2BSM. CHUTE D'UNE BILLE DANS LA GLYCÉRINE

La glycérine connue aussi sous le nom du glycérol se présente sous la forme d'un liquide transparent, visqueux, incolore et non toxique.
On se propose dans cet exercice de déterminer dans une première partie, la valeur expérimentale de la viscosité de ce liquide. La deuxième partie, théorique, utilise une méthode numérique pour simuler le mouvement de chute d'une bille dans ce liquide.

1. Mesure de la viscosité η de la glycérine

La viscosité désigne la capacité d'un fluide à s'écouler. Elle dépend fortement de la température.

Pour mesurer la viscosité de la glycérine, on utilise un dispositif appelé viscosimètre de HOEPLER (ou viscosimètre à chute de bille).

Il se compose d'un long tube de verre vertical, rempli du liquide étudié, dans lequel on laisse tomber une bille sphérique en acier de diamètre calibré.

La durée de chute $\Delta t'$ correspondant à une distance de chute h connue est mesurée à l'aide de deux capteurs reliés à un chronomètre électronique. Les deux capteurs sont repérés par les positions R_1 et R_2 comme le montre le schéma de la figure 1 ci-contre.

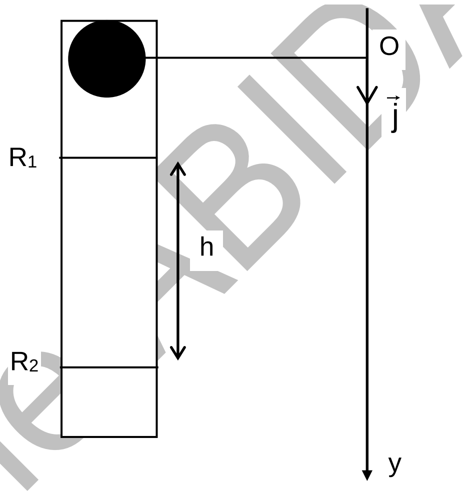

Figure 1

Données :
Rayon de la bille : r = 5,00 mm
Masse volumique de la bille : $\rho = 7{,}80.10^3$ kg.m^{-3}
Masse volumique de la glycérine : $\rho_0 = 1.26.10^3$ kg.m^{-3}
Intensité de la pesanteur : g = 9,81 m.s^{-2}
Volume d'une sphère : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

On étudie le mouvement de la bille dans le référentiel terrestre (considéré comme galiléen) muni d'un repère $(O, \vec{j})$. O est l'origine du repère. Son vecteur unitaire $\vec{j}$ est vertical et orienté vers le bas. La bille totalement immergée dans le liquide, est abandonnée du point O sans vitesse initiale.

1.1. Représenter sur un schéma, sans souci d'échelle, les forces appliquées à la bille en mouvement dans le liquide : son poids $\vec{P}$, la poussée d'Archimède $\vec{P}_A$ et la force de frottement fluide $\vec{f}$.

1.2. Exprimer littéralement la valeur *P* du poids de la bille en fonction de ρ, *V* et *g.*

1.3. Exprimer la valeur P_A de la poussée d'Archimède en fonction de ρ_o, *V* et *g.*

1.4. Lors de sa chute, la bille atteint rapidement sa vitesse limite v_{lim} avant son passage au niveau du repère R_1.

1.4.1. Quel est le mouvement de la bille entre les deux repères R_1 et R_2? Justifiez votre réponse.

1.4.2. Quelle est alors la relation vectorielle liant les forces appliquées à la bille ? Justifiez votre réponse.

1.5. Dans le cas du fluide étudié, la force de frottement est proportionnelle à la vitesse de chute de la bille :

$$\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v} \quad \text{où } \eta \text{ est la viscosité de la glycérine.}$$

1.5.1. À la suite d'une analyse dimensionnelle, donner l'unité de η.

1.5.2. En projetant la relation vectorielle établie dans la question 1.4.2 suivant le repère (O, $\vec{j}$), montrer que la viscosité η du fluide étudié s'exprime par la relation :

$$\eta = \frac{2r^2g(\rho - \rho_0)}{9v_{lim}}$$

1.6. On mesure la durée de chute de la bille en mouvement rectiligne uniforme entre les repères R_1 et R_2 distants d'une hauteur h = 40,0 cm. On obtient $\Delta t'$ = 1,66 s à la température θ = 20°C.

1.6.1. Calculer la vitesse limite v_{lim} de la bille.

1.6.2. En déduire la valeur expérimentale de la viscosité n de la glycérine à la température d'étude.

1.6.3. La valeur théorique de la viscosité de la glycérine à cette température est $\eta_{thé}$= 1,49 SI.

En effectuant un calcul d'écart relatif, comparer la valeur trouvée expérimentalement de la viscosité η de la glycérine à sa valeur théorique.

2. Étude théorique du mouvement de la bille

À l'instant choisi comme origine des dates, la bille est abandonnée sans vitesse initiale au point O.

2.1. En utilisant la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation différentielle liant la vitesse de la bille et sa dérivée par rapport au temps est de la forme :

$$\frac{dv}{dt} + Av = B \text{ avec } A = 34{,}4\ s^{-1} \text{ et } B = 8{,}23\ m.s^{-2}.$$

Identifiez les expressions des termes A et B dans cette équation.

2.2. En déduire la valeur de la vitesse limite atteinte par la bille. Est-elle en accord avec la valeur trouvée expérimentalement dans la question 1.6.1.?

2.3. À quelle grandeur physique le rapport 1/A correspond-il ? Même question pour le paramètre B.

2.4. La courbe d'évolution de la vitesse au cours du temps est représentée sur la **FIGURE 2 DE L'ANNEXE**. Elle a été obtenue par résolution de l'équation différentielle précédente par la méthode numérique itérative d'Euler. Cette méthode permet de calculer, pas à pas, de façon approchée, les valeurs de la vitesse instantanée v_i et de l'accélération a_i à l'instant t_i. Pour ce calcul, on a utilisé les relations suivantes :

$$v(t_i) = v(t_{i-1}) + a(t_{i-1}).\Delta t \quad \text{où } \Delta t \text{ est le pas d'itération du calcul.}$$

$$a(t_i) = B - A.v(t_i)$$

Un extrait de la feuille de calcul est donné par le tableau 1 ci-dessous :

t_i(s)	v(m.s^{-1})	a (m.s^{-2})
0,020	0127	3,86
0,025	0,146	3,20
0,030		2,65
0,035	0,175	
0,040	0,186	1,82

Tableau 1

2.4.1. Quel est le pas Δt utilisé pour les calculs ?

2.4.2. En utilisant la méthode d'Euler, calculer la vitesse v_6 à la date t = 0,030 s et l'accélération a_7 à la date t = 0,035 s.

2.5. La courbe v = f(t) représentée sur la **FIGURE 2 DE L'ANNEXE**, permet de mettre en évidence deux régimes distincts pour le mouvement de la bille. Ces deux régimes sont séparés par le trait en pointillé vertical dessiné sur le graphe.

2.5.1. Compléter les cases de la **FIGURE 2 DE L'ANNEXE** en identifiant ces deux régimes.

2.5.2. Déterminer graphiquement le temps caractéristique τ en prenant soin d'expliquer votre méthode.

ANNNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Questions 2.5.1 et 2.5.2

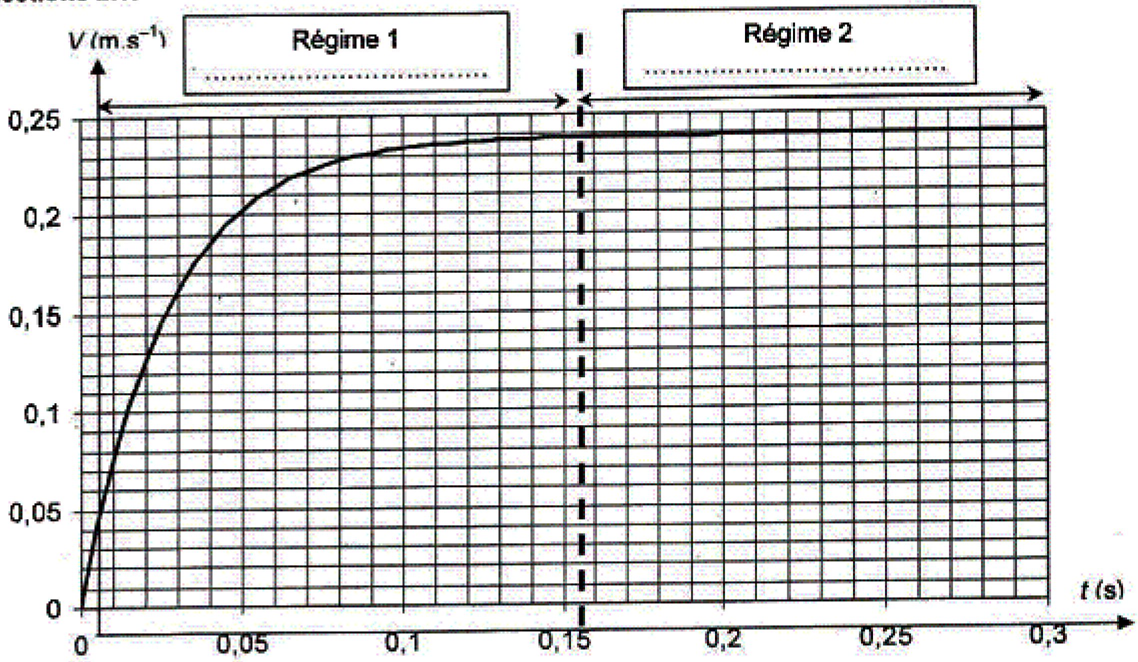

Figure 2