

EXERCICE1 : (10 points)

Partie I

Pour tout entier naturel **non nul** n , on considère la fonction f_n définie sur

$I =]0, +\infty[$ par : $f_n(0) = 0$ et $(\forall x \in]0, +\infty[) ; f_n(x) = \sqrt{x}(\ln x)^n$

et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

0.5 1-a) Vérifier que : $(\forall x \in]0, +\infty[) ; \sqrt{x}(\ln x)^n = (2n)^n \left(x^{\frac{1}{2n}} \ln \left(x^{\frac{1}{2n}} \right) \right)^n$, en déduire que

f_n est continue à droite en 0

0.25 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

0.75 c) Vérifier que : $(\forall x \in]0, +\infty[) ; \frac{f_n(x)}{x} = (2n)^n \left(\frac{\ln \left(x^{\frac{1}{2n}} \right)}{x^{\frac{1}{2n}}} \right)^n$, en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$

puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 d) Calculer, suivant la parité de n , $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.75 2-a) Montrer que f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$(\forall x \in]0, +\infty[) ; f'_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln x)^{n-1} (2n + \ln x)$$

0.25 b) Vérifier que : $\forall n \geq 2$, $f'_n(x) = 0$ si et seulement si $(x = 1 \text{ ou } x = e^{-2n})$

1 c) Étudier, suivant la parité de n , le sens de variation de f_n et donner son tableau de variations.

0.25 d) Montrer que si n est impair et $n \geq 3$ alors le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de (C_n)

Partie II :

1- Soit $s \in]1, e[$ un réel fixé. On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = f_n(s)$$

0.25 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 < u_n < \sqrt{e}$

0.25 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

0.25 c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

0.5 2-a) Montrer que pour tout entier n non nul, il existe un unique réel $x_n \in]1, e[$ tel que : $f_n(x_n) = 1$

0.75 b) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ainsi définie est croissante, en déduire qu'elle est convergente.

3- On pose : $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

0.5 a) Montrer que : $1 < \ell \leq e$

0.25 b) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln x_n)^n = \frac{1}{\sqrt{\ell}}$

0.25 c) Montrer que si $\ell < e$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(\ln x_n) = -\infty$

0.25 d) En déduire la valeur de ℓ

Partie III :

On pose pour tout $x \in I$, $F(x) = \int_x^1 (f_1(t))^2 dt$

0.25 1-a) Montrer que la fonction F est continue sur I

1 b) En utilisant une double intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x \in]0, +\infty[) ; F(x) = -\frac{x^2}{2} \ln^2(x) + \frac{x^2}{2} \ln(x) + \frac{1}{4}(1 - x^2)$$

0.5 2-a) Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x)$

0.25 b) En déduire la valeur de $F(0)$

0.5 c) Calculer, en cm^3 , le volume du solide engendré par la rotation d'un tour complet

autour de l'axe des abscisses de la portion de la courbe (C_1) relative à l'intervalle

$[0, 1]$. (On prendra $\|i\| = 1 \text{ cm}$)

EXERCICE2 : (3.5 points)

Les parties I et II peuvent être traitées indépendamment.

PARTIE I :

On considère dans $\mathbb{R}_+^2$ le système suivant : (S) :
$$\begin{cases} \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{x+y} \right) = \frac{12}{5} \\ \sqrt{y} \left(1 - \frac{1}{x+y} \right) = \frac{4}{5} \end{cases}$$

1- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ une solution du système (S). On pose : $z = \sqrt{x} + i\sqrt{y}$

0.25 a) Montrer que : $z + \frac{1}{z} = \frac{12}{5} + \frac{4}{5}i$

0.75 b) Montrer que : $z^2 - \left(\frac{12}{5} + \frac{4}{5}i \right) z + 1 = 0$, en déduire les valeurs possibles de z

$$\left(\text{On remarque que : } \frac{28}{25} + \frac{96}{25}i = \left(\frac{2}{5}(4 + 3i) \right)^2 \right)$$

0.25

- 0.5 c) En déduire les valeurs du couple (x, y)
- 2- Résoudre dans $\mathbb{R}_+^2$ le système (S)
- PARTIE II :**
- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$
- Soit (U) le cercle de centre O et de rayon 1 et $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points du cercle (U) deux à deux distincts.
- 0.25 1- Montrer que : $(\forall z \in \mathbb{C}) ; |z|=1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$
- 0.5 2-a) La droite passant par A et parallèle à (BC) coupe le cercle (U) au point $P(p)$
- Montrer que : $p = \frac{bc}{a}$
- 0.5 b) La droite passant par A et perpendiculaire à (BC) coupe le cercle (U) au point $Q(q)$. Montrer que : $q = -p$
- 0.5 c) La droite passant par C et parallèle à (AB) coupe le cercle (U) au point $R(r)$
- Montrer que les deux droites (PR) et (OB) sont perpendiculaires.

EXERCICE3 : (3.5 points)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire et non commutatif d'unité

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Soit } E = \left\{ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

- 0.25 1- Montrer que E est un sous-groupe de $(M_3(\mathbb{R}), +)$
- 2- On munit l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :
- $\forall ((x, z), (x', z')) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{C})^2 ; (x, z) * (x', z') = (x + x', z + z')$ et on considère l'application $\{$ définie de E vers $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ par :
- $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \{ (M(a, b, c)) = (a, b + ci)$
- 0.5 a) Montrer que $\{$ est un homomorphisme de $(E, +)$ vers $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, *)$ et que $\{ (E) = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$
- 0.25 b) En déduire que $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, *)$ est un groupe commutatif.
- 3- On munit $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ de la loi de composition interne T définie par :
- $\forall ((x, z), (x', z')) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{C})^2 ; (x, z) T (x', z') = (x \operatorname{Re}(z') + x' \operatorname{Re}(z), zz')$
- ($\operatorname{Re}(z)$ désigne la partie réelle du nombre complexe z)
- 0.25 a) Montrer que T est commutative.
- 0.25 b) Vérifier que $(0, 1)$ est l'élément neutre de T dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$
- 0.5 c) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, (1, i) T (x, -i) = (0, 1)$; en déduire que T est non associative dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$

4- Soit $G = \{(\text{Im}(z), z) / z \in \mathbb{C}\}$
($\text{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire du nombre complexe z)

- 0.25 a) Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, *)$
(On remarque que $(-\text{Im}(z), -z)$ est le symétrique de $(\text{Im}(z), z)$ pour la loi $*$)
- 0.25 b) Soit $\mathbb{E}$ l'application définie de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ par : $\forall z \in \mathbb{C}^* ; \mathbb{E}(z) = (\text{Im}(z), z)$
Montrer que $\mathbb{E}$ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, T)$
- 0.5 c) En déduire que $(G - \{(0,0)\}, T)$ est un groupe commutatif.
- 0.5 5- Montrer que $(G, *, T)$ est un corps commutatif.

EXERCICE4 : (3 points)

Soit p un nombre premier impair. On pose : $S = 1 + p + p^2 + p^3 + \dots + p^{p-1}$

Soit q un nombre premier qui divise S .

- 0.5 1- a) Montrer que p et q sont premiers entre eux.
- 0.25 b) En déduire que : $p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$
- 0.5 c) Vérifier que : $p^p - 1 = (p-1)S$, en déduire que : $p^p \equiv 1 \pmod{q}$
- 2- On suppose que p et $q-1$ sont premiers entre eux.
- 0.75 a) En utilisant le théorème de Bézout, montrer que : $p \equiv 1 \pmod{q}$
- 0.25 b) En déduire que $S \equiv 1 \pmod{q}$
- 0.75 3- Montrer que : $q \equiv 1 \pmod{p}$

FIN