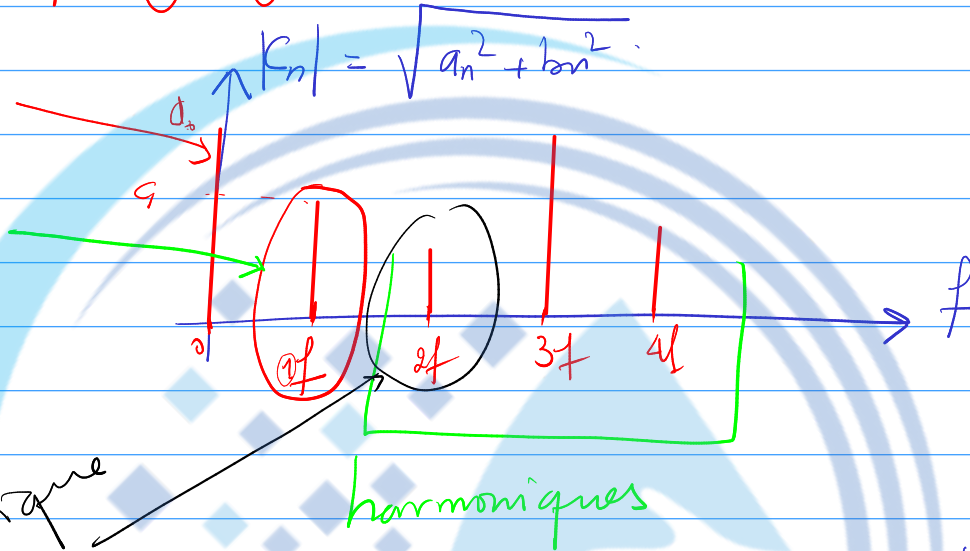


on

C_n



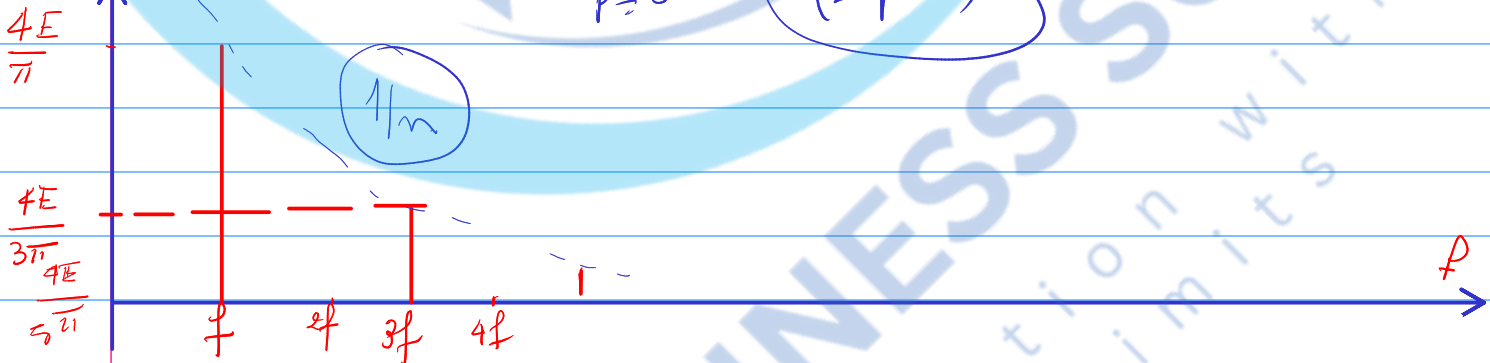
Composante continue fondamentale $n=1$



• Spectre d'un signal carré:

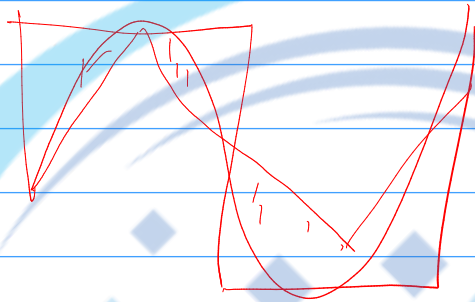
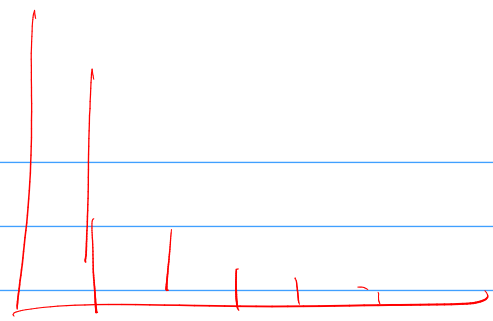
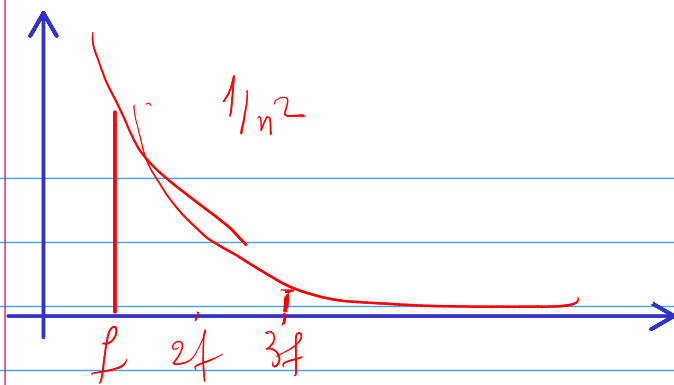
$$s(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin((2p+1)\omega t)}{(2p+1)}$$

$$\left| \begin{array}{l} n=3 \\ \frac{4E}{\pi} \times \left(\frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} \right) \end{array} \right|$$



$$s(t) = \sum \left(\frac{4E}{(2p+1)\pi} \right) \sin((2p+1)\omega t)$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |b_n| \quad |b_{2p+1}|$$



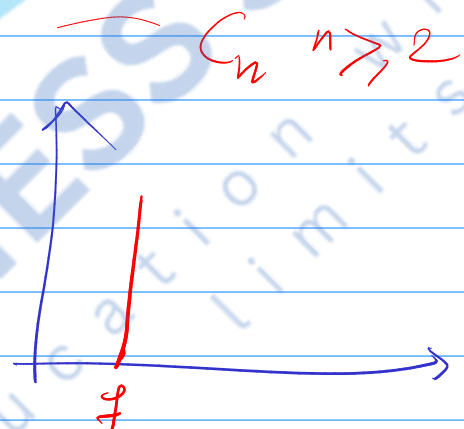
T.D.H : Taux de distortion harmonique

$$T.D.H = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} C_n^2}}{C_1} = \frac{\sqrt{C_2^2 + C_3^2 + \dots}}{C_1} \times 100$$

- car avec $n \geq 2$ sont nuls.

$$T.D.H_{s.s} = 0$$

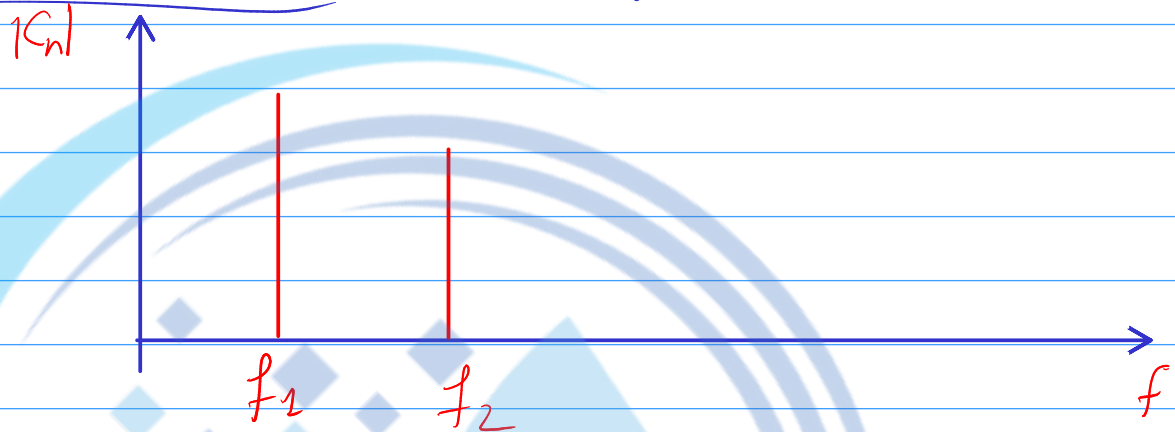
$\sin(\omega t)$



• Spectre de signaux usuels:

$$s(t) = E_1 \cos(2\pi f_1 t) + E_2 \cos(2\pi f_2 t)$$

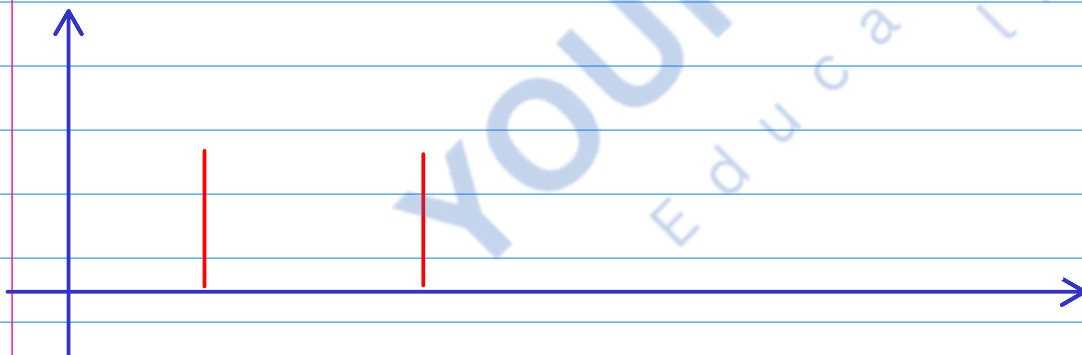
$$\left| (f_1 < f_2) ; \underline{E_1 > E_2} \right|$$



$$\left| s(t) = S_0 + S_m \cos(2\pi f t) \right|$$



$$s(t) = E_1 E_2 \cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_2 t)$$



$$\cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_2 t) = \frac{1}{2} \left(\cos(2\pi \underbrace{(f_1 + f_2)}_{f_1 + f_2} t) + \cos(2\pi \underbrace{(f_1 - f_2)}_{f_1 - f_2} t) \right)$$

Notation complexe:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \cos\left(n\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ \text{N.C.} \quad &= A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{jn\omega t} + b_n e^{j(n\omega t - \frac{\pi}{2})} \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(a_n - jb_n)}_{C_n} e^{jn\omega t} \\ \underline{x(t)} &= A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \underline{C_n} e^{+jn\omega t} \end{aligned}$$

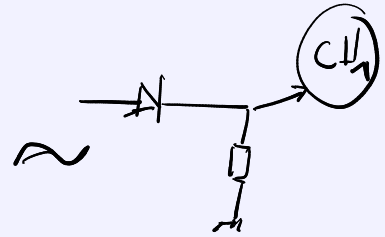
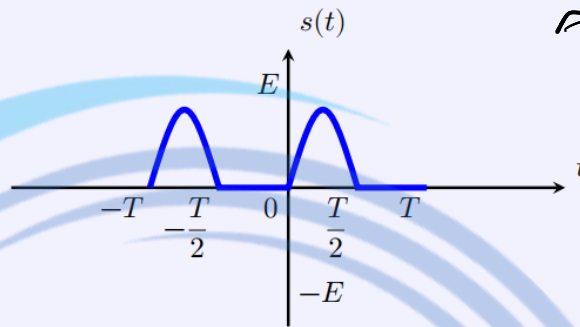
$$x(t) = \operatorname{Re}(\underline{x(t)})$$

$$\underline{C_n} = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) e^{jn\omega t} dt$$

Exercice 3

Considérons le signal mono-alternance, défini par $s(t)$ dans l'intervalle $[0; T]$ tel que :

$$\begin{cases} s(t) = E \sin(\omega t) & \forall t \in \left[0; \frac{T}{2}\right] \\ s(t) = 0 & \forall t \in \left[\frac{T}{2}; T\right] \end{cases}$$



1. Déterminer la décomposition en série de FOURIER du signal $s(t)$, en utilisant la forme complexe.

• Valeur moyenne:

$$\begin{aligned} S_{\text{moy}} &= \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} S_m \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{S_m}{T \omega} \left[-\cos(\omega t) \right]_0^{T/2} \\ &= \frac{S_m}{2\pi} \times \left(-\cos\left(\omega \frac{T}{2}\right) + 1 \right) \\ | S_{\text{moy}} &= \frac{S_m}{\pi} \end{aligned}$$

Remarque:

Pour un signal sinusoïdal de valeur moyenne nulle $s(t) = S_m \cos(\omega t)$

$$S_{\text{eff}} = \frac{S_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$$

$$S(t) = S_0 + S_{\text{ond}}(t)$$

- Comment mesurer la valeur efficace.

Voltmètre : DC ou AC

DC + AC

$$\text{si } S_0 = 0, \quad V_{\text{RMS}} \rightarrow \text{AC}$$

↓
Root Mean Square

$$S_0 \neq 0, \quad V_{\text{TRMS}} \rightarrow \text{AC + DC}$$