Produit scalaire (Résumé)

I) BASE ET REPERE ORTHONORMES

Soit $B(\vec{i};\vec{j})$ une base de V_2.

1) La base B est dite **orthogonale** si $\vec{i}.\vec{j}=0$

2) La base B est dite **normée si** $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1$

3) Une base orthogonale et normée s'appelle une base orthonormée.

4)Soit O un point du plan et Soit $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan $(\mathcal{P})$;On dit que le repère $\mathcal{R}$ est orthonormé si la base $B(\vec{i};\vec{j})$ associé à $\mathcal{R}$ est orthonormée.

II) EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE.

L'espace V_2 est rapporté à une base orthonormée $B(\vec{i};\vec{j})$

Soient : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ deux vecteurs de V_2

on a : 1) $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$ 2) $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

3) $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow xx'+yy'=0$

4)Si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ alors

$$AB=\|\vec{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

III) PRODUIT SCALRE ET LIGNES TRIGONOMETRIQUES.

Théorème :L'espace V_2 est rapporté à une base orthonormée $B(\vec{i};\vec{j})$ Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$

$$\cos(\vec{u};\vec{v})=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}} \text{ et } \sin\theta=\frac{xy'-x'y}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\frac{\det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$

IV) DISTANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UNE DROITE.

1) Vecteur normal sur une droite.

Soit $D(A;\vec{u})$ la droite passante par A et de vecteur directeur $\vec{u}$; tout vecteur $\vec{n}$ non nul et orthogonal à $\vec{u}$ s'appelle un vecteur normal sur la droite$(\boldsymbol{D})$.

Remarque :Si $\vec{n}$ est normal sur une droite (D) ; Tout Vecteur non nul colinéaire avec $\vec{n}$ est aussi Normal sur la droite (D).

Si (D): $ax+by+c=0$ est une droite dans le plan alors $\vec{u}(-b;a)$), et le vecteur $\vec{n}(a;b)$ normal sur la droite (D).

2) Equation d'une droite définie par un point donné et un vecteur normal.

Propriété : Soient $A(x_A;y_A)$ un point donné, et $\vec{n}(a;b)$ un vecteur non nul. La (D) la droite qui passe par A et qui admet $\vec{n}$ comme vecteur normal

vérifie $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ ax_A+by_A+c=0 \end{cases} \Rightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$

Exemple : déterminer une équation cartésienne de la droite (D) qui passe par $A(0;1)$ et qui admet $\vec{n}(2;1)$ comme vecteur normal

(D): $2x+y+c=0$

$A \in (D) \Rightarrow 2\times x_A+y_A+c=0$

$\Rightarrow c=-1$

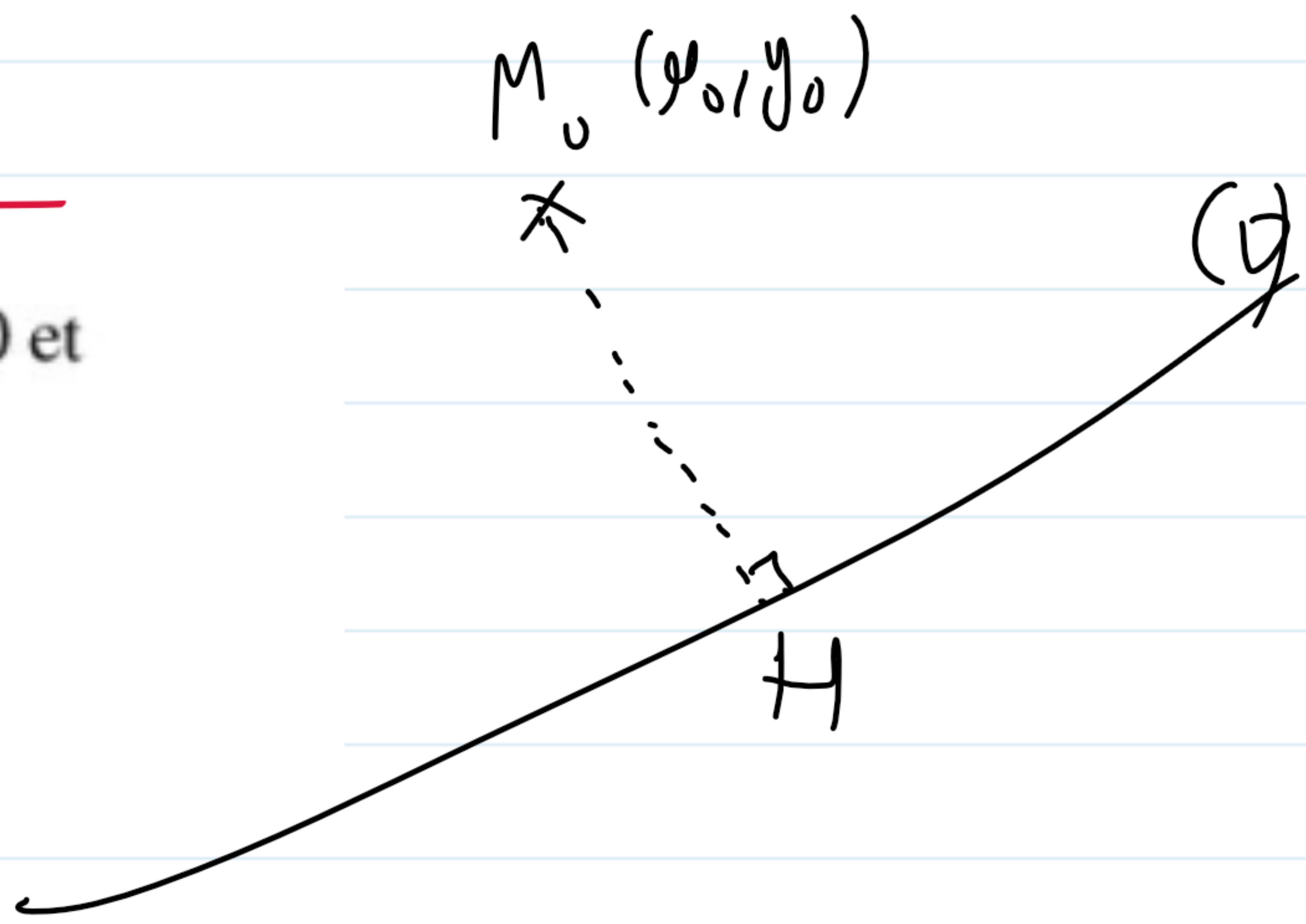
Donc (D): $2x+y-1=0$

Distance entre une droite et un point :

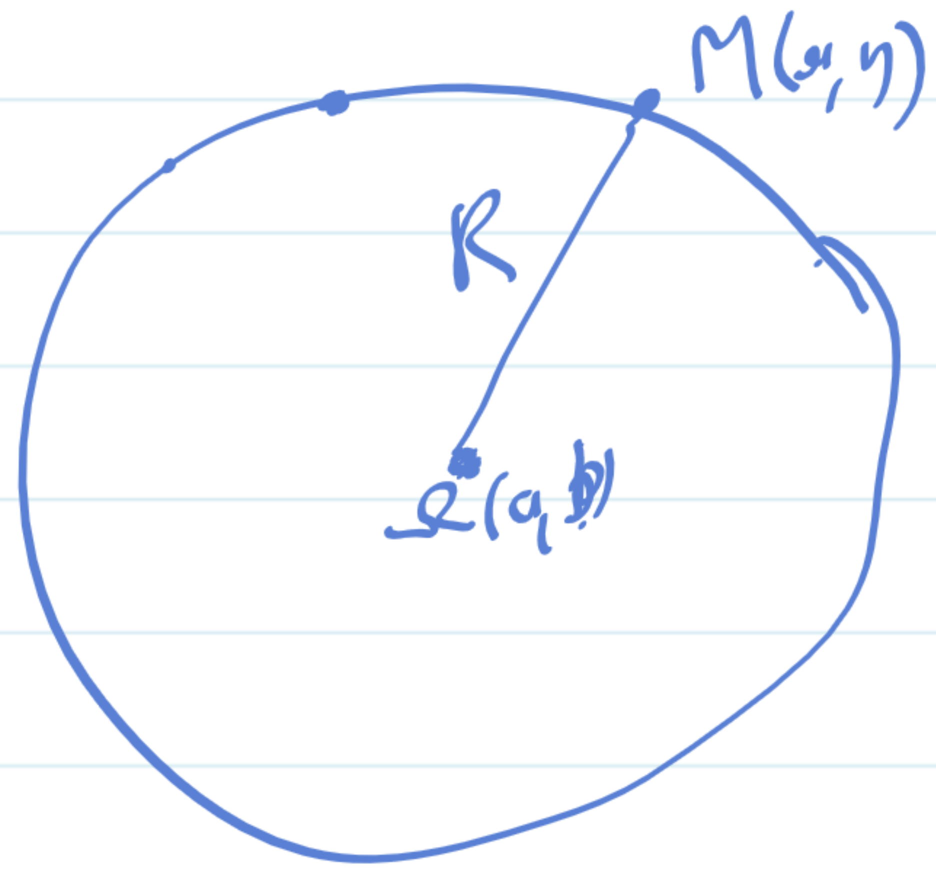
Théorème : Soient la droite (D): $ax+by+c=0$ et $M_0(x_0;y_0)$ un point dans le plan.

La distance du point M_0 à la droite (D) est :

$$M_0H=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



Équation d'un cercle:



$$\overrightarrow{\Omega M}\,(x-a\,;\,y-b)$$

$$\Omega M = R$$

$$\|\overrightarrow{\Omega M}\| = R$$

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R$$

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2}$$

équation d'un cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon R.

Exemple 1

Déterminer l'équation du cercle (C) de centre $\Omega(2,-3)$ et de rayon 2.

Réponse:

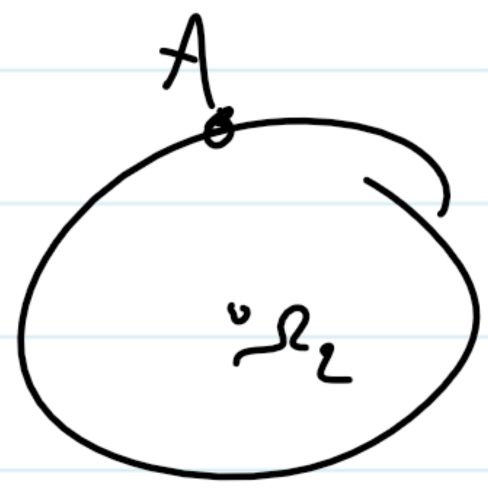
(C) $\quad (x-2)^2+(y-(-3))^2 = 2^2$

$$x^2-4x+\cancel{4}+y^2+6y+9=\cancel{4}$$

(C) $\quad x^2+y^2-4x+6y+9=0$

Exemple 2 :

Déterminer l'équation du cercle (C_2) de centre $\Omega_2(1,-1)$ et qui passe par $A(4,3)$



(C_2) : $(x-1)^2+(y+1)^2 = R^2$

$$A \in (C_2) \Longrightarrow (x_A-1)^2+(y_A+1)^2 = R^2$$

$$\Longrightarrow 9 = R^2$$

$$\Longrightarrow R = 3$$

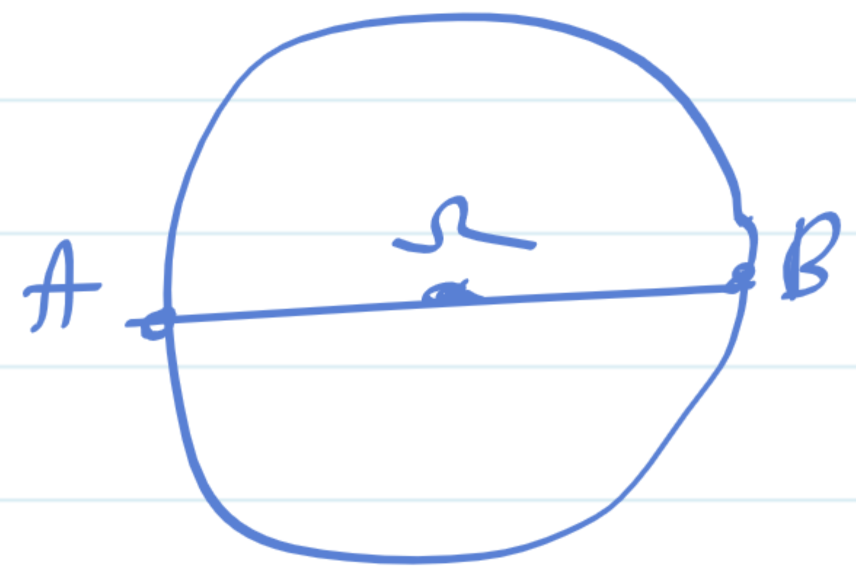
Donc : (C_2) $\quad (x-1)^2+(y+1)^2 = 9$

Equation d'un cercle défini par l'un de ses diamètres.

Exemple :

Soit $A(1,5)$ et $B(3,1)$, Déterminer l'équation du cercle de diamètre $[AB]$.

méthode 1 :



$\Omega(2;3)$

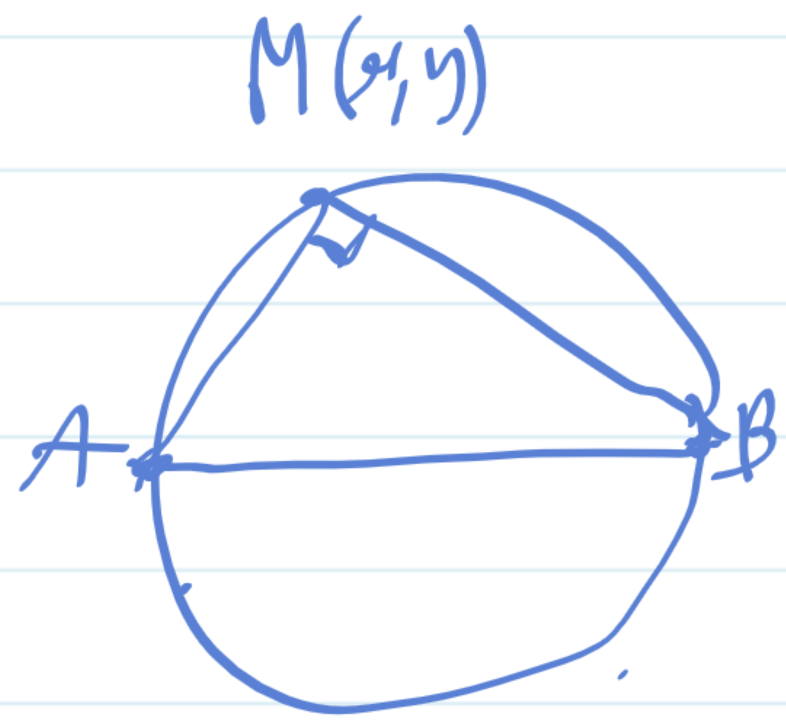
$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{2} = \frac{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{4+16}}{2}$$

$$= \sqrt{5}$$

$$(C) : (x-2)^2+(y-3)^2 = (\sqrt{5})^2$$

méthode 2 : $\overrightarrow{AM}(x-1;y-5)$ $\overrightarrow{BM}(x-3;y-1)$



$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-3)+(y-5)(y-1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2-3x-x+3+y^2-y-5y+5 = 0$

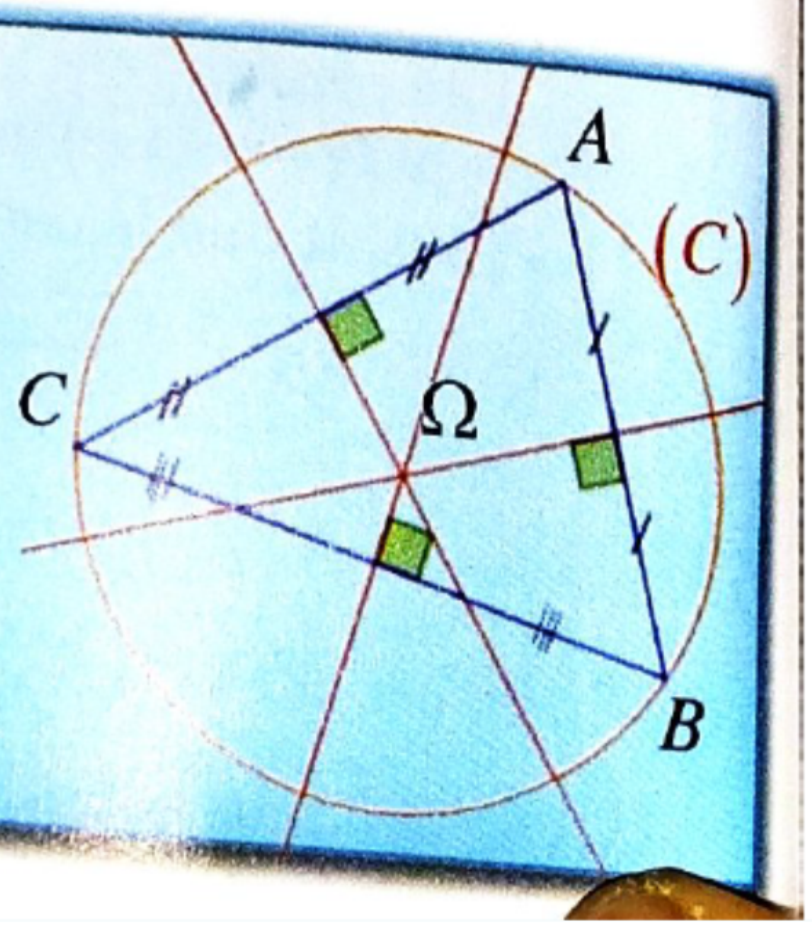
$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-6y+7 = 0$

Equation d'un cercle défini par 3 points non allignés

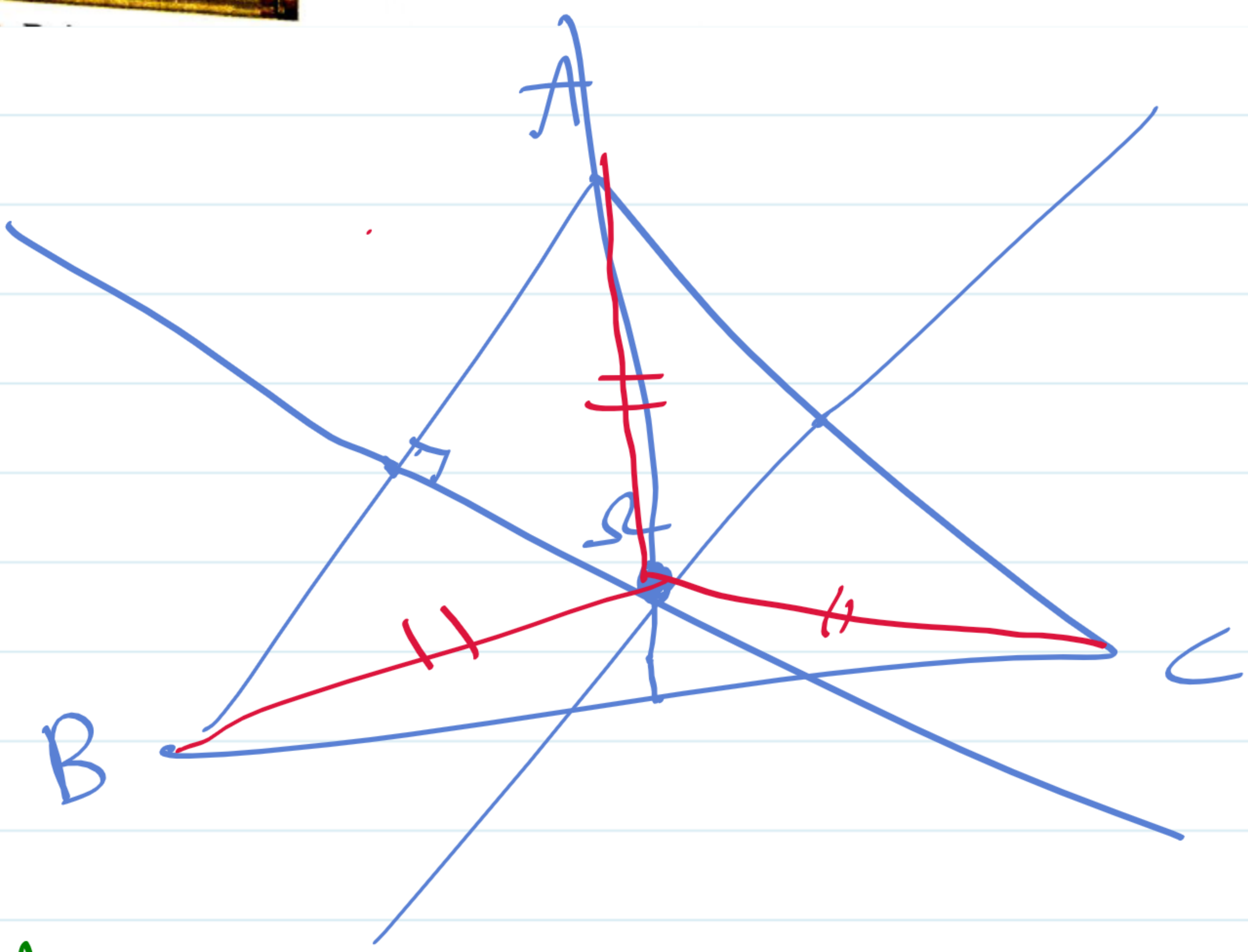
PAR TROIS POINTS NON ALIGNÉS

Proposition

Par trois points non alignés A, B et C passe un seul cercle (C) de centre Ω le point d'intersection des médiatrices du triangle ABC, et de rayon $R = \Omega A$.
Ce cercle est appelé le cercle circonscrit au triangle ABC.



Exemples



$\Omega A = \Omega B = \Omega C$

Exemple :

Déterminer l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC, avec :

$$A(4,0) \; ; \; B(0,4) \; ; \; C(-2;0)$$

Réponse :

Méthode 1 :

en général l'équation du cercle s'écrit :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

$$A, B, C \in (C) \Rightarrow \begin{cases} (4-a)^2+b^2=R^2 \\ a^2+(4-b)^2=R^2 \\ (-2-a)^2+b^2=R^2 \end{cases}$$

$$R = \Omega A = \|\vec{\Omega A}\| = \sqrt{(x_A - a)^2 + (y_A - b)^2}$$
$$= \sqrt{(4-a)^2 + b^2} \Rightarrow R^2 = (4-a)^2 + b^2$$

$$\begin{cases} (4-a)^2 + b^2 = R^2 \\ a^2 + (4-b)^2 = R^2 \\ (-2-a)^2 + b^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + (4-b)^2 = (4-a)^2 + b^2 \\ (-2-a)^2 + \cancel{b^2} = (4-a)^2 + \cancel{b^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{a^2} + \cancel{16} - 8b + \cancel{b^2} = \cancel{16} - 8a + \cancel{a^2} + \cancel{b^2} \\ 4 + 4a + \cancel{a^2} = 16 - 8a + \cancel{a^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -8b = -8a \\ 4 + 4a = 16 - 8a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b \\ -12 + 12a = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$R^2 = (4-a)^2 + b^2 = (4-1)^2 + 1 = 10$$

Donc $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 10$

2ème méthode :

Soit $I(2;2)$ et $J(1;0)$ respectivement les milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$.

Soit (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$, donc (Δ) est la droite passant par I et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$

Soit $M(x;y)$ un point du plan. On a $\overrightarrow{AB}(-4;4)$, d'où :

$$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM} = 0 \Leftrightarrow -4(x-2)+4(y-2)=0$$

Par conséquent : $(\Delta) : x - y = 0$

- Soit (Δ') la médiatrice de $[AC]$, donc (Δ') est la droite passant par J et de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$.

Soit $M(x;y)$ un point du plan. On a $\overrightarrow{AC}(-6;0)$, d'où :

$$M \in (\Delta') \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{JM} = 0 \Leftrightarrow -6(x-1)+0(y-0)=0$$

Par conséquent : $(\Delta') : x - 1 = 0$

- On sait que le centre Ω de cercle (C) est le point d'intersection de (Δ) et (Δ'), le couple $(x;y)$ des coordonnées de Ω est solution du système : $\begin{cases} x-y=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 1$ donc $\Omega(1;1)$.

Le rayon de cercle (C) est : $R = A\Omega = \sqrt{(1-4)^2+(1-0)^2} = \sqrt{10}$

Par conséquent, une équation cartésienne du cercle (C) est : $(x-1)^2+(y-1)^2 = 10$

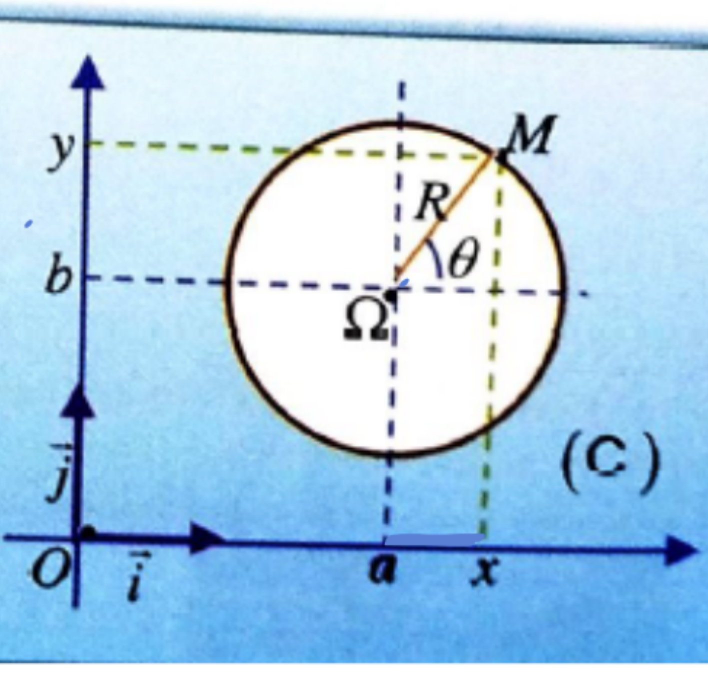
ou encore : $(C) : x^2+y^2-2x-2y+8=0$

5 REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UN CERCLE

Proposition

Le cercle (C) de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui vérifient le système : $\begin{cases} x = a + R\cos\theta \\ y = b + R\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$

Ce système est appelé une représentation paramétrique du cercle (C).



Exemple

1) On considère le cercle (C) de centre $\Omega(2;3)$ et de rayon $R=5$:

Une représentation paramétrique du cercle (C) est donnée par : $\begin{cases} x = 2+5\cos\theta \\ y = 3+5\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

2) Déterminons l'ensemble (Γ) des points $M(x;y)$ du plan tels que :

$$\begin{cases} x = 2+4\cos\theta \\ y = -3+4\sin\theta \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} x-2 = 4\cos\theta \\ y+3 = 4\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 4^2\cos^2\theta \\ (y+3)^2 = 4^2\sin^2\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2 = 16(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2 = 4^2$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(y-(-3))^2 = 4^2$$

l'ensemble (Γ) est cercle de centre $\Omega(2,-3)$ et de rayon 4

$\{ y = -1 + \sqrt{3}\sin\theta$

6 ENSEMBLE DES POINTS M(x ; y) DU PLAN TELS QUE : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Proposition

Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan P vérifiant l'équation : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

où $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ et on pose : $d = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$.

- Si $d < 0$, alors l'ensemble (Γ) est vide : $(\Gamma) = \varnothing$.
- Si $d = 0$, alors l'ensemble (Γ) est un singleton : $(\Gamma) = \left\{\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)\right\}$.
- Si $d > 0$, alors l'ensemble (Γ) est le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$ et de rayon $R = \sqrt{d}$.

Exemples :

① Soit (C) l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que :

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

Déterminer (C) :

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y - 4 = 0$$

$$(x-1)^2 - 1^2 + (y+2)^2 - 2^2 - 4 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3^2$$

(C) est le cercle de centre $\Omega(1,-2)$ et de rayon 3

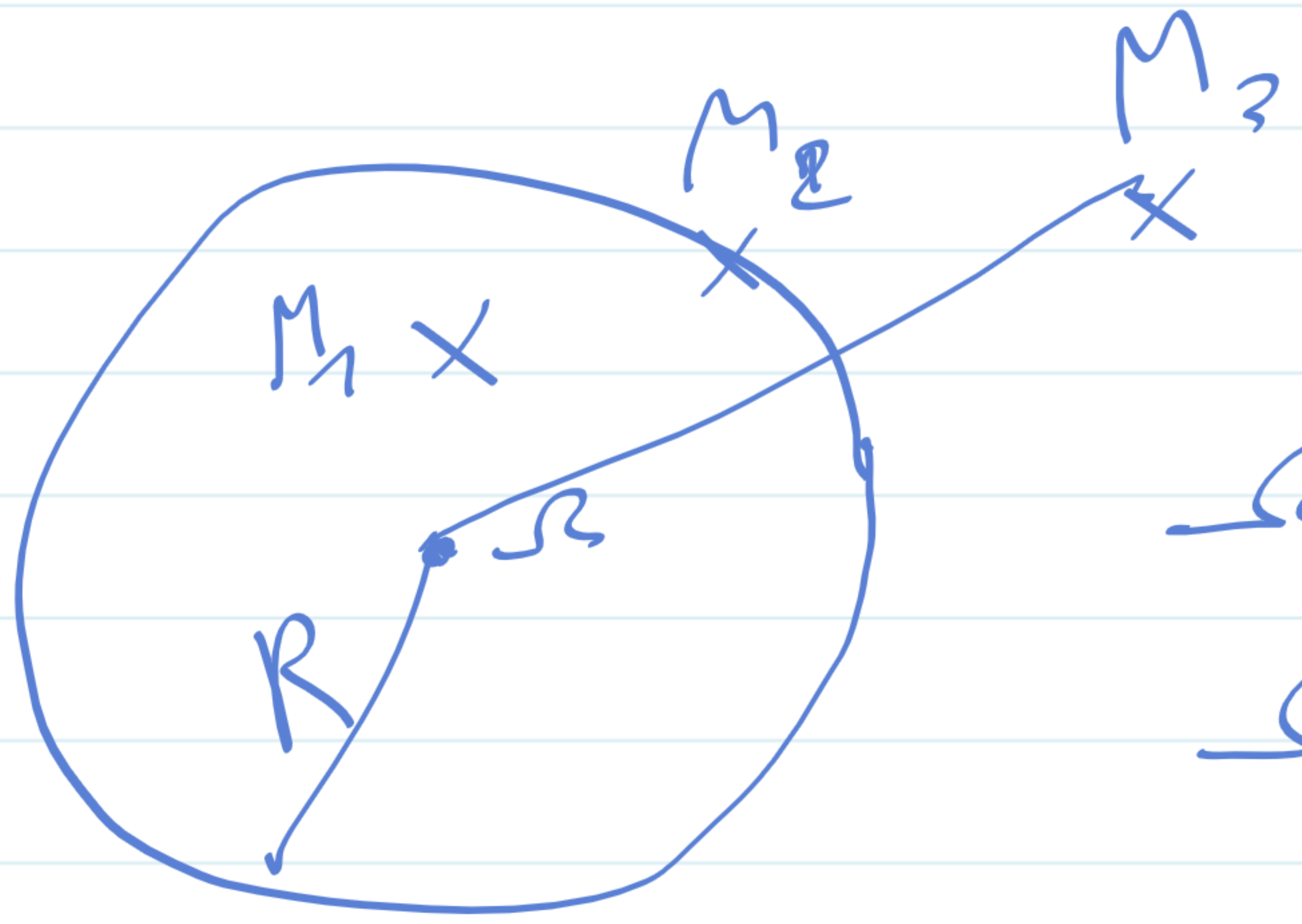
$$\boxed{\begin{aligned} x^2 + ax &= \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ x^2 - ax &= \left(x-\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \end{aligned}}$$

7 INTÉRIEUR ET EXTÉRIEUR D'UN CERCLE

Définition

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre Ω et de rayon R avec $R > 0$ et M un point du plan $\mathcal{P}$.

- Le point M est sur le cercle $(\mathcal{C})$ si et seulement si : $\Omega M = R$.
- Le point M est à l'intérieur de (C) si et seulement si : $\Omega M < R$.
- Le point M est à l'extérieur de (C) s.s.si : $\Omega M > R$.



$\Omega M_2 = R$

$\Omega M_3 > R$

$\Omega M_1 < R$

Proposition

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation cartésienne : $x^2+y^2+ax+by+c=0$ où $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$.

Pour tout point $M(x_0 ; y_0)$ du plan :

- M est un point du cercle $(\mathcal{C})$ si et seulement si : $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c = 0$.
- M est à l'intérieur du cercle $(\mathcal{C})$ si et seulement si : $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c < 0$.
- M est à l'extérieur du cercle $(\mathcal{C})$ si et seulement si : $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c > 0$.

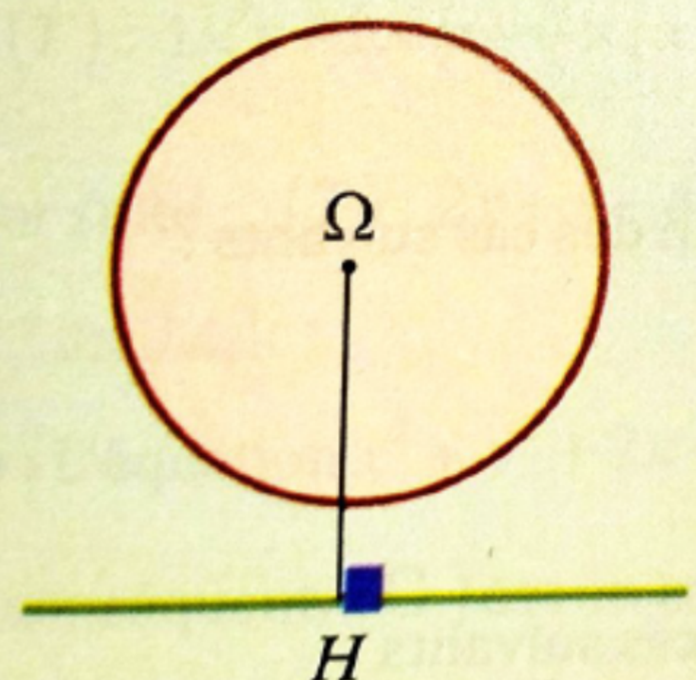
Ainsi, le cercle $(\mathcal{C})$ détermine trois parties disjointes dans le plan $\mathcal{P}$.

8 POSITIONS RELATIVES D'UNE DROITE ET D'UN CERCLE

Proposition

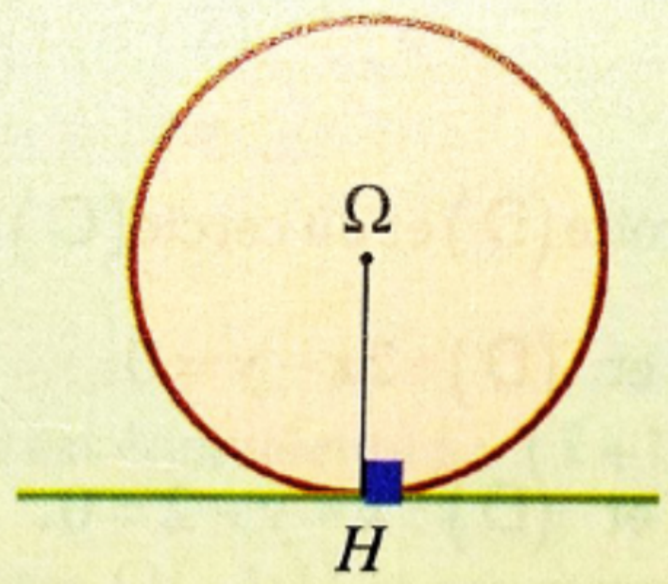
Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre Ω et de rayon R et $(\mathcal{D})$ une droite dans le plan $\mathcal{P}$.

- Si $d(\Omega;(\mathcal{D})) > R$, alors l'intersection de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{C})$ est vide : $(\mathcal{D}) \cap (\mathcal{C}) = \varnothing$.
- Si $d(\Omega;(\mathcal{D})) = R$, alors l'intersection de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{C})$ est le singleton $\{H\}$ où H est le point de contact (ou de tangence) de la droite $(\mathcal{D})$ et du cercle $(\mathcal{C})$.
- Si $d(\Omega;(\mathcal{D})) < R$, alors l'intersection de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{C})$ est un bipoint $\{A;B\}$.



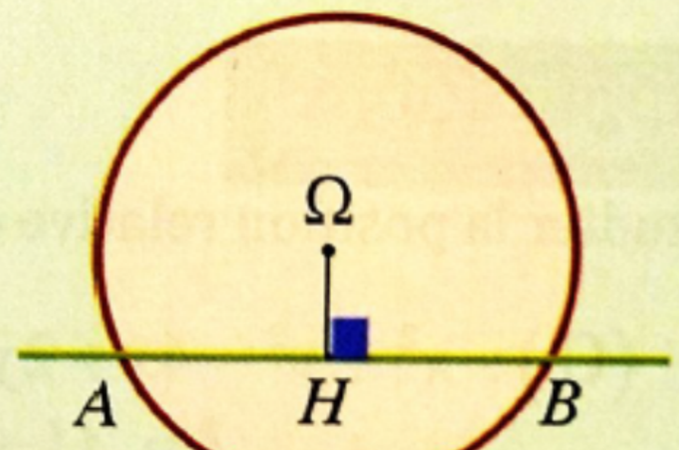
$d(\Omega;(D)) > R$

$(\mathcal{D}) \cap (\mathcal{C}) = \varnothing$



$d(\Omega;(D)) = R$

$(\mathcal{D}) \cap (\mathcal{C}) = \{H\}$



$d(\Omega;(D)) < R$

$(\mathcal{D}) \cap (\mathcal{C}) = \{A;B\}$

Exemple

1) Etudions la position relative de la droite (D) d'équation $2x+y+4=0$ et du cercle $\Omega(-1;3)$ et de rayon $R=3$.

$$d(\Omega;(D)) = \frac{|2x_\Omega+y_\Omega+4|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|-2+3+4|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

on a : $d(\Omega,(D)) < R$ alors la droite (D) coupe le cercle (C) en deux point.

9 ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UNE DROITE TANGENTE À UN CERCLE EN UN POINT DONNÉ DE CE CERCLE

Proposition

Soit (C) le cercle de centre Ω et de rayon R, $A(x_A;y_A)$ un point du cercle (C) et (T) la tangente au cercle (C) au point A.

- La droite (T) est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que :

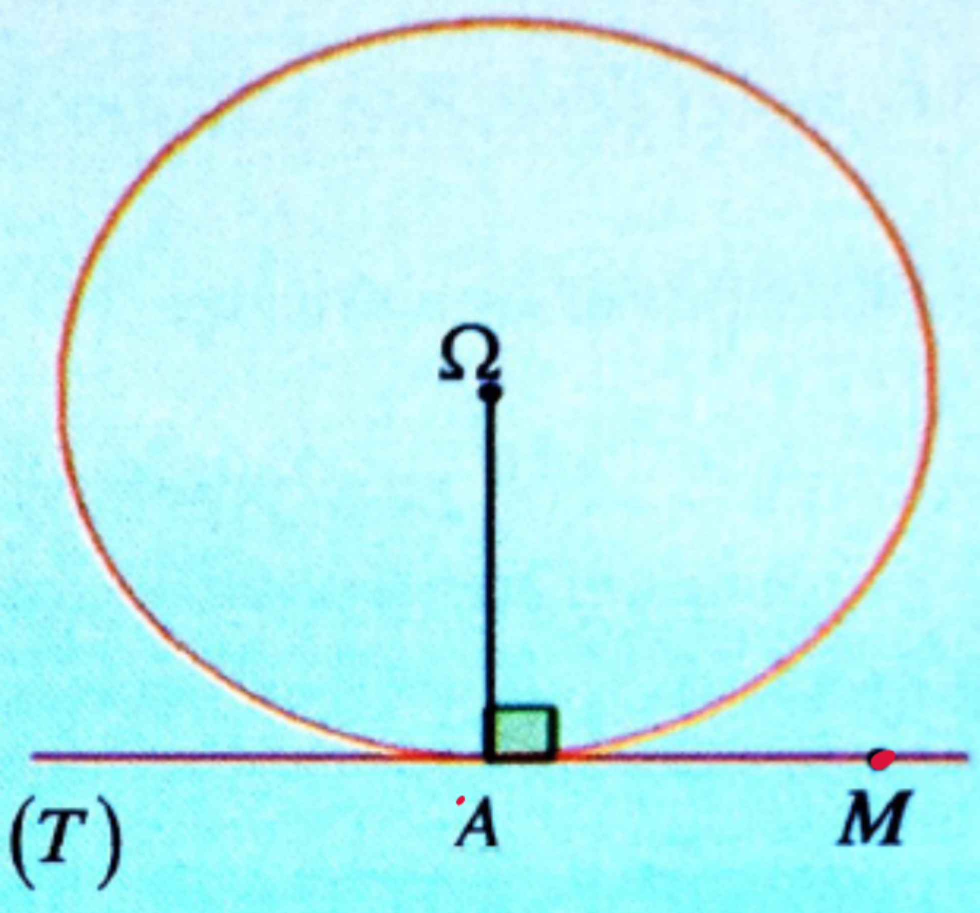
$$\overrightarrow{A\Omega}.\overrightarrow{AM}=0$$

- Si le cercle (C) admet une équation cartésienne de la forme :

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

alors une équation de la tangente (T) est donnée par :

$$(T):\ xx_A+yy_A+\frac{a}{2}(x+x_A)+\frac{b}{2}(y+y_A)+c=0$$



Exemple

On considère le cercle (C) d'équation cartésienne : $x^2+y^2+2x-2y-3=0$ et $A(1;2)$.

1ère méthode

Soit $M(x,y) \in (T)$ $\qquad (x+1)^2+(y-1)^2=5$

$M \in (T) \Rightarrow \overrightarrow{A\Omega}.\overrightarrow{AM}=0$

$A(1,2)$; $\Omega(-1,1)$; $M(x,y)$

$\overrightarrow{A\Omega}(-2;-1)$ et $\overrightarrow{AM}(x-1;y-2)$

$\overrightarrow{A\Omega}.\overrightarrow{AM}=0 \Rightarrow -2(x-1)-(y-2)=0$

$\Rightarrow -2x-y+4=0 \quad (T)$