Chute verticale d'un corps solide

Exercice 1 : Chute verticale d'un solide

Tout corps immergé dans un fluide est soumis à la poussée fluide, d'Archimède, et s'il est en mouvement de translation dans ce fluide il est soumis en plus à une force de frottement fluide.
Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution de la vitesse de deux billes (a) et (b) en verre homogène de rayons différents en mouvement de translation dans une huile avec une vitesse relativement faible.

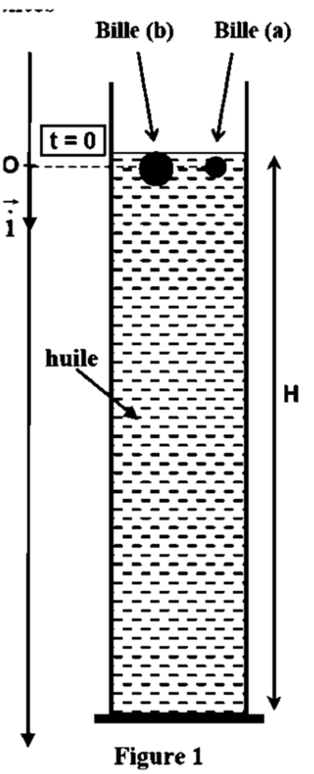


Figure 1

Données :

- Masse volumique du verre :$\rho = 2600 kg.m^{-3}$;
- Masse volumique de l'huile : $\rho_0 = 970 kg.m^{-3}$;
- Viscosité de l'huile : $\eta = 8,0.10-2 N.m^{-2}.s$;
- Accélération de la pesanteur : $g = 9,81 m.s^{-2}$.
- L'expression du volume d'une sphère de rayon r : $V = \frac{4}{3}\pi.r^3$

On abandonne au même instant t = 0 les deux billes (a) et (b) à la surface d'une huile contenue dans un tube cylindrique vertical transparent .La hauteur d'huile dans le tube est H = 1,00 m, figure(1)

1. **Etude du mouvement de la bille (a)**

   La bille (a) est soumise pendant son mouvement par rapport au repère (O,$\vec{i}$ lié à la terre aux forces :

   - La poussée d'Archimède : $\vec{F} = -\rho_0.V.g.\vec{i}$
   - La force de frottement fluide : $\vec{f} = -6.\pi.\eta.r.v.\vec{i}$
   - Son poids : $\vec{P} = m.g.\vec{i}$

     On désigne par τ le temps caractéristique du mouvement de la bille (a) et on considère que la vitesse limite de la bille est atteinte au bout d'une durée de 5τ.

   1.1. Etablir l'équation différentielle $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = C$ du mouvement de la bille (a) et préciser les expressions de τ et de C. Calculer τ sachant que r = 0,25 cm .

   1.2. Calculer la valeur de la vitesse limite v_ℓ de la bille (a).

2. **Etude comparative des mouvements des deux billes (a) et (b)**

   Le rayon de la bille (b) est r' = 2r.

   2.1. Déterminer, en justifiant la réponse, la bille qui met plus de temps pour atteindre sa vitesse limite .

   2.2. La distance parcourue au cours du régime transitoire par :

   - La bille (a) est $d_1 = 5,00 cm$
   - La bille (b) est $d_2 = 80,0 cm$

   On néglige r et r' devant H.

   Calculer la durée qui sépare l'arrivée des deux billes (a) et (b) au fond du tube .

Exercice 2 : La chute verticale d'une bille métallique

L'objectif de cet exercice est d'étudier le mouvement de chute verticale d'une bille métallique dans l'air et dans un liquide visqueux.

Donnée :

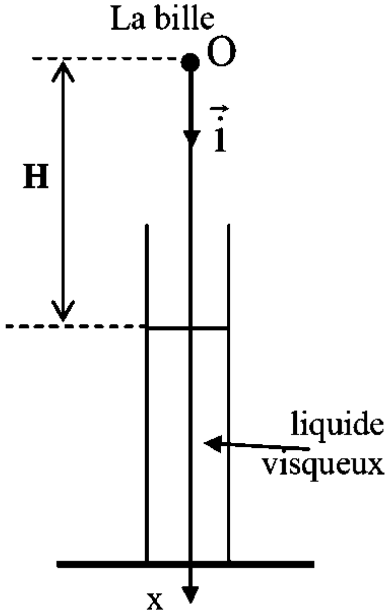
— La masse volumique de la bille : $\rho_1 = 2,70 \times 10^3 kg.m^{-3}$;

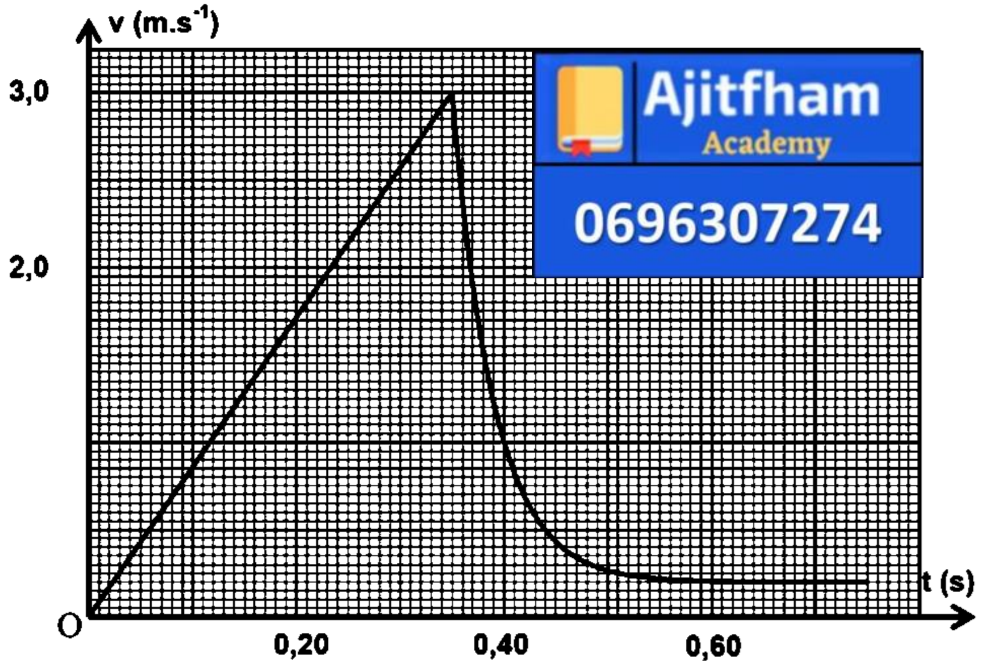
— La masse volumique du liquide visqueux : $\rho_2 = 1,26 \times 10^3 kg.m^{-3}$;

— Le volume de la bille : $V = 4,20 \times 10^{-6} m^3$

— Accélération de la pesanteur : $g = 9,80 m.s^{-2}$

A l'instant t=0 on libère la bille d'un point O confondu avec son centre d'inertie G.
Le point O se trouve à une hauteur H de la surface libre du liquide visqueux qui se trouve dans un tube transparent vertical (figure 1).
La courbe de la figure (2) représente l'évolution de la vitesse v du centre d'inertie G de la bille au cours de sa chute dans l'air et dans le liquide visqueux.





1. **Etude du mouvement de la bille dans l'air.**
   On modélise l'action de l'air sur la bille au cours de sa chute par une force verticale $\vec{R}$ d'intensité R constante. On néglige le rayon de la bille devant la hauteur H.
   Le centre d'inertie de la bille atteint la surface libre du liquide visqueux à un instant t_1 avec une vitesse v_1.
   1.1. En appliquant la deuxième loi de Newton, exprimer R en fonction de V ,ρ_1 , g , v_1 et v_1.
   1.2. En exploitant la courbe $v = f(t)$, calculer la valeur de R.
2. **Etude du mouvement de la bille dans le liquide visqueux .**
   La bille est soumise pendant sa chute dans le liquide visqueux , en plus de son poids aux forces :
   — Poussée d'Archimède : $\vec{F} = -\rho_2.V.g.\vec{i}$
   — Force de frottement visqueux : $\vec{f} = -k.v.\vec{i}$, avec k constante positive.

On modélise l'évolution de la vitesse v du centre d'inertie de la bille, dans le système international des unités, par l'équation différentielle $\dfrac{dv}{dt} = 5,2 - 26.v$ (1)

2.1. Trouver l'équation différentielle littérale vérifiée par la vitesse v du centre d'inertie de la bille en fonction des données du texte.

2.2. En utilisant cette équation différentielle littérale et le graphe de la figure 2, vérifier que l'équation différentielle (1) est correcte.

2.3. En utilisant l'équation aux dimensions, déterminer la dimension de la constante k. Calculer la valeur de k

2.4. sachant que la vitesse du centre d'inertie de la bille dans le liquide visqueux à un instant t_i est $v_i = 2,38 m.s^{-1}$; établir à l'aide de la méthode d'Euler que l'expression de la vitesse de G à l'instant $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ est : $v_{i+1} = (1 - 26.\Delta t).v_i + 5,20.\Delta t$ avec Δt le pas du calcul.

Calculer v_{i+1} dans le cas où $\Delta t = 5,00 ms$.

Exercice 3 : Mouvement de chute d'un parachutiste

Après un cours moment de son saut d'un avion, le parachutiste ouvre son parachute pour freiner son mouvement, ce qui lui permet d'arriver au sol en toute sécurité.
L'objectif de cette partie est l'étude du mouvement vertical d'un parachutiste après l'ouverture de son parachute.

Données :

— Masse du parachutiste et ses accessoires : m = 100 kg

— On considère que l'accélération de la pesanteur est constante : $g = 9,8 m.s^{-2}$.

Un parachutiste accompagné de ses accessoires saute avec une vitesse initiale négligeable d'un hélicoptère immobile se trouvant à une hauteur h du sol. Le parachutiste ouvre son parachute au moment où sa vitesse atteint $52 m.s^{-1}$ à un instant considéré comme origine des dates. Le système (S) formé par le parachutiste et ses accessoires prend alors un mouvement de translation vertical.
On étudie le mouvement du système (S) dans un repère galiléen $(O, \vec{k})$ lié à la terre, vertical et orienté vers le bas (figure 1).
L'air exerce sur le système une force que l'on modélise, par une force de frottement d'intensité $f = k.v^2$ avec k une constante et v la vitesse du parachutiste.
On néglige la poussée d'Archimède exercée par l'air.
La courbe de la figure 2 représente la variation de la vitesse v en fonction du temps après l'ouverture du parachute.

1. Montrer que l'équation différentielle que vérifie la vitesse v s'écrit sous la forme $\frac{dv}{dt} = g.(1 - \frac{v^2}{\alpha^2}$ en précisant l'expression de a en fonction de m, g et k.

2. Choisir la bonne réponse et justifier :
   La grandeur a représente :
   (a) La vitesse du système (S) à l'instant t=0.
   (b) L'accélération du mouvement du système (S) à l'instant t=0.
   (c) La vitesse limite du système (S).
   (d) L'accélération du mouvement du système (S) dans le régime permanent.

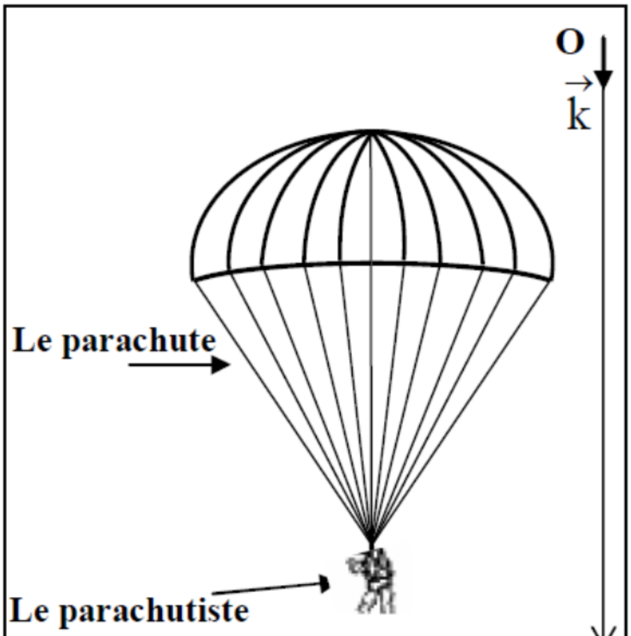


Figure 1

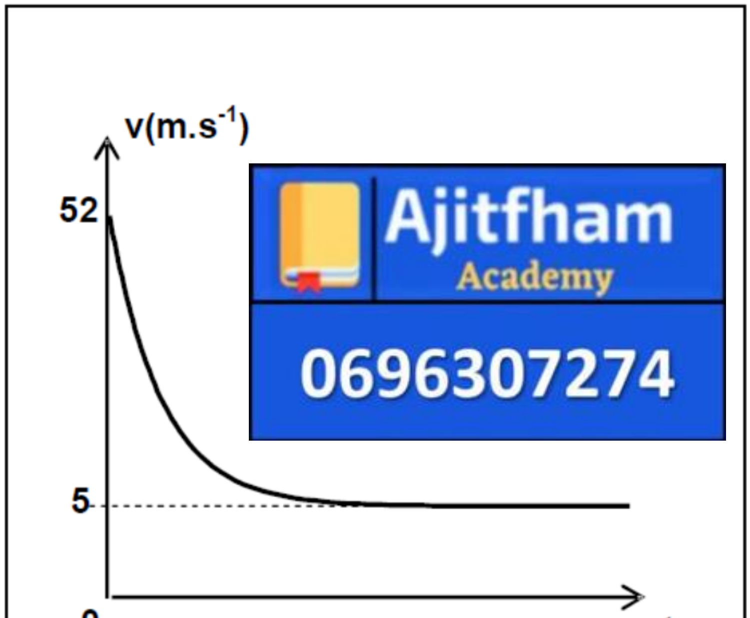


Figure 2

3. Déterminer la valeur de a. En déduire la valeur de k en précisant son unité dans le système international .

4. Pour tracer la courbe v(t) de la figure 2 on peut utiliser la méthode d'Euler avec un pas de calcul Δt. Soient v_n la vitesse du parachutiste à l'instant t_n , et v_{n+1} sa vitesse à l'instant $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ telles que $v_{n+1} = -7,84.10 - 2.v_n^2 + v_n + 1,96$ avec v_n et v_{n+1} en $m.s^{-1}$. Déterminer le pas Δt.

Exercice 4 : De l'étude de la chute libre à la chute avec frottement

Newton a supposé que tous les corps ont même mouvement de chute quelque soit leur masses . Pour vérifier cette hypothèse Newton a réalisé l' expérience de chute dans un tube vide en utilisant des corps de masse et de forme différentes et en déduit que ce sont les forces de frottement fluides qui sont responsables de la différence des vitesses de chute des corps verre la Terre.

Ahmed et Myriam ont décidé de vérifier expérimentalement la déduction de Newton, pour cela ils ont utilisé deux billes en verre (a) et (b) ayant le même volume V et la même masse m.
Ils abandonnent les deux billes au même instant t = 0 et sans vitesse initiale d'une même hauteur h du sol (fig 1).

— Ahmed a lâché la bille (a) dans l'air ;

— Myriam a lâché la bille (b) dans un tube transparent contenant de l'eau de hauteur h (fig 1).

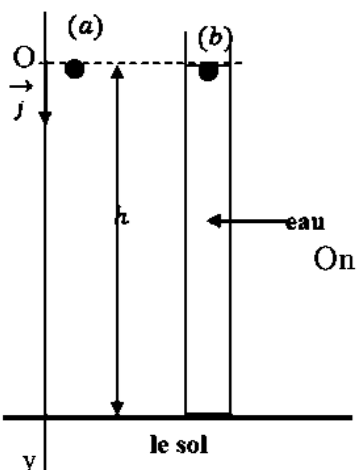


fig 1

A l'aide d'un dispositif convenable Ahmed et Myriam ont obtenu les résultats suivants :

— La bille (a) atteint le sol à l'instant $t_a = 0,41s$;

— La bille (b) atteint le sol à l'instant $t_b = 1,1s$.

Données : accélération de la pesanteur $g = 9,80m.s^{-1}$; $m = 6,0 \times 10^{-3}kg$; $V = 2,57 \times 10^{-6}m$; la masse volumique de l'eau $\rho = 1000kg.m^{-3}$

On suppose que la bille (a) n'est soumise au cours de sa chute dans l'air qu' à son poids.
La bille (b) est soumise au cours de sa chute dans l'eau à :

— Son poids d'intensité P = mg ;

— La poussé d'Archimède d'intensité $F_A = \rho.V.g$;

— La force de frottement fluide d'intensité $f = k.v^2$ avec K une constante positive et v vitesse du centre d'inertie de la bille.

1. **Étude du mouvement de la bille (a) dans l'air**

   1.1. Établir l'équation différentielle que vitrifie la vitesse du centre d'inertie de la bille (a) au cours de la chute.

   1.2. Calculer la valeur de la hauteur h .

2. **Étude du mouvement de la bille (b) dans l'eau** Myriam a enregistré à l'aide d'un dispositif convenable L'évolution de la vitesse de la bille (b) au cours du temps ; Elle a obtenu le graphe représenté dans la figure 2.

   2.1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse du centre d'inertie de la bille (b) au cours de sa chute dans l'eau en fonction des donnés du texte.

   2.2. A l'aide du graphe de la figure 2,déterminer la valeur de la constant K.

   2.3. Trouver l'expression de l'accélération a_0 du centre d'inertie de la bille (b) à l'instant t = 0 en fonction de g , V , ρ et m. Déterminer le temps caractéristique du mouvement de la bille (b).

3. **la différence entre les durées de chute** Ahmed et Myriam ont répété leur expérience dans les Conditions précédentes mais cette fois la hauteur D'eau dans le tube est H = 2h. Ahmed et Myriam ont libéré des deux billes (a) et (b) sans vitesse initiale au même instant t = 0 du même hauteur H = 2h.

   3.1. Exprimer Δt qui sépare l'arrivé des deux billes (a) et (b) au sol en fonction de t_a, t_b,g, h et v.

   3.2. Calculer la valeur de Δt

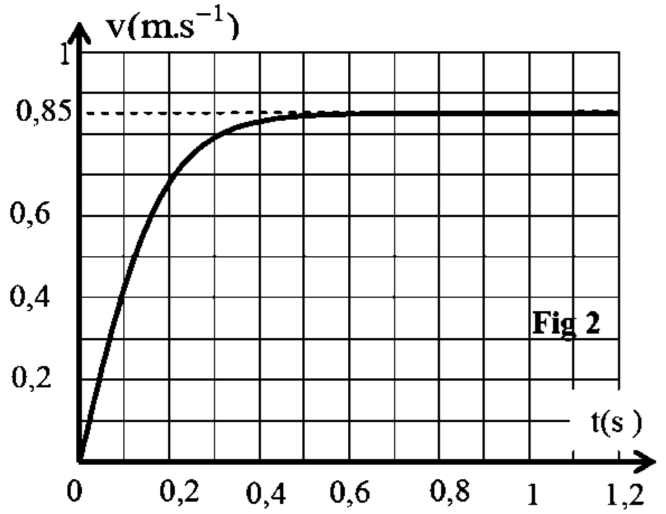


Fig 2

Exercice 5 : Etude du mouvement d'une bille dans un fluide visqueux

On étudie le mouvement d'une bille en acier dans un fluide visqueux contenu dans une éprouvette graduée (fig 1).
La figure (1) donne une idée sur le montage utilisé sans tenir compte de l'échelle.
On libère la bille sans vitesse initiale à un instant t = 0 et au même instant commence la saisie des images par un webcam reliée à un ordinateur. La position instantanée du centre d'inertie G est repérée sur un axe vertical Ox orienté vers le bas et de vecteur unitaire i ;fig (1). A t=0 , le centre d'inertie G est au point G_0 d'abscisse x=0.
On représente à chaque instant le vecteur vitesse du centre d'inertie de la bille par $\vec{v} = v.\vec{i}$.

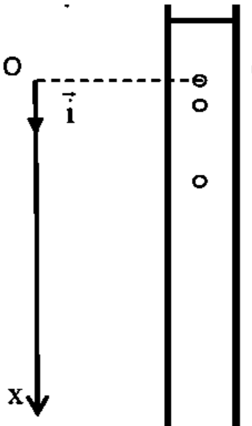


Fig1

L'analyse de la vidéo obtenue à l'aide d'un logiciel approprié permet de calculer à chaque instant t la vitesse v du centre d'inertie de la bille .La courbe de la figure 2 représente l'évolution de v au cours du temps.
On représente par V et m respectivement le volume et la masse de la bille et par ρ_a et ρ_s res-

pectivement la masse volumique de la bille et celle de du liquide visqueux et par g l'intensité de pesanteur.
Au cours de sa chute , la bille est soumise à :

— La force de frottement fluide : $\vec{f} = -h.\vec{v}$; h est le coefficient de frottement visqueux.

— La poussée d'Archimède : $\vec{F} = -\rho_s.V.\vec{g}$;

— Son poids : $\vec{P} = m.\vec{g} = -\rho_a.V.\vec{g}$.

1. A l'aide de la courbe de la figure (2), montrer l'existence d'une vitesse limite et déterminer sa valeur expérimentale .
2. Représenter , sur un schéma sans échelle ,les vecteurs forces appliqués sur la bille en mouvement dans le fluide.
3. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v(t) et montrer qu'elle, s'écrit sous la forme $\frac{dv}{dt} = -\frac{h}{m}.v + \alpha.g$ en précisant l'expression de α.
4. Vérifier que la fonction $v(t) = \alpha.g.\frac{m}{h}.\left[1 - e^{-\frac{h}{m}}\right]$ est solution de cette équation différentielle.
5. Montrer ,à partir de l'équation différentielle ou à partir de sa solution l'existence d'une vitesse limite et calculer sa valeur et la comparer avec la valeur trouvée expérimentalement .
   On donne : m =5,0g ; $g = 9,8 m.s^{-2}$; $h = 7,60 \times 10^{-2} kg.s^{-1}$; $\alpha = 0,92$.
6. Déterminer à l'aide de l'analyse dimensionnelle l'unité de $\frac{m}{h}$ et déterminer sa valeur à partir de l'enregistrement.

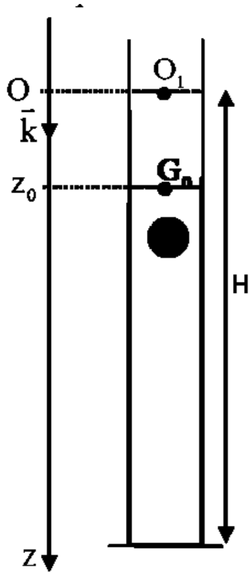
fig (2).

Exercice 6 : Etude de la chute verticale d'une bille avec frottement

On se propose, dans cette partie, d'étudier le mouvement du centre d'inertie G d'une bille, homogène de masse m, dans une éprouvette remplie d'un liquide visqueux.

On repère la position de G à tout instant par la coordonnée z de l'axe vertical $(O, \vec{k})$ dirigé vers le

A l'instant de date t_0, prise comme origine des dates $(t = 0)$, on lâche la bille sans vitesse initiale d'une position où G est confondu avec G_0 de coordonnée $z_0 = 3cm$. (figure ci-dessous).



Au cours de sa chute dans le liquide, la bille est soumise, en plus de son poids, à :

— La force de frottement fluide : $\vec{f} = -\lambda.v.\vec{k}$ où λ est le coefficient de frottement fluide et v la vitesse de G à un instant t ;

— La poussée d'Archimède : $\vec{F} = -\rho_\ell.V_s.\vec{g}$ où g est l'intensité de la pesanteur, V_s le volume de la bille et ρ_ℓ la masse volumique du liquide.

On prend : $g = 9,8m.s^{-2}$; $\dfrac{\lambda}{\rho_s.V_s} = 12,4S.I$; $\dfrac{\rho_\ell}{\rho_s} = 0,15$

ρ_s est la masse volumique de la matière constituant la bille .

1. Montrer que l'équation différentielle régissant la vitesse de G s'écrit : $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{\lambda}{\rho_s.V_s}.v = g\left(1 - \dfrac{\rho_\ell}{\rho_s}\right)$
2. Déterminer la valeur a_0 de l'accélération de G à l'instant $t_0 = 0$.
3. Trouver la valeur v_ℓ de la vitesse limite du mouvement de G.
4. Soient v_1 la valeur de la vitesse de G à l'instant $t_1 = t_0 + \Delta t$ et v_2 sa valeur à l'instant $t_2 = t_1 + \Delta t$ avec Δt le pas de calcul. En utilisant la méthode d'Euler, montrer que : $\dfrac{v_2}{v_1} = 2 - \dfrac{\Delta t}{\tau}$ où τ représente le temps caractéristique du mouvement : $\tau = \dfrac{\rho_s.V_s}{\lambda}$. Calculer v_1 et v_2. On prend $\Delta t = 8.10^{-3}s$.
5. La solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme : $v = v_\ell\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$; déterminer la valeur de la date t_ℓ à laquelle la vitesse de G atteint 99% de sa valeur limite.
6. Trouver la distance d parcourue par la bille pendant le régime transitoire, sachant que la hauteur H du liquide dans l'éprouvette est H = 79,6cm et que la durée du mouvement de la bille dans le liquide à partir de G_0 jusqu'au fond de l'éprouvette est $\Delta t_f = 1,14s$. (on considère que le régime permanent est atteint à partir de t et on néglige le rayon de la bille devant H).

Exercice 7 : Etude de la chute de deux boules dans l'air

Galilée, homme de sciences italien, s'intéressa à l'étude de la chute de divers corps. Selon la légende, il aurait effectué cette étude en lâchant ces corps du sommet de la tour de Pise.
Pour vérifier certains résultats avancés par Galilée, on se propose d'étudier dans cette partie la chute dans l'air de deux boules ayant le même rayon et des masses volumiques différentes.
L'étude du mouvement de chaque boule s'effectue dans un repère $R(O,\vec{k})$ associé à un référentiel terrestre supposé galiléen. On repère, à chaque instant, la position du centre d'inertie de chacune des deux boules par la côte z sur l'axe vertical $(O,\vec{k})$ orienté vers le haut et dont l'origine est prise au niveau du sol (figure 1).
Chaque boule est soumise, durant sa chute, à son poids P et à la force de frottement fluide $\vec{f}$ (On néglige la poussée d'Archimède devant ces deux forces).
On admet que l'intensité de la force $\vec{f}$ s'écrit : $f = 0,22.\rho_{air}.\pi.R^2.v_z^2$ où air ρ_{air} est la masse volumique de l'air, R le rayon de la boule et v_z la valeur algébrique de la vitesse du centre d'inertie G de la boule à un instant t .

Données :

- Le volume d'une boule de rayon R est $V = \frac{4}{3}.\pi.r^3$,
- L'intensité de la pesanteur $g = 9,8 m.s^{-2}$,
- La masse volumique de l'air $\rho_{air} = 1,3 kg.m^{-3}$.

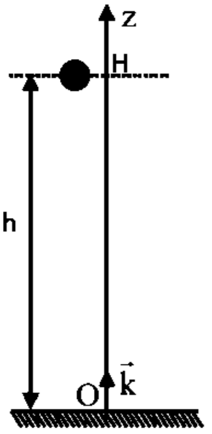
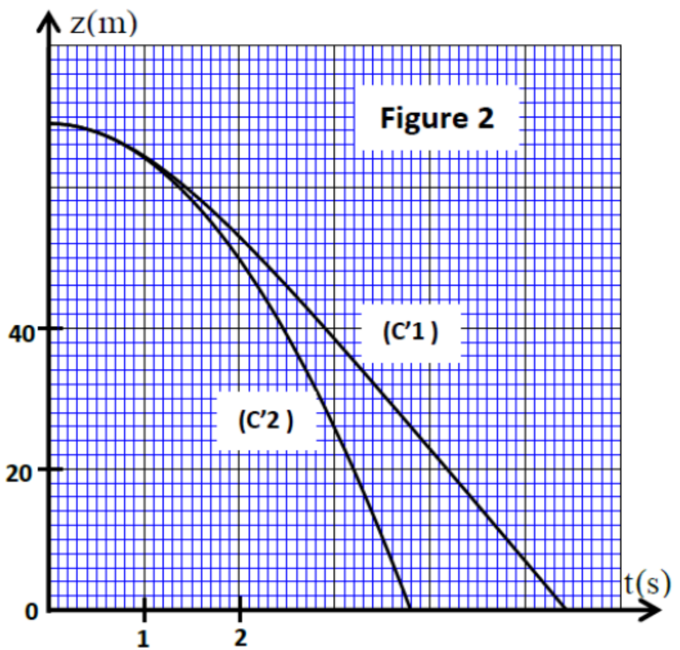
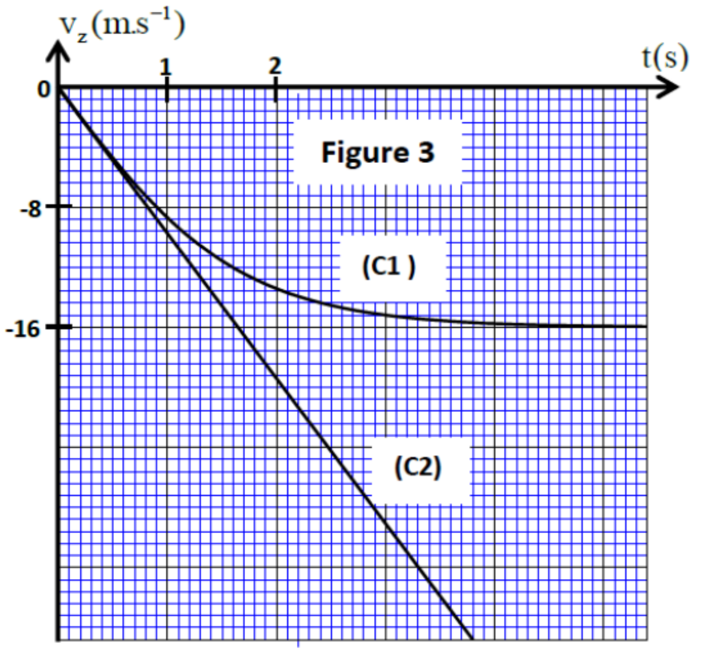


Figure 1

Cette étude est effectuée avec deux boules (a) et (b) homogènes ayant le même rayon R = 6cm et des masses volumiques respectives $\rho_1 = 1,4 \times 10^4 kg.m^{-3}$ et $\rho_2 = 194 kg.m^{-3}$.
Les deux boules sont lâchées au même instant t =0, sans vitesse initiale, du même plan horizontal auquel appartient le point H. Ce plan est situé à une hauteur h =69m du sol (figure 1).

1. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la vitesse z v du centre d'inertie d'une boule s'écrit : $\frac{dv_z}{dt} = -g. + 0,165.\frac{\rho_{air}}{R.\rho_i}v_z^2$, où ρ_i désigne la masse volumique de la boule (a) ou (b).
2. Déduire l'expression de la vitesse limite du mouvement d'une boule.
3. Les courbes obtenues sur les figures 2 et 3 représentent l'évolution de la côte z(t) et de la vitesse $v_z(t)$ du centre d'inertie G de chacune des deux boules, au cours de la chute.





3.1. Montrer, à l'aide de l'expression de la vitesse limite, que la courbe (C_1) correspond aux variations de la vitesse de la boule (b).

3.2. Expliquer pourquoi la courbe (C_2') correspond aux variations de la côte de la boule (a).

4. Déterminer, à l'aide de la courbe (C2) , la nature du mouvement de la boule (a) et écrire son équation horaire z(t) .
5. Déterminer la différence d'altitude d entre les centres d'inertie des deux boules à l'instant où la première boule touche le sol (On néglige les dimensions des deux boules).
6. Sachant que la valeur algébrique de la vitesse de la boule (b) à l'instant de date t_n est $v_{zn} = -11,47 m.s^{-1}$, trouver, en utilisant la méthode d'Euler, la valeur de l'accélération a_{zn} du mouvement à l'instant de date t_n et la vitesse $v_{z(n+1)}$ à l'instant de date t_{n+1}. On prend le pas du calcul $\Delta t = 125 ms$.

Exercice 8 : Etude du mvt d'un corps solide dans l'air et dans un liquide

On trouve dans les piscines des plongeoirs à partir desquels chutent les baigneurs pour plonger dans l'eau.
Dans cette partie de l'exercice, on étudiera le mouvement d'un baigneur dans l'air et dans l'eau.
On modélise le baigneur par un corps solide (S) de masse m et de centre d'inertie G.
On étudie le mouvement du centre G dans un repère $R(O, \vec{k})$ lié à un référentiel terrestre supposé galiléen(figure 1). Données : m=80kg ; intensité de la pesanteur : $g = 10 m.s^{-2}$. On prend $\sqrt{2} = 1,4$.

1. **Etude du mouvement du centre G dans l'air**
A l'instant de date t_0, pris comme origine des dates ($t_0 = 0$), le baigneur se laisse chuter sans vitesse initiale d'un plongeoir. On considère qu'il est en chute libre durant son mouvement dans l'air. A la date t_0 le centre d'inertie G coïncide avec l'origine O du repère $R(O, \vec{k})$ ($z_G = 0$) et est situé à une hauteur h =10m au dessus de la surface de l'eau(figure 1).

1.1. Etablir l'équation différentielle régissant la vitesse v_z du centre d'inertie G.

1.2. Déterminer le temps de chute t_c de G dans l'air puis en déduire sa vitesse v_e d'entrée dans l'eau.

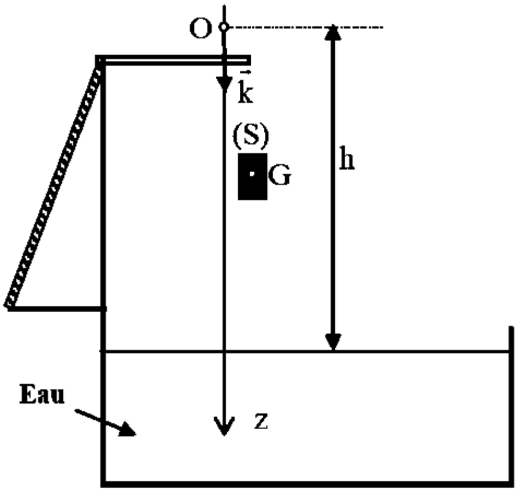


Figure 1

2. **Etude du mouvement vertical du centre d'inertie G dans l'eau**
Le baigneur arrive avec la vitesse e v , de direction verticale, à l'entrée dans l'eau. Lorsqu'il est dans l'eau, il suit une trajectoire verticale où il est soumis à l'action de :

— Son poids $\vec{P}$,

— La force de frottement fluide : $\vec{f} = -\lambda.\vec{v}$ où λ est le coefficient de frottement fluide($\lambda = 250 kg.s^{-1}$) et v le vecteur vitesse de G à un instant t,

— La poussée d'Archimède : $\vec{F} = -\dfrac{m}{d}.\vec{g}$ où g est l'intensité de la pesanteur et d=0,9 la densité du baigneur.

On considère l'instant d'entrée de (S) dans l'eau comme nouvelle origine des dates(t =0).

2.1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v_z de G. On posera $\tau = \dfrac{m}{\lambda}$.

2.2. Déduire l'expression de la vitesse limite $v_{\ell z}$ en fonction de τ, g , et d .Calculer sa valeur.

2.3. La solution de l'équation différentielle est $v_z(t) = A + Be^{-\frac{t}{\tau}}$, où A et B sont des constantes . Exprimer A en fonction de z v et B en fonction de z v et e v .

2.4. Déterminer l'instant t_r auquel le mouvement du baigneur change de sens. (Le baigneur n'atteint pas le fond de la piscine).

Exercice 9 : Etude de la chute d'une bille

Dans le champ de pesanteur, on abandonne à partir d'un point O, sans vitesse initiale à l'insta, t= 0, une petite bille (S) de masse m, (figure 1).

La bille est soumise à deux forces :

— Son poids $\vec{P}$

— La résistance de l'air que l'on modélise par la force $\vec{R} = -\lambda.\vec{v}$, avec λ une constante positive et $\vec{v} = v.\vec{k}$ le vecteur vitesse de la bille.

On étudie le mouvement de la bille dans un repère $(O, \vec{k})$ lié à un référentiel terrestre supposé galiléen.

Données : m = 100g, $g = 10m.s^{-2}$(intensité de la pesanteur).

Le graphe de la figure 2 représente l'évolution, au cours du temps, de la vitesse de la bille.

1. Montrer que l'équation différentielle du mouvement de la bille vérifiée par la vitesse v s'écrit : $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{\lambda}{m}.v = g$.
2. Trouver la valeur de λ.
3. comparer l'intensité de la résistance $\vec{R}$ à celle du poids $\vec{P}$ pendant la phase du régime transitoireet pendant la phase du régime permanent.
4. On lance maintenat la bille du point O à l'instant t =0, verticalement vers le bas, avec une vitesse $\vec{V_0} = V_0.\vec{k}$ telle que $V_0 > v_L$ (v_L étant la vitesse limite du mouvement de la bille).

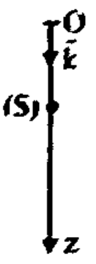


Figure1

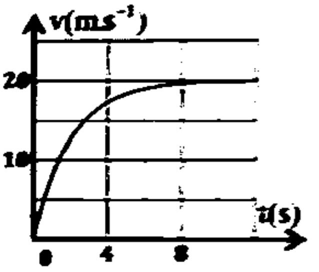


Figure 2

La solution de l'équation différentielle s'écrit : $v(t) = A + B.e^{-\frac{t}{\tau}}$ où A et B sont deux constantes et τ le temps caractéristique du mouvement.

Tracer l'allure de la courbe représentant l'évolution de vitesse v(t) de la bille au cours de son mouvement.

Exercice 10 : Etude du mouvement d'un skieur

On étudie dans cette partie le mouvement d'un skieur sur un plan incliné dans deux cas :
- **Premier cas :** la force de frottement fluide exercée par l'air est négligeable,
- **Deuxième cas :** La force de frottement fluide exercée par l'air n'est pas négligeable.

Un skieur glisse sur une piste plane inclinée d'un angle $\alpha = 45$ par rapport au plan horizontal, selon la ligne de plus grande pente (Figure 1).
On modélise le skieur et ses accessoires par un système solide (S) de masse m=75kg et de centre d'inertie G.
On étudie le mouvement de G dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ lié à un référentiel terrestre supposé galiléen. A l'instant t =0 , le skieur part sans vitesse initiale. A cet instant, G coïncide avec l'origine O du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (Figure 1).
On prendra l'accélération de la pesanteur : $g = 10m.s^{-2}$ et on négligera la poussée d'Archimède.

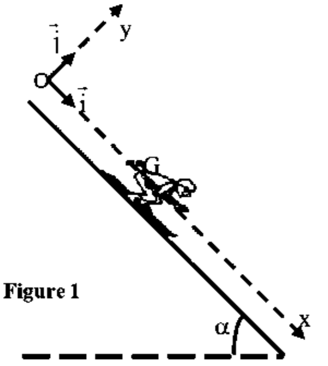


Figure 1

1. **Premier cas :Mouvement du skieur sans frottement fluide**
   Le contact entre le plan incliné et le système (S) se fait avec frottement solide. La piste exerce sur le skieur une force $\vec{R}$ ayant une composante tangentielle $\vec{T}$ et une composante normale $\vec{N}$. Lors du mouvement du skieur, les intensités de $\vec{T}$ et de $\vec{N}$ sont liées par la relation $\vec{T} = k.\vec{N}$ avec k une constante.

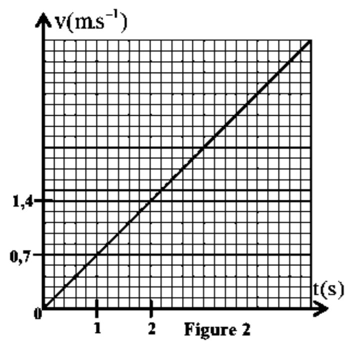


Figure 2

1.1. En appliquant la deuxième loi de Newton, exprimer l'accélération du mouvement de G en fonction de g , α et k.

1.2. La courbe de la figure 2, représente la variation de la vitesse v du centre d'inertie G en fonction du temps.
Déterminer graphiquement l'accélération du mouvement.

1.3. Vérifier que $k \simeq 0,9$.

2. **Deuxième cas :Mouvement du skieur avec frottement fluide**
   En plus des mêmes forces exercées sur (S) dans le premier cas, (S) est soumis à des frottements fluides dûs à l'air que l'on modélise par la force $\vec{F} = -\lambda.\vec{v}$, où v est la vitesse du centre d'inertie G à un instant t et λ une constante positive de valeur $\lambda = 5$ S.I.

2.1. En utilisant la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation différentielle du mouvement de G s'écrit : $\frac{dv}{dt} + A.v + B = 0$ avec $\vec{v} = v\vec{i}$ et A et B deux constantes.

2.2. Déterminer la valeur de la vitesse limite v du mouvement.

2.3. En s'aidant du tableau ci-contre et en utilisant la méthode d'Euler, déterminer la vitesse v_2 du mouvement de (S).(le pas de calcul est $\Delta t = t_2 - t_1$).

t(s)	$v(m.s^{-1})$	$a_G(m.s^{-2})$
$t_1 = 14$	$v_1 = 6,3$	a_1
$t_2 = 15,4$	v_2	a_2

Exercice 11 : Mvt de chute verticale d'une bille dans un liq visqueux

Dans cette partie on étudie le mouvement du centre d'inertie G d'une bille sphérique homogène, de masse m et de rayon r, dans une huile contenue dans un tube.
On étudie le mouvement du centre d'inertie G dans un repère $(O, \vec{k})$ lié à un référentiel terrestre considéré comme galiléen (figure 1).
On repère la position de G à tout instant par la cote z de l'axe vertical $(O, \vec{k})$ dirigé vers le bas. L'origine de l'axe est confondue avec le point O_1.
A l'instant de date t_0, prise comme origine des dates $(t_0 = 0)$, on lâche la bille sans vitesse initiale du point O_1 (figure1).
Au cours de sa chute dans l'huile, la bille est soumise, en plus de son poids, à :

— La force de frottement fluide : $\vec{f} = -6.\pi.\eta.r.v.\vec{k}$ où η est la viscosité de l'huile, r le rayon de la bille et v la vitesse de G à un instant t ;

— La poussée d'Archimède : $\vec{F} = -\rho_\ell.V_S.\vec{g}$ où g est l'intensité de la pesanteur, V_S le volume de la bille et ρ_ℓ la masse volumique de l'huile.

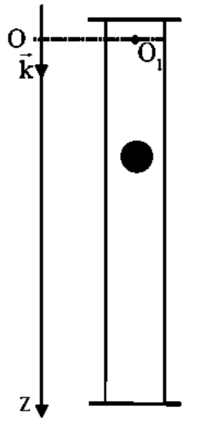


Figure 1

Données :

— L'intensité de la pesanteur $g = 9,81 m.s^{-2}$,

— La masse volumique de l'huile : $\rho_\ell = 3860 kg.m^{-3}$;

— Le rayon de la bille : r =6,3mm ;

— La masse volumique de la matière constituant la bille : $\rho_S = 4490 kg.m^{-3}$.

On rappelle que le volume d'une sphère de rayon r est $V = \frac{4}{3}.\pi.r^3$.

1. En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation différentielle du mouvement de G vérifiée par la vitesse v s'écrit : $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}.v = g.\left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_S}\right)$ avec $\vec{v} = v.\vec{k}$ et τ le temps caractéristique du mouvement exprimé en fonction des paramètres de l'exercice.

2. La vitesse limite v_{lim} de chute de la bille est déterminée par une étude expérimentale qui consiste à filmer le mouvement de la bille dans un tube en verre vertical de hauteur h =90cm et rempli de l'huile utilisée.

   L'exploitation des résultats de l'enregistrement a donné $v_{lim} \approx 1,0 m.s^{-1}$.
   Exprimer la viscosité η en fonction de v_{lim} et des données de l'exercice. Calculer sa valeur.

3. Calculer la valeur de la cote $z(t) = v_{lim}\left(t + \tau.\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right)\right)$ pour $t = 7.\tau$. Expliquer pourquoi ce tube de hauteur h =90cm est convenable pour la mesure expérimentale de v_{lim}.

Exercice 12 : Mouvement de la luge sur un plan incliné.

On étudie le mouvement d'une luge modélisée par un solide (S) de centre d'inertie G et de masse m dans deux phases de son parcours :

Données :

— Masse de la luge : m = 20 kg ;

— Intensité de la pesanteur : $g = 10 m.s^{-2}$.

1. Mouvement de la luge sur un plan incliné.

On étudie le mouvement du centre d'inertie G dans le repère $(A;\vec{i};\vec{j})$ lié à un référentiel terrestre considéré galiléen(figure 1).

Après la phase de poussée vers le bas, le solide (S) atteint une vitesse $V_A = 5m.s^{-1}$ au point A et glisse sans frottement le long de la piste rectiligne AB faisant un angle α avec l'horizontale. La pente est inclinée à 20% $(sin\alpha = 0,20)$.

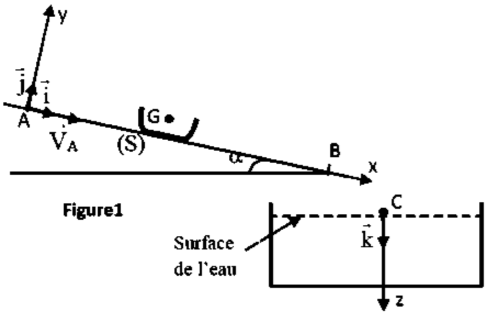


Figure1

1.1. En appliquant la deuxième loi de Newton déterminer la valeur de l'accélération a_{th} du centre d'inertie G de (S).

1.2. L'origine des dates(t =0) est choisie à l'instant du passage par le point A. Trouver la distance parcourue, à partir du point A, lorsque la luge atteint la vitesse $V_1 = 25m.s^{-1}$.

1.3. On filme le mouvement de la luge, puis on exploite la vidéo avec un logiciel adapté. Ceci a permis de tracer la courbe représentant les variations de la vitesse de G en fonction du temps : exp V = f(t) (figure 2).

1.3.1. Déterminer graphiquement la valeur expérimentale a_{exp} de l'accélération du centre d'inertie G.

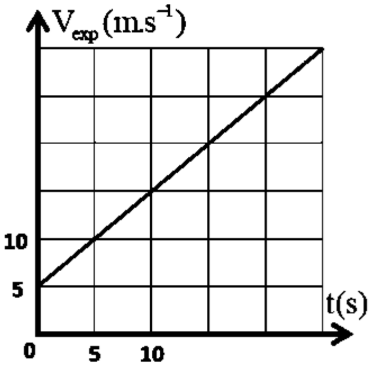


Figure 2

1.3.2. On interprète la différence entre a_{th} et a_{exp} par l'existence de frottements. On rappelle que lorsque le contact entre le plan incliné et la luge se fait avec frottement solide, la piste exerce sur (S) une force R ayant une composante tangentielle R_T et une composante normale R_N.

Lors du mouvement de (S), les intensités de R_T et de R_T sont liées par la relation $R_T = \mu.R_N$, avec μ une constante appelée coefficient de frottement qui dépend des matériaux en contact et de leur état de surface.

Exprimer le coefficient μ en fonction de a_{th} , a_{exp} ,g et α . Calculer sa valeur.

2. Deuxième phase : Chute verticale de (S) dans l'eau.

La luge quitte la piste en B et tombe dans un lac au point C(figure 1).

Après s'être immobilisée quelques instants, la luge se met à couler verticalement sans vitesse initiale depuis le point C.

On étudie le mouvement du centre d'inertie G dans un repère $(C,\vec{k})$ lié à un référentiel terrestre considéré comme galiléen (figure 1).

On repère la position de G à tout instant par la cote z de l'axe vertical $(C,\vec{k})$ dirigé vers le bas. L'origine des dates $(t_0 = 0)$ est prise au point C.

Au cours de sa chute dans l'eau, la luge est soumise, en plus de son poids, à la force de frottement fluide : $\vec{f} = -k.\vec{v}$ où k = 200S.I. et v la vitesse de G à un instant t.

On note que la poussée d'Archimède est négligée.

2.1. Montrer que l'équation différentielle du mouvement de G vérifiée par la vitesse v s'écrit : $\frac{dv_z}{dt} + \frac{1}{\tau}.v_z = \frac{v_\ell}{\tau}$. avec $\vec{v} = v.\vec{k}$. On donnera τ et v_ℓ en fonction des paramètres de l'exercice.

2.2. La solution de l'équation différentielle du mouvement de G s'écrit : $v_z(t) = v_\ell\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$. Trouver, à l'instant t = 41τ, la profondeur atteinte par la luge depuis le point C , origine de la cote z.

Exercice 13 : Modélisation de la force de frottements visqueux

Le but de cet exercice est de modéliser la force de frottements visqueux exercée par le glycérol sur un solide, à partir de l'étude de chute verticale d'une bille métallique de masse m et de rayon r dans le glycérol.

On donne :

— Rayon de la bille : r = 1 cm ; Volume de la bille : $V = \frac{4}{3}.\pi.r^3$

— Masses volumiques :

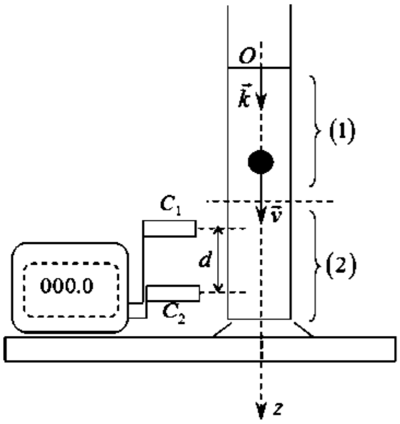
  — Métal constituant la bille : $\rho_1 = 2,7 \times 10^3 kg.m^{-3}$;

  — Glycérol : $\rho_2 = 1,26 \times 10^3 kg.m^{-3}$; ;

— Accélération de la pesanteur : $g = 9,81 m.s^{-2}$.

— On rappelle que l'expression de la poussée d'Archimède exercée par le glycérol sur la bille est : $F = \rho_2.V.g$

— On modélise la force de frottements visqueux exercée sur la bille au cour de sa chute dans le glycérol par : $\vec{f} = -9.\pi.r.v^n\vec{k}$ où n est un entier naturel et v la vitesse du centre d'inertie de la bille.



On lâche la bille sans vitesse initiale, à partir du point O, origine d'un axe vertical descendant $(O, \vec{k})$, à l'instant t = 0. Son mouvement dans le glycérol se fait suivant deux phases :

- **Phase 1 :** Phase du régime initial entre deux instant t_0 et t_1 où la valeur de la vitesse croit.
- **Phase 2 :** Phase du régime permanent à partir de l'instant t_1 auquel la vitesse atteint une valeur limite v_L.

Le dispositif constitué d'un chronomètre et deux cellules C_1 et C_2 permet de mesurer la durée Δt nécessaire à la bille pour parcourir la distance d au cour de la 2ème phase. (figure ci-contre)

1. Déterminer la valeur de la vitesse limite v_L sachant que $\Delta t = 956$ ms.
2. Par application de la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation différentielle réalisée par la vitesse v du centre d'inertie de la bille au cour du mouvement dans le liquide s'écrit sous la forme : $\frac{dv}{dt} + A.v^n = B$.
   Avec $A = \frac{27}{4.\rho_1.r^2}$ et $B = g\left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}\right)$
3. Trouver à partir de l'équation différentielle v_L^n en fonction de ρ_1, ρ_2, r et g.
4. En déduire la valeur de n.