# CONDIZIONE SUFFICIENTE, NECESSARIA E NECESSARIA E SUFFICIENTE

## INTRODUZIONE

Nella logica delle proposizioni composte, esistono tre diverse relazioni tra le condizioni in esse presenti che si trovano introdotte di norma nel modo seguente:

- condizione sufficiente: introdotta da **"Se",** per esempio: "*Se il vaso cade, allora si rompe*";
- condizione necessaria: introdotta da **"Solamente"**, per esempio: "*Solamente se il vaso cade, si rompe*";
- condizione necessaria e sufficiente: introdotta da **"Se e solo se"**, per esempio "*Se e solo se il vaso cade, si rompe*".

Si tratta di tre relazioni diverse che godono pertanto di proprietà diverse.

## FORMALIZZAZIONE DELLE TRE RELAZIONI

Di seguito illustreremo gli schemi delle tre relazioni, premettendo che questi sono validi o meno a seconda che parliamo della condizione sufficiente, ("Se"), della condizione necessaria ("Solamente"), ovvero della condizione necessaria e sufficiente: ("Se e solo se"):

**A.1** $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

**A.2** $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$

**A.3** $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

**A.4** $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$

il simbolo ¬ sta per NON (negazione).

Una proposizione del tipo $A \rightarrow B$ ("Se A, allora B" oppure "A implica B") indica che al verificarsi della condizione A si verificherà la condizione B. Inoltre, A prende il nome di **antecedente** e B di **conseguente**. Infine, l'antecedente è detto condizione sufficiente del conseguente.

Questi primi quattro schemi sono, in realtà, varianti di una stessa formula di base, e cioè la seguente: nell'implicazione derivata troviamo, all'antecedente, il conseguente dell'implicazione di partenza, negato. Analogamente, al conseguente dell'implicazione derivata troveremo l'antecedente dell'implicazione di partenza, negato.

Si vede facilmente che da questa formula derivano tutti e quattro gli schemi di cui sopra. La numerazione (A.1, A.2 ecc.) sta appunto a indicare la riduzione dei quattro schemi a uno solo. Questa formula è verificata per la relazione di condizione sufficiente e definisce l'unico modo corretto di invertire un'implicazione.

Per esempio, data l'implicazione di partenza "***Se il vaso cade, si rompe***" $(A \rightarrow B)$ dal fatto che il vaso non è rotto $(\neg B)$ posso concludere in modo certo che non è caduto $(\neg B)$: se fosse caduto, infatti, si sarebbe certamente rotto (lo schema di riferimento è dunque lo A.1).

A questo schema generale aggiungiamo ora i due seguenti:

**B** $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

**C** $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$

Questi due schemi, invece, nel caso dell'implicazione unidirezionale, e cioè della relazione di condizione sufficiente, non sono validi.

Con riferimento allo schema B: partendo dall'implicazione "*se il vaso cade, si rompe*", non consegue che se il vaso è rotto allora è certamente caduto (vale a dire si possono dare cause di rottura anche diverse dalla caduta).

Ovviamente, così come i primi 4 schemi (A) sono varianti di uno stesso schema di base, anche nel caso dello schema B occorrerebbe per completezza articolare i sotto-casi. Avremmo quindi: B.2: $(A \to \neg B) \to (\neg B \to A)$ eccetera e lo stesso vale per lo schema C.

Vediamo dunque, in dettaglio, gli schemi validi e non validi secondo le tre condizioni:

### "Se" (condizione sufficiente)

Come abbiamo visto è valido lo schema generale A (quale dei quattro si applichi dipende ovviamente dal caso, se antecedente e conseguente nell'implicazione di partenza siano affermativi o negativi) ma non gli schemi B e C.

"***Se il vaso cade, allora si rompe***". In altri termini è sufficiente che il vaso cada per rompersi. Ovvero se il vaso cade allora certamente si rompe, quindi se A allora B, ma la relazione non è reversibile (quindi B e C non valgono). In compenso: se il vaso non è rotto sono certo che non è caduto, quindi vale lo schema A.

### "Solamente" (condizione necessaria)

"***Solamente se il vaso cade, si rompe***". In altri termini condizione necessaria affinché il vaso si rompa è che deve cadere. La prima differenza dalla condizione sufficiente è che da A, B può seguire o non seguire. Il vaso si rompe solamente se cade (cioè non si danno cause di rottura diverse dalla caduta), ma se cade, non è detto che si rompa. Invece, se è rotto è certamente caduto perché non si danno altre condizioni, quindi la relazione è reversibile. Valgono quindi gli schemi B e C, ma non gli schemi sotto lo schema generale A: il vaso può non essere rotto e tuttavia non per questo è impossibile che sia caduto, non c'è contraddizione logica in questo. In una proposizione di questo tipo l'antecedente è detto condizione necessaria del conseguente.

### "Se e solo se" (condizione necessaria e sufficiente)

***"Se e solo se il vaso cade, si rompe***". In altri termini se il vaso cade certamente si rompe e viceversa se si rompe non può che essere caduto. È facile vedere, unendo le considerazioni svolte sulla condizione sufficiente e su quella necessaria, che in questo caso sono validi tutti gli schemi! La condizione necessaria e sufficiente è espressa dall'implicazione bidirezionale, per rappresentare la quale si usa il simbolo $\leftrightarrow$, per cui si ha $A \leftrightarrow B$.

Riepilogando:

- **Condizione sufficiente**: è introdotta da "Se", per esempio: "Se il vaso cade, allora si rompe" – Sono validi gli schemi A, ma non B e C.
- **Condizione necessaria**: è introdotta da "Solamente", per esempio: "Solamente se il vaso cade, si rompe" – Sono validi solo gli schemi B e C, ma non A.
- **Condizione necessaria e sufficiente**: è introdotta da "Se e solo se", per esempio "Se e solo se il vaso cade, si rompe" – Sono validi tutti gli schemi A, B e C.

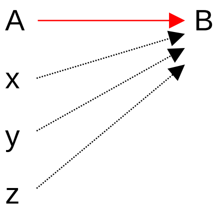
| Condizione | Introdotta da | Schemi validi |
|---|---|---|
| Sufficiente | "Se"<br>"È sufficiente" | **A.1** $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$<br>**A.2** $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$<br>**A.3** $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$<br>**A.4** $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$ |
| Necessaria | "Solamente"<br>"Solo se"<br>"Soltanto"<br>"Affinché"<br>"È necessario" | **B.1** $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$<br>**B.2** $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$<br>**B.3** $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$<br>**B.4** $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$<br><br>**C.1** $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$<br>**C.2** $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$<br>**C.3** $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (A \rightarrow B)$<br>**C.4** $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$ |
| Necessaria e sufficiente | "Se e solo se" | **A.1** $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$<br>**A.2** $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$<br>**A.3** $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$<br>**A.4** $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$<br><br>**B.1** $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$<br>**B.2** $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$<br>**B.3** $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$<br>**B.4** $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$<br><br>**C.1** $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$<br>**C.2** $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$<br>**C.3** $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (A \rightarrow B)$<br>**C.4** $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$ |

## RAPPORTI TRA A E B

### Condizione sufficiente (n:1)

Nella condizione sufficiente se si verifica A allora si verifica B. Tuttavia se si verifica B non è detto sia dovuto al verificarsi di A.

Il rapporto è quindi n:1 cioè ho n possibili antecedenti (x; y; z; …) che possono portare a B, ma se l’antecedente è A allora sicuramente il conseguente è B.




*“Se piove la strada è bagnata”.*

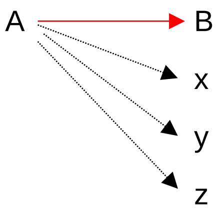
La strada può essere bagnata anche se si rompe una bottiglia d’acqua, oppure se la lavano o ancora se dei bambini giocano a farsi i gavettoni, ma di sicuro se piove.

### Condizione necessaria (1:n)

Nella condizione necessaria solamente se si verifica A, si verifica B. Tuttavia non è certo che al verificarsi di A si verifichi B ovvero potrebbero esserci diversi conseguenti (conseguenze diverse).

Il rapporto è quindi 1:n cioè l’antecedente A può portare a n diversi conseguenti (x; y; z; …), ma se il conseguente è B allora sicuramente l’antecedente è A.

C’è da aggiungere infine che se B non si verifica, allora non si verifica neanche A.




*“Solo se torno presto a casa, faccio le pulizie”.*

Se torno presto a casa potrei mettermi a guardare la TV oppure andare in palestra o ancora leggere un libro, ma di sicuro se faccio le pulizie è perché sono tornato presto.
Inoltre, se non faccio le pulizie è perché non sono tornato presto a casa.

**Condizione necessaria e sufficiente (1:1)**

Nella condizione necessaria e sufficiente, se e solo se si verifica A, si verifica B. Quindi al verificarsi di A si verifica B e non vi è alcun altro modo perché B si verifichi. Inoltre se B si verifica non può che essere dovuto al verificarsi di A.

Il rapporto è quindi 1:1 cioè se l'antecedente è A il conseguente non può che essere B e viceversa se il conseguente è B allora sicuramente l'antecedente è A.

$A \longleftrightarrow B$

*"Roberto avrà come regalo di compleanno lo smartphone nuovo se e solo se verrà promosso".*

Solo se verrà promosso (ed in nessun altro caso) Roberto avrà come regalo lo smartphone nuovo.

Se Roberto avrà come regalo lo smartphone nuovo allora vorrà dire che è stato promosso, perché in nessun altro caso lo avrebbe ricevuto.