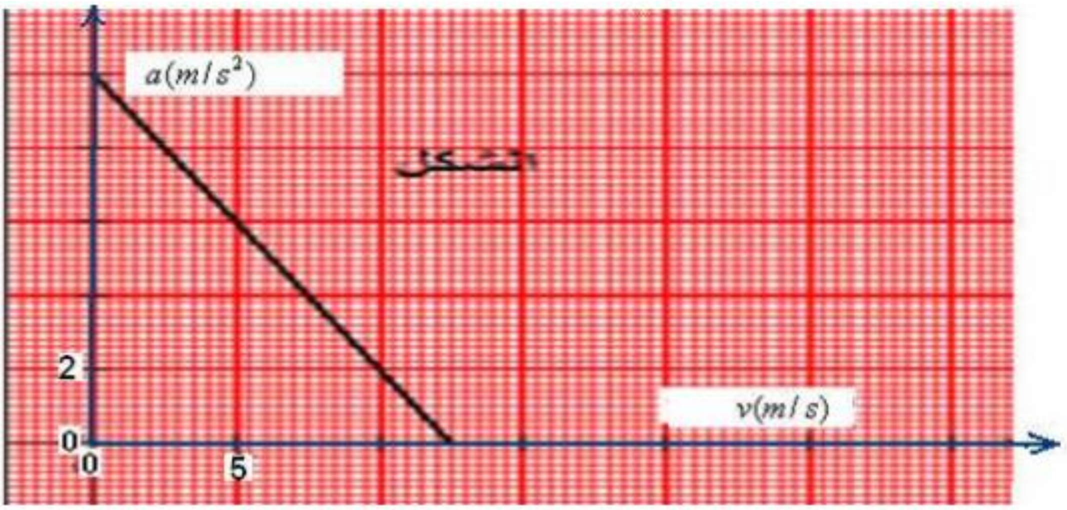
Série d'exercices corrigés :chute verticale d'un solide dans un fluide pour 2ème année bac:

1) Exercice nº 1:

Un parachutiste avec ses accessoires de masse m=100kg est en chute verticale à partir d'un point O par rapport à un repère terrestre sans vitesse initiale. Il est soumis durant sa chute à la résistance de l'air d'intensité f=k.v .
La courbe de la figure suivante donne la variation de l'accélération du parachutiste en fonction de la vitesse v.



1) En appliquant la deuxième loi de Newton montrer que l'équation différentielle du mouvement du parachutiste s'écrit de la manière suivante : $\frac{dv}{dt} = A.v + B$ et déterminer l'expression de la constante A et celle de B.

2) Déterminer graphiquement :

a) La valeur de l'intensité de pesanteur dans le lieu de la chute.

b) La valeur de la vitesse limite du parachutiste : v_ℓ .

3) Le mouvement précédent se caractérise par l'expression : $\frac{k}{m}$. Quelle est son unité, déterminer sa valeur en exploitant la courbe précédente.

4) Calculer la valeur de la constante k.

5) Quel est le régime établit à l'instant t=12,5s?

2) Exercice nº 2:

Un corps solide de forme sphérique son diamètre d=3cm et sa masse m=13g tombe verticalement dans l'air à partir d'un point O qui se trouve à l'altitude h=1500m de la surface de la terre sans vitesse initiale.(g=9,8m/s^2 et $\rho_{air} = 1,3kg/m^3$)

Sachant que durant sa chute il est soumis aux actions suivantes : -son poids $\vec{P}$ - La poussée d'Archimède $\vec{F}_A$ - la force de frottement : $\vec{f}$ (son intensité f=k.v).

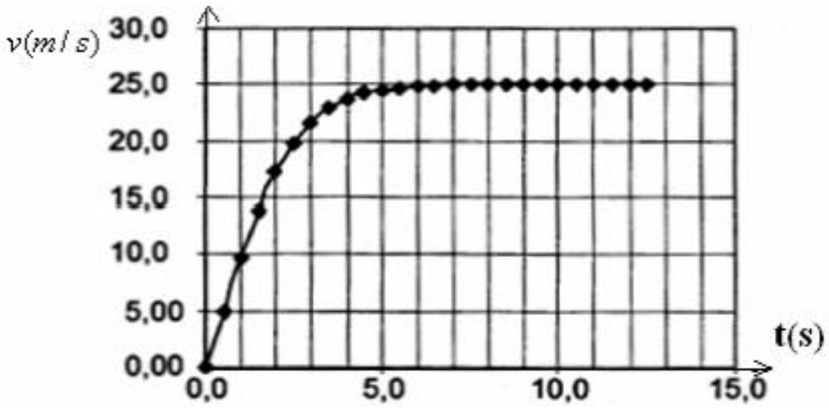
1) Montrer que la poussée d''Archimède est négligeable devant le poids du corps.

2) En négligeant la poussée d'Archimède :

2-1-Montrer que l'équation différentielle du mouvement du corps s'écrit de la manière suivante: $\frac{dv}{dt} = A - B.v^2$.

2-2- On donne la courbe représentant la variation de la vitesse en fonction du temps ainsi que le tableau qui donne quelques valeurs de la vitesse du corps et de son accélération en fonction du temps .

2-2- On donne la courbe représentant la variation de la vitesse en fonction du temps ainsi que le tableau qui donne quelques valeurs de la vitesse du corps et de son accélération en fonction du temps .



t (s)	v(m.s^{-1})	a (m.s^{-2})
0,00	0,00	9,80
0,50	4,90	9,43
1,00	9,61	8,36
1,50	13,8	6,83
2,00	17,2	a_4
2,50	v_5	3,69
3,00	21,6	2,49

En exploitant les résultats obtenues et en utilisant la méthode d'Euler pour laquelle le pas est: $\Delta t = 0,5s$:

2-2-1- Donner la valeur de l'accélération a_0 et celle de la vitesse limite du corps ainsi que la valeur de constante du temps caractéristique du mouvement.

2-2-2- Donner l'expression de l'accélération initiale a_0 et celle de la vitesse limite v_ℓ en fonction de A et B.

2-2-3- Déduire la valeur de A et de B.

2-3- En utilisant la méthode d'Euler calculer a_4 et v_5.

3) Exercice n°3:

Une goutte d'eau supposée sphérique de rayon R, tombant verticalement dans l'air sans vitesse initiale est soumise pendant son mouvement à l'action de la force de frottement $\vec{f}$ son sens est contraire de celui du vecteur vitesse $\vec{v}$, son intensité f=k.v .

On donne : - La masse volumique de l'eau $\rho_{eau} = 10^3 kg/m^3$.

- La masse volumique de l'air $\rho_{air} = 1,3 kg/m^3$

1) Montrer que la poussée d'Archmède $\vec{F}_A$ est négligeable devant le poids $\vec{P}$ de la goutte. On donne g=9,8m/s².

2) Déterminer l'équation différentielle du mouvement puis écrivez-la, sous la forme : $\frac{dv}{dt} + A.v = B$.

3) Quelle est la condition nécessaire pour attendre la vitesse limite?

4) Donner l'expression de la vitesse limite en fonction de m, g et k .

5) S'assurer que : $v = v_\ell(1 - e^{-\frac{k}{m}.t})$,est solution de l'équation différentielle précédente.

6) Déterminer la valeur de k , sachant que : $v_\ell = 7,56 cm/s$, $R = 25\mu m$.

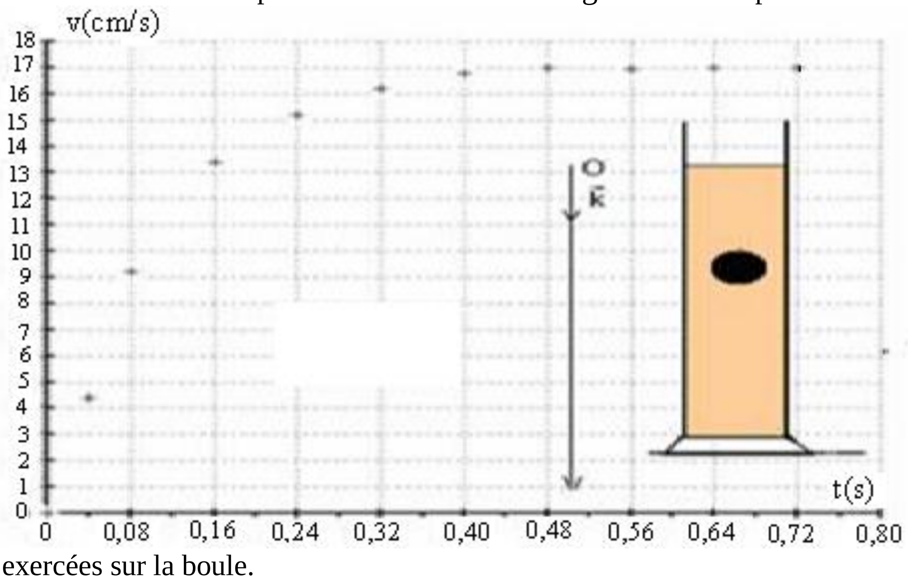
4) Exercice n°4:

On libère une boule S de masse m=35g et de volume V=33,5cm³ à l'instant t=0 sans vitesse initiale dans une éprouvette contenant de l'huile du moteur de masse volumique $\rho = 0,91 g/cm^3$.

On donne l'intensité de la force de frottement exercée par le liquide sur la boule : f=k.v.

On utilise un dispositif expérimental simplifié qui nous permet de suivre le mouvement de la boule dans le liquide et on obtient la courbe représentant la variation de la vitesse du centre de gravité de la boule en fonction du temps v=f(t)

On étudie le mouvement de la boule dans un repère lié à la terre considéré galiléen et on prend l'axe Oz dirigé vers le bas.



1) Représenter les forces exercées sur la boule.

2) En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation différentielle s'écrit de la manière suivante : $\frac{dv}{dt} = A - B.v$

puis déterminer les expressions de A et B.

3) S'assurer que A=1,29m/s² .(on donne g=10m/s²).

4) En utilisant la courbe, déterminer la vitesse limite et déduire la valeur de B en précisant son unité.

5) Après avoir déterminé les valeurs de A et B, et utilisant la méthode d'Euler on détermine les valeurs approchées de la vitesse en fonction du temps à l'aide des deux relations suivantes :

$$a_i = A - B.v_i \quad ; \quad v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t$$

Les résultats obtenus sont indiqués dans le tableau suivant :

i	0	1	2	3	4	5	6	7
t_i (s)	0	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,48	0 ,56
v_i (m/s)		0,102	0,143		0,165	0,167	0,169	0,169
$a_i = dv_i/dt$ (m/s²)		0,51	0,20		0,03	0,02	0,00	0,00

5-1-Quelle est la valeur du pas Δt du calcul utilisé ?

5-2-En utilisant la méthode d'Euler compléter le tableau précédent.

5) Exercice n°5:

Dans le fond d'une pissine à la profondeur z = **-3**,0m un plongeur a créé une bulle sphérique de rayon r_o=0,50mm d'air à l'instant t=0s . La température de l'eau et de l'air dans la bulle est constante T_o=300K.

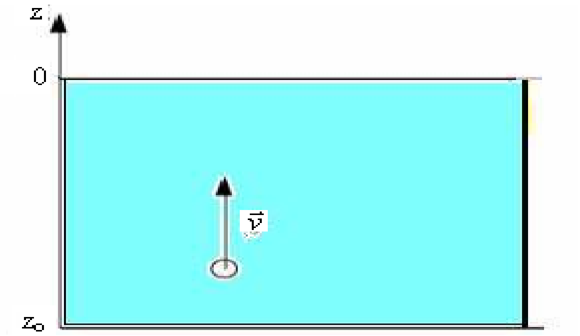
La pression de l'eau dans la pissine varie avec la profondeur z selon la relation suivante : $P_{eau}(z) = P_{atm} - \rho.g.z$

La pression à la surface de l'eau z=0 : $P_{atm} = 10^5\,Pa$

La masse volumique de l'eau : $\rho = 10^3\,kg/m^3$

L'intensité de pesanteur : g= 9,8m/s^2 .La constante des gaz parfaits : R=8,314 S.I.

La pression de l'air existant dans la bulle est égale à la pression de l'eau dans la même profondeur : $P_{air}(z) = P_{eau}(z)$



1) On suppose que le gaz qui se trouve dans la bulle est parfait .Déterminer l'expression du rayon r(z) en fonction de z.
2) Calculer la quantité de matière d'air existant dans la bulle n_{air}.
3) Calculer le rayon de la bulle lorsqu'elle se trouve au fond de la pissine (on négligera la variation du rayon de la bulle si la variation (en valeur absolu) est inférieure à 10% de la valeur initiale .Peut -on la négliger ?
4) Sachant que la masse volumique de l'air est M (air)=29g/mol .Calculer la masse m de la bulle puis donner les caractéristiques poids $\vec{P}$ du de la bulle.
5) Donner les caractéristiques de la poussée d'Archimède $\vec{F}_A$
6) La bulle est soumise aussi à force de frottements fluide qui s'écrit sous la forme : $\vec{f} = -6.\pi.\eta.r_o.\vec{v}$
 6-1- Représenter sur un schéma les forces qui s'appliquent sur la bulle.
 6-2- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la vitesse de la bulle pendant son mouvement.
7) La solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme : $v(t) = v_\ell(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

Déterminer les expressions de v_ℓ et de τ .

8) Déterminer la vitesse limite de la bulle.

6) Sujet du baccalauréat 2010 session normale section sc. physique:

Les toboggans permettent aux nageurs dans les piscines de glisser et plonger dans l'eau. On modélise un toboggan par une piste ABC constituée d'une partie AB inclinée d'un angle α par rapport au plan horizontal et d'une piste circulaire BC et on modélise le nageur par un solide S de centre d'inertie G et de masse m (figure1)

Données:

AB = 2,4 m , α = 20° , g = 9,8 m.s^{-2} , m = 70 Kg.

1- Etude du mouvement sur la partie AB :

Le solide (S) part de la position A supposée confondue avec G, à l'instant t = 0, sans vitesse initiale, et glisse sans frottement sur la piste AB (Figure 1). On étudie le mouvement de G dans le repère terrestre $R_1(A,\vec{i_1},\vec{j_1})$ supposé galiléen.

Par application de la deuxième loi de Newton, déterminer :

1-1- Les composantes du vecteur accélération $\vec{a}_G$ dans le repère $R_1(A,\vec{i_1},\vec{j_1})$.

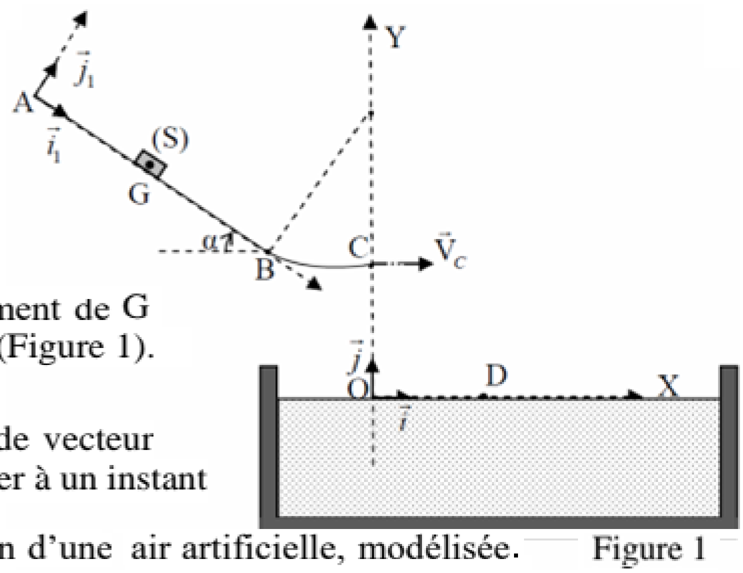
1-2- V_B la vitesse de G au point B.

1-3- L'intensité R de la force associée à l'action du plan AB sur le solide (S).

Dans la suite de l'exercice, on étudiera le mouvement de G dans le repère terrestre $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j})$ supposé galiléen (Figure 1).

2- Etude du mouvement de G dans l'air :

Le solide (S) arrive au point C avec une vitesse de vecteur horizontal, et de valeur V_C=4,67m.s^{-1}, pour le quitter à un instant supposé comme nouvelle origine des temps.



Le solide est soumis, en plus de son poids, à l'action d'une air artificielle, modélisée.

Figure 1

par la force d'expression : $\vec{f_1} = -f_1.\vec{i}$.

2-1- Trouver, à un instant t, l'expression v_x de la composante horizontale du vecteur vitesse en fonction de : m, V_C, f_1, et t.

2-2- A l'instant $t_D = 0{,}86$ s, G arrive au point D se trouvant à la surface de l'eau, où s'annule la composante horizontale de sa vitesse.

a- Calculer f_1.

b- Calculer l'altitude h de C par rapport à la surface de l'eau.

3- <u>Etude du mouvement vertical de G dans l'eau :</u>

Le solide (S) poursuit son mouvement dans l'eau, avec une vitesse verticale $\vec{V}$. Il subit en plus de son poids :

- Une force de frottement fluide modélisée dans le système international d'unité par : $\vec{f} = 140.V^2.\vec{j}$.
- La poussée d'Archimède $\vec{F_A}$ d'intensité $F_A = 637$ N.

On considère l'instant d'entrée de (S) dans l'eau comme nouvelle origine des temps.

3-1- Montrer que la vitesse V(t) de G vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dV(t)}{dt} - 2.V^2 + 0{,}7 = 0$$

3-2- Trouver la valeur de la vitesse limite V_ℓ.

3-3- Déterminer à l'aide du tableau suivant, et par utilisation de la méthode d'Euler, les valeurs : a_{i+1} et V_{i+2}.

t (s)	$V(m.s^{-1})$	$a(m.s^{-2})$
$t_i = 1{,}8.10^{-1}$	-1,90	6,52
$t_{i+1} = 1{,}95.10^{-1}$	-1,80	a_{i+1}
$t_{i+2} = 2{,}1.10^{-1}$	V_{i+2}	5,15

7) Sujet du baccalauréat 2008 session normale section sc. mathématique:

Le but de cet exercice est de modéliser la force de frottements visqueux exercée par le glycérol sur un solide, à partir de l'étude de chute verticale d'une bille métallique de masse m et de rayon r dans le glycérol. <u>On donne :</u>

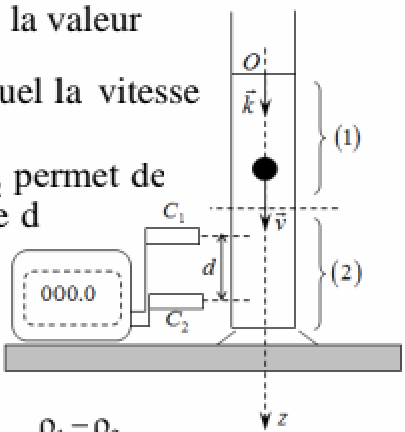
- Rayon de la bille : r = 1 cm ; Volume de la bille : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
- <u>Masses volumiques</u> – Métal constituant la bille : $\rho_1 = 2{,}7.10^3$ kg.m^{-3} ;
  – Glycérol : $\rho_2 = 1{,}26.10^3$ kg.m^{-3} ;
- Accélération de la pesanteur : $g = 9{,}81$ m.s^{-2}.

On rappelle que l'expression de la poussée d'Archimède exercée par le glycérol sur la bille est: $F = \rho_2.V.g$.
On modélise la force de frottements visqueux exercée sur la bille au cour de sa chute dans le glycérol par : $\vec{f} = -9\pi r v^n \vec{k}$ où n est un entier naturel et v la vitesse du centre d'inertie de la bille.

On lâche la bille sans vitesse initiale, à partir du point O, origine d'un axe vertical descendant $(O,\vec{k})$, à l'instant t = 0. Son mouvement dans le glycérol se fait suivant deux phases :

<u>Phase 1 :</u> Phase du régime initial entre deux instant t_0 et t_1 où la valeur de la vitesse croit.

<u>Phase 2 :</u> Phase du régime permanent à partir de l'instant t_1 auquel la vitesse atteint une valeur limite v_L.



Le dispositif constitué d'un chronomètre et deux cellules C_1 et C_2 permet de mesurer la durée Δt nécessaire à la bille pour parcourir la distance d au cour de la 2eme phase. (figure ci-contre)

2- Par application de la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation différentielle réalisée par la vitesse v du centre d'inertie de la bille au cour du mouvement dans le liquide s'écrit

sous la forme : $\boxed{\frac{dv}{dt} + A v^n = B}$ avec: $A = \frac{27}{4.\rho_1.r^2}$ et $B = g(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1})$.

3- Trouver à partir de l'équation différentielle v_L^n en fonction de ρ_1, ρ_2, r et g.

4- En déduire la valeur de n.

8) Sujet du baccalauréat 2010 session normale section sc. mathématique:

Tout corps immergé dans un fluide est soumis à la poussée fluide , d'Archimède, et s'il est en mouvement de translation dans ce fluide il est soumis en plus à une force de frottement fluide . Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution de la vitesse de deux billes (a) et (b) en verre homogène de rayons différents en mouvement de translation dans une huile avec une vitesse relativement faible . **Données :**

Masse volumique du verre : $\rho = 2600\ kg.m^{-3}$;

Masse volumique de l'huile : $\rho_0 = 970\ kg.m^{-3}$;

Viscosité de l'huile : $\eta = 8{,}0.10^{-2}\ N.m^{-2}.s$;

Accélération de la pesanteur : $g = 9{,}81 m.s^{-2}$.

L'expression du volume d'une sphère de rayon r : $V = \frac{4}{3}\pi.r^3$

On abandonne au même instant t = 0 les deux billes (a) et (b) à la surface d'une huile contenue dans un tube cylindrique vertical transparent .La hauteur d'huile dans le tube est H= 1m, figure(1)

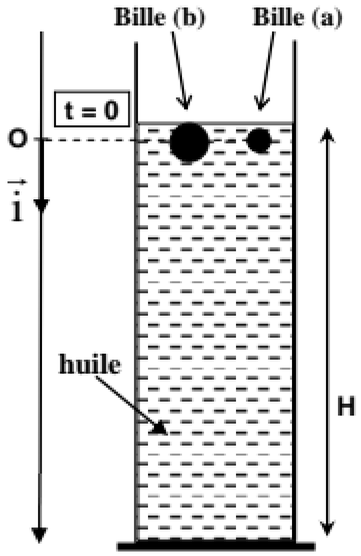


Figure 1

1-Etude du mouvement de la bille (a)

La bille (a) est soumise pendant son mouvement par rapport au repère $(O, \vec{i})$ lié à la terre aux forces :

- La poussée d'Archimède : $\vec{F} = -\rho_0.V.g.\vec{i}$
- La force de frottement fluide : $\vec{f} = -6\pi\eta.r.v.\vec{i}$
- Son poids : $\vec{P} = m.g.\vec{i}$

On désigne par τ le temps caractéristique du mouvement de la bille (a) et on considère que la vitesse limite de la bille est atteinte au bout d'une durée de 5τ .

1.1- Etablir l'équation différentielle $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = C$ du mouvement de la bille (a) et préciser les expressions de τ et de C . Calculer τ sachant que r = 0,25 cm .

1.2- Calculer la valeur de la vitesse limite v_ℓ de la bille (a).

2-Etude comparative des mouvements des deux billes (a) et (b)

Le rayon de la bille (b) est r' = 2r .

2.1- Déterminer , en justifiant la réponse , la bille qui met plus de temps pour atteindre sa vitesse limite .

2.2-La distance parcourue au cours du régime transitoire par :

- la bille (a) est d_1 = 5,00cm

-la bille (b) est d_2=80,0 cm

On néglige r et r' devant H .

Calculer la durée qui sépare l'arrivée des deux billes (a) et (b) au fond du tube .

1) Correction de l'exercice N° 1:

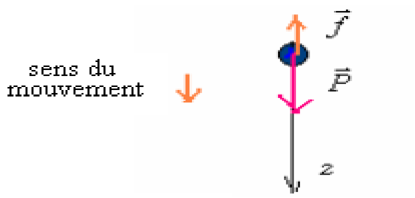
1) **Système étudié :** {le parachutiste et ses accessoires}

Bilan des forces : Le système étudié est soumis à l'action des forces suivantes:

$\vec{P}$: poids du système.

$\vec{f}$: résistance de l'air .

Représentation des forces :



Application de la deuxième loi de Newton: $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}_G$

$\Rightarrow \quad \vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}_G$ **En projetant sur l'axe oz** : $P - f = m.a$ (car : a=a_z) $\Rightarrow \quad m.g - k.v = m.\frac{dv}{dt}$

En divisant le tout par m : $\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}.v + g$ qui est sous la forme : $\frac{dv}{dt} = A.v + B$

Donc : $A = -\frac{k}{m}$ et : B=g

2) a) a=f(v) est une fonction affine qui s'écrit sous la forme :a=A.v + B , Graphiquement on trouve $B=10m/s^2$ et on a : B=g donc $g=10m/s^2$.

b) Lorsqu'on attend la vitesse limite le régime permanent est établit donc : $\frac{dv}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad a=0$ qui correspond au point de rencontre de la droite qui représente a=f(v) avec l'axe des vitesses .On trouve graphiquement $v_\ell = 12{,}5m/s$.

3) Détermination du coefficient directeur de la droite qui représente a=f(v) : $A=\frac{\Delta a}{\Delta v}=\frac{10-6}{0-5}=-\frac{4}{5}=-0{,}8$

Et on a : $A=-\frac{k}{m} \qquad \Rightarrow \frac{k}{m}=0{,}8$

4) Lorsqu'on attend la vitesse limite (celle-ci devient constante) donc : $\frac{dv_\ell}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{k}{m}.v_\ell+g=0 \quad \Rightarrow \quad v_\ell=\frac{g.m}{k}$

d'où: $k=\frac{g.m}{v_\ell}=\frac{10\times 100}{12{,}5}=80$ et la relation devient: $\frac{dv}{dt}=-0{,}8.v+10$

5) L'équation différentielle précédente s'écrit : $\frac{m}{k}.\frac{dv}{dt}+v=\frac{g\times m}{k}$; la solution de cette équation différentielle est :

$v=\frac{g.m}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t}) \quad \Rightarrow \quad v=v_\ell.(1-e^{-\frac{k}{m}t})$ avec: $\frac{k}{m}=0{,}8$.

A l'instant t=12,5s $\quad v=v_\ell.(1-e^{-\frac{k}{m}t})=v_\ell(1-e^{-0{,}8\times 12{,}5})=v_\ell \quad \Rightarrow$ C'est le régime permanent qui est établit.

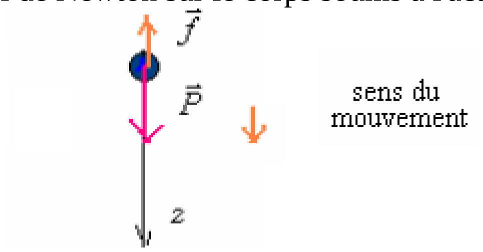
2) Correction de l'exercice N°2:

1) Intensité de la poussée d'Archimède : $F_A=\rho_{air}.V.g$ avec: $V=\frac{4}{3}.\pi.r^3 \quad \Rightarrow \quad F_A=\rho_{air}.\frac{4}{3}.\pi.r^3 g$

A.N: $F_A=1{,}3\times\frac{4}{3}.\pi.(1{,}5.10^{-2})^3\times 9{,}8=1{,}8.10^{-4}N$ et on a : P=m.g= $13.10^{-3}.9{,}8$= 0,1274N

$\frac{P}{F_A}\approx 708 \qquad \Rightarrow \qquad P>>F_A$ la poussée d''Archimède est négligeable devant le poids du corps .

2) 2-1-En appliquant de la deuxième loi de Newton sur le corps soums à l'action de son poids + la force de frottement)

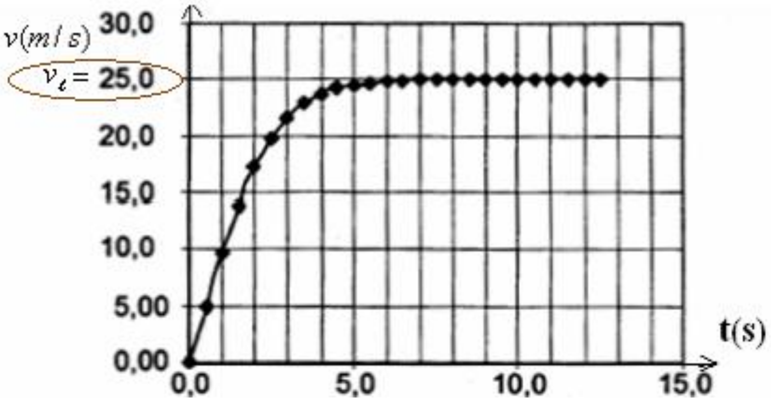


Application de la deuxième loi de Newton: $\Sigma\vec{F}=m.\vec{a}_G$

$\Rightarrow \quad \vec{P}+\vec{f}=m.\vec{a}_G$ par projection : $P-f=m.a \quad \Rightarrow \quad m.g-k.v^2=m.\frac{dv}{dt}$ d'où: $\frac{dv}{dt}=.g-\frac{k.}{m}v^2$

qui sous la forme : $\frac{dv}{dt}=A-B.v^2 \quad \Rightarrow A=g$ et: $B=\frac{k}{m}$

2-2- 2-2-1 On a graphiquement : $a_o=9{,}8m/s^2$ et $v_\ell=25m/s$



t (s)	v(m.s^{-1})	a (m.s^{-2})
0,00	0,00	9,80 = a_o
0,50	4,90	9,43
1,00	9,61	8,36
1,50	13,8	6,83
2,00	17,2	a_4
2,50	v_5	3,69
3,00	21,6	2,49

Autre méthode : on a : $a = g - \frac{k}{m}v^2$ à t=0 , $v_0=0$ $\Rightarrow$ $a_0 = g - \frac{k}{m}{v_0}^2 = g$

La constante du temps caractéristique: $\tau = \frac{v_\ell}{a_0} = \frac{25}{9,8} \approx 2,55s$

2-2-2-On a : $a = A - B.v^2$ à t=0 $v_0=0$: $a_0 = A - B.{v_0}^2 = A$ donc: $a_0 = A$ Avec: A=g d'où: A=9,8m/s^2

En régime permanent a=0 et $v = v_\ell$ $\Rightarrow 0 = A - B.{v_\ell}^2$ d'où: $B = \frac{A}{{v_\ell}^2} = \frac{9,8}{12,5^2} \approx 1,57.10^{-2}m^{-1}$

2-3-- En utilisant la méthode d'Euler: On utilise les deux relations suivantes : $\begin{cases} a_i = A - B.{v_i}^2 \\ v_{i+1} = a_i.\Delta t + v_i \end{cases}$

à t=0 on a : $a_4 = A - B.{v_4}^2 = 9,8 - 1,57.10^{-2} \times (17,2)^2 \approx 5,15m/s^2$ avec : $v_0=0$

$v_5 = a_4.\Delta t + v_4 = 5,15 \times 0,5 + 17,2 = 19,77m/s$

3) Correction de l'exercice N°3:

1) $\frac{P}{F_{Ar}} = \frac{mg}{\rho_{air}.V.g} = \frac{\rho_{eau}.V.g}{\rho_{air}.V.g} = \frac{\rho_{eau}}{\rho_{air}} = \frac{10^3}{1,3} \approx 769$ $\Rightarrow$ $P >>> F_A$ $\Rightarrow$ $\vec{F}_A$ est négligeable devant le poids $\vec{P}$

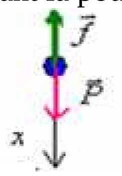
---

2) **Système étudié :** {la goutte d'eau}

Bilan des forces : En négligeant la poussée d'Archimède, la goutte est soumise aux actions suivantes :

$\vec{P}$: Poids de la goutte.

$\vec{f}$: force de frottement.



Application de la deuxième loi de Newton : $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}_G$

$\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}_G$ par projection sur l'axe ox : $P - f = m.a$ $\Rightarrow$ $m.g - k.v = m\frac{dv}{dt}$ $\Rightarrow$ $m.\frac{dv}{dt} + k.v = m.g$

et on obtient : $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}.v = g$ c'est l'équation différentielle qui est sous la forme : $\boxed{\frac{dv}{dt} + Av = B}$

donc : $\boxed{A = \frac{k}{m}}$ et : $\boxed{B = g}$

---

3) D'après la relation : $\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}.v$, lorsque : $\frac{dv}{dt} = 0$ $\Rightarrow g - \frac{k}{m}.v_\ell = 0$ d'où: $v_\ell = \frac{m.g}{k}$

La vitesse limite est atteinte lorsque: $t \geq 5\tau$ avec : $\tau = \frac{m}{k}$

---

5) S'assurons que : $v = v_\ell(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) = \frac{m.g}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$ est solution de l'équation différentielle $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}.v = g$

$\frac{dv}{dt} = \frac{\cancel{m}.g}{\cancel{k}}.\frac{\cancel{k}}{\cancel{m}}.e^{-\frac{k}{m}t} = g.e^{-\frac{k}{m}t}$ avec : $v = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k}.e^{-\frac{k}{m}t}$

En remplaçant on a : $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}.v = g.e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{\cancel{k}}{\cancel{m}}.\frac{\cancel{m}g}{\cancel{k}} - \frac{\cancel{k}}{\cancel{m}}.\frac{\cancel{m}g}{\cancel{k}}.e^{-\frac{k}{m}t} = \cancel{g.e^{-\frac{k}{m}t}} + g - \cancel{g.e^{-\frac{k}{m}t}} = g$

Donc: $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}.v = g$ $\Rightarrow$ $v = v_\ell(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$ est solution de l'équation différentielle

---

6) $V = \frac{4}{3}\pi.r^3 = \frac{4}{3}\pi(25.10^{-6})^3 = 6,54.10^{-14}\,m^3$

$v_\ell = \frac{g.m}{k}$ $\Rightarrow$ $k = \frac{m.g}{v_\ell} = \frac{\rho_{eau}.V.g}{v_\ell} = \frac{1000 \times 6,54 \times 10^{-14} \times 9,8}{7,56 \times 10^{-2}} = 8,48 \times 10^{-9}$ **kg/s**

4) Correction de l'exercice N°4:

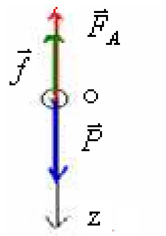
1) 1) Système étudié : {la boule }

Bilan des forces : a boule est soumise à l'action des forces suivantes:

$\vec{P}$: poids du système.

$\vec{f}$: résistance de l'air .

$\vec{F}_A$: poussée d'Archimède.



2) Application de la deuxième loi de Newton: $\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}_G$

$\Rightarrow \quad \vec{f} + \vec{F}_A + \vec{P} = m.\vec{a}_G$ en projetant sur l'axe oz : $\quad -f - F_A + P = m.a$ (car : $a=a_z$) $\Rightarrow$

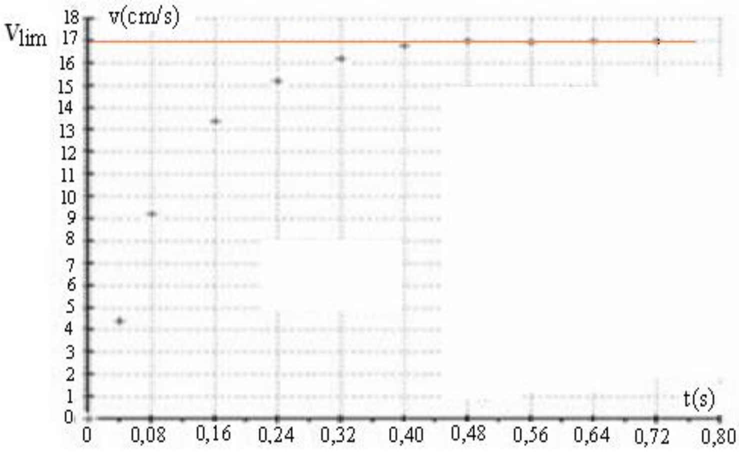
$-k.v - \rho.V.g + mg = m.\dfrac{dv}{dt} \Rightarrow -\dfrac{k.v}{m} + \dfrac{-\rho.V.g + mg}{m} = \dfrac{dv}{dt} \Rightarrow \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{k}{m}.v + \dfrac{g(m-\rho.V)}{m}$ qui est sous la forme:

dv/dt = A-B.v

$\Rightarrow \quad \boxed{A = \dfrac{g(m-\rho.V)}{m}}$ et : $\boxed{B = \dfrac{k}{m}}$

3) $\quad A = \dfrac{g(m-\rho V)}{m} = \dfrac{10m.s^{-2}(35.10^{-3}kg - 0{,}9110^{3}kg.m^{-3} \times 33{,}5.10^{-6}m^{3})}{35\times10^{-3}kg} = \dfrac{10.(35-0{,}91\times33{,}5)}{35} = 1{,}29m.s^{-2}$

4) Graphiquement : $v_\ell = 17cm/s = 0{,}17m/s$



On a $\dfrac{dv}{dt} = A - B.v$ lorsque : $v = v_{lim}$, $\dfrac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow A - B.v_\ell = 0$ d'où: $v_\ell = \dfrac{A}{B} \Rightarrow B = \dfrac{A}{v_\ell} = \dfrac{1{,}29m.s^{-2}}{0{,}17m.s^{-1}} = 7{,}59s^{-1}$

5) 5-1-

i	0	1	2	3	4	5	6	7
t_i (s)	**0**	**0,08**	**0,16**	**0,24**	**0,32**	**0,40**	**0,48**	**0 ,56**
v_i (m/s)	**vo**	**0,102**	**0,143**	v_3	**0,165**	**0,167**	**0,169**	**0,169**
$a_i = dv_i/dt$ (m/s²)	**ao**	**0,51**	**0,20**	a_3	**0,03**	**0,02**	**0,00**	**0,00**

D'après le tableau : le pas du calcul est :

$$\Delta t = 0{,}08s$$

5-2- On a : $a_o = A - B.v_o$ avec: $v_o=0 \Rightarrow a_o = A = 1{,}29m/s^2$

$v_3 = v_2 + a_2.\Delta t = 0{,}143 + 0{,}20\times0{,}08 = 0{,}159m/s$

$a_3 = A - B.v_3 = 1{,}29 - 7{,}59\times0{,}159 \approx 0{,}083m/s^2$

5) Correction de l'exercice n°5:

1) On a la relation : PV=n.R.T avec : $V = \dfrac{4}{3}.\pi.r^3$ et: $P = P_{atm} - \rho.g.z$, la relation devient :

$$(P_{atm} - \rho.g.z).\frac{4}{3}\pi.r^3 = n.R.T \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3n.R.T}{(P_{atm} - \rho.g.z).4\pi}}$$

2) on a : PV=n.R.T , la quantité de matière d'air existant dans la bulle :

$$n = \frac{P.V}{RT} = \frac{(P_{atm} - \rho.g.z).\frac{4}{3}\pi.r_o^3}{RT} = \frac{[10^5 - 10^3 \times 9{,}8(-3)] \times 4 \times \pi \times (0{,}5 \times 10^{-3})^3}{3 \times 8{,}314 \times 300} = 2{,}7.10^{-8}\,mol$$

---

3) La relation : $(P_{atm} - \rho.g.z).\frac{4}{3}\pi.r^3 = n.R.T$, à l'altitude z=0 devient: $P_{atm}.\frac{4}{3}\pi.r^3 = n.R.T$, donc le rayon de la bulle lorsqu'elle se trouve au fond de la pissine:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3.n.R.T}{4.\pi.P_{atm}}} = \sqrt[3]{\frac{3 \times 2{,}7 \times 10^{-8} \times 8{,}314 \times 300}{4 \times \pi \times 10^5}} = 0{,}54.10^{-3}\,m = 0{,}54\,mm$$

La variation est : $\Delta r = 0{,}54 - 0{,}5 = 0{,}04 = 4\%$ $\Rightarrow$ $\Delta r < 10\%$, donc la variation du rayon de la bulle est négligeable.

---

4) $n = \frac{m}{M}$ $\Rightarrow$ $m = M.n = 29 \times 2{,}7.10^{-8} = 7{,}83.10^{-7}\,g$

---

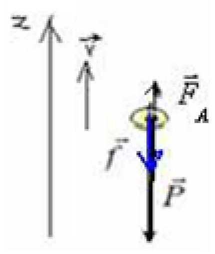
5) caractéristiques de la poussée d'Archimède:

$\vec{F}_A$
- *point d'application : G*
- *droite d'action : la verticale passant par : G*
- *sens : vers le haut*
- intensité : $F_A = \rho.v.g = \frac{\rho.4.\pi.r_o^3.g}{3} \approx 5.10^{-6}\,N$

caractéristiques du poids :

$\vec{P}$
- *point d'application : G*
- *droite d'action : la verticale passant par : G*
- *sens : vers le bas*
- intensité : $P = m.g$

6) 6-1-



6-2- En appliquant la deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{F}_A + \vec{f} = m.\vec{a}_G$

Par projection sur oz : $-P + F_A - f = m.\frac{dv}{dt}$ La bulle se déplace vers le haut dans le sens de oz.

$$-mg + \rho.V.g - 6\pi\eta r_o.v = m.\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta r_o}{m}.v = g(\frac{\rho.V}{m} - 1)$$ d'où: $$\frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta r_o}{m}.v = g(\frac{\rho.V}{m} - 1)$$

On pose : $\alpha = \frac{6\pi\eta r_o}{m}$ et : $\beta = g(\frac{\rho.V}{m} - 1)$

la relation précédente devient : $\frac{dv}{dt} + \alpha.v = \beta$ c'est l'équation différentielle vérifiée par la vitesse.

---

7) La solution de l'équation différentielle : $v(t) = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = v_\ell - v_\ell.e^{-\frac{t}{\tau}}$ $\frac{dv}{dt} = \frac{v_\ell}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}$

En remplaçant dans l'équation différentielle on a : $\frac{v_\ell}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} + \alpha.v_\ell - \alpha.v_\ell.e^{-\frac{t}{\tau}} = \beta$ $\Rightarrow$ $v_\ell.e^{-\frac{t}{\tau}}(-\alpha + \frac{1}{\tau}) + \alpha.v_\ell - \beta = 0$

donc : $\begin{cases} \alpha.v_\ell - \beta = 0 \\ -\alpha + \frac{1}{\tau} = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} v_\ell = \frac{\beta}{\alpha} \\ \tau = \frac{1}{\alpha} \end{cases}$ d'où: $\begin{cases} v_\ell = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{g(\rho.V - m)}{6\pi\eta.r_o} \\ \tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{m}{6\pi\eta.r_o} \end{cases}$

---

8) $$v_\ell = \frac{g(\rho.V - m)}{6\pi\eta.r_o} = \frac{9{,}8 \times (10^3.5{,}234 \times 10^{-10} - 7{,}83 \times 10^{-10})}{6.\pi.10^{-3}.0{,}5 \times 10^{-3}} = 0{,}54\,m/s$$

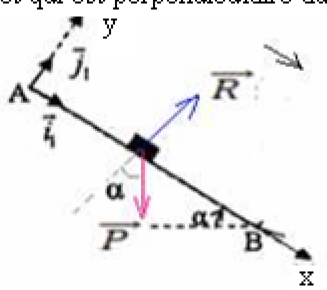
6) Correction du sujet du baccalauréat 2010 session normale section sc. physique:

1) 1-1- -<u>Système étudié</u> : { le corps S}

-<u>bilan et représentation des forces</u>:

Le corps S est soumis aux forces suivantes:

$\vec{P}$:son poids. $\vec{R}$: réaction du plan de contact qui est perpendiculaire au plan car le contact se fait sans frottement.



-Application de la deuxième loi de Newton: $\vec{P}+\vec{R}=m\vec{a}_G$

En utilisant le repère (A,i_1,j_1)

Projection sur l'axe Ax:

$+P.\sin\alpha+0=m.a_x \Rightarrow m.g.\sin\alpha=m.a_x$ d'où: $a_x=g.\sin\alpha$

Projection sur l'axe Ay:

$-P.\cos\alpha+R=0$ car: $a_y=0$ pas de mouvement du corps S selon l'axe Ay

---

1-2- $a_x=\frac{dv_x}{dt}=g.\sin\alpha \Rightarrow v_x=g.(\sin\alpha).t$ car : $v_{0x}=0$ $v_x=\frac{dx}{dt}=g.(\sin\alpha).t \Rightarrow x=\frac{1}{2}.g.(\sin\alpha).t^2$ car : $x_0=0$

$\begin{cases} x=\frac{1}{2}.g.(\sin\alpha).t^2....(1) \\ v_x=g.(\sin\alpha).t......(2)\end{cases} \Rightarrow t=\frac{v_x}{g.\sin\alpha}$, en remplaçant dans (1) $x=\frac{v_x^2}{2.g.\sin\alpha} \Rightarrow v_x^2=2.x.g.\sin\alpha$

Au point B: $x=AB$ et $v_x=v_B$ donc : $v_B^2=2.AB..g.\sin\alpha$ d'où: $v_B=\sqrt{2.AB..g.\sin\alpha}=\sqrt{2\times 2{,}4\times 9{,}8.\sin 20}\approx 4m/s$

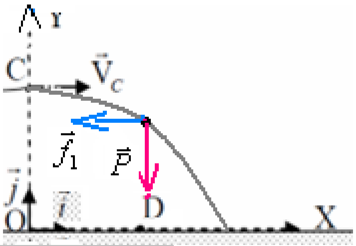
1-3- On a $:-P.\cos\alpha+R=0 \Rightarrow R=m.g.\cos\alpha=70\times 9{,}8.\cos 20\approx 644{,}6N$

---

2) 2-1 ● système étudié {Le corps S}

●Bilan et représentation des forces: Après avoir quitté le point C le coprs S est soumis à l'action des forces suivantes:

- $\vec{P}$: son poids .
- $\vec{f_1}$: action de l'air artificielle.



● **Application de la 2ème loi de Newton :** $\vec{P}+\vec{f_1}=m\vec{a}_G$ **(1)**

● **Projection sur l'axe ox:** $0-f_1=m.a_x \Rightarrow a_x=-\frac{f_1}{m}$ d'où: $a_x=\frac{dv_x}{dt}=-\frac{f_1}{m} \Rightarrow v_x=-\frac{f_1}{m}.t+k$

Or à l'instant t=0 on a : $v_x=v_C$ donc: $k=v_C \Rightarrow v_x=-\frac{f_1}{m}.t+v_C$

2-2- a) Au point D et à l'instant $t=t_D$, la vitesse v_x s'annule. donc : $-\frac{f_1}{m}.t_D+v_C=0 \Rightarrow f_1=\frac{m.v_C}{t_D}=\frac{70\times 4{,}67}{0{,}86}\approx 380N$

---

b) ● Projection de la relation (1) sur l'axe oy:

$-P+0=m.a_y \Rightarrow a_y=-g$ donc constante $a_y=\frac{dv_y}{dt}=-g \Rightarrow v_y=-g.t+v_{oy}$ avec : $v_{oy}=0$ d'où: $v_y=-g.t$

On a: $v_y=\frac{dy}{dt}=-g.t$, par intégration : $y=-\frac{1}{2}g.t^2+y_o$ avec: $y_o=h$ d'où $y=-\frac{1}{2}g.t^2+h$

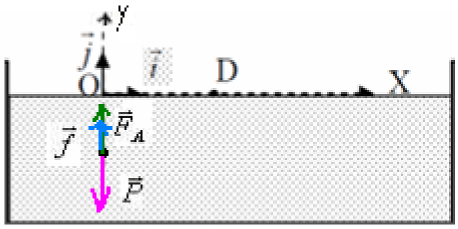
Lorsque le corps arrive au point D: $y=0$ donc: $-\frac{1}{2}g.t_D^2+h=0 \Rightarrow h=\frac{1}{2}g.t_D^2=\frac{1}{2}\times 9{,}8\times 0{,}86^2=3{,}62m$

---

3) 3-1-● **Système étudié** {le corps S }dans l'eau.

● **Bilan et représentation des forces**: Le corps S dans l'eau est soumis à l'action des forces suivantes:

- Son poids. $\vec{P}:=-m.g.\vec{j}$
- La poussée d'Archimède : $\vec{F}_A=637\vec{j}$
- La force de frottement : $\vec{f}=140.v^2\vec{j}$



● **Application de la 2ème loi de Newton :** $\vec{P}+\vec{F}_A+\vec{f}=m.\vec{a}_G$

● **Projection sur l'axe oy:** $-P+F_A+f=m.a \Rightarrow -m.g+F_A+140.v^2=m.\frac{dv}{dt}$

A.N: $-70\times 9{,}8+637+140.v^2=70.\dfrac{dv}{dt}$ $\Rightarrow$ $70\dfrac{dv}{dt}-140.v^2+49=0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{dv}{dt}-2v^2+0{,}7=0}$

2-3- On atteint la vitesse limite lorsque le régime permanent est établit. $v=v_\ell=C^{te}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{dv}{dt}=0$

$\dfrac{dv}{dt}=2.v_\ell^{\,2}-0{,}7=0$ $\Rightarrow$ $\boxed{v_\ell=\sqrt{\dfrac{0{,}7}{2}}=0{,}59\,m/s}$

3-3- $a_{i+1}=2.v_{i+1}^{\;2}+0{,}7=2.(1{,}80)^2-0{,}7=5{,}78\,m/s^2$

<u>Méthode d'Heuler</u> $\underline{v_{i+2}=a_{i+1}.\Delta t+v_{i+1}}$ avec: $\underline{\Delta t=t_{i+2}-t_{i+1}}$ donc: $v_{i+2}=5{,}78.(0{,}21-0{,}195)-1{,}8=-1{,}71\,m/s$

t (s)	V($m.s^{-1}$)	$a\,(m.s^{-2})$
$t_i=1{,}8.10^{-1}$	-1,90	6,52
$t_{i+1}=1{,}95.10^{-1}$	-1,80	$a_{i+1}=5{,}78$
$t_{i+2}=2{,}1.10^{-1}$	$V_{i+2}=-1{,}71$	5,15

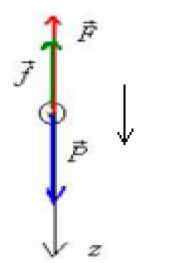
7) Correction du sujet du baccalauréat 2008 session normale section sc. mathématique

1) $v_\ell=\dfrac{d}{\Delta t}=\dfrac{20.10^{-2}}{956.10^{-3}}=0{,}21\,m/s$

2)- **<u>Système étudié</u>** :{la bille métallique}

-**<u>Bilan et représentation des force</u>**s: durant sa chute la bille est soumise à l'action des forces suivantes:

- -Son poids : $\vec P$
- - La poussée d'Archimède: $\vec F_A$
- -La force de frottement visqueux : $\vec f$



-Application de la 2ème loi de Newton : $\vec f+\vec F_A+\vec P=m.\vec a_G$

-Projection sur l'axe oz : $-f-F_A+P=m.a$ avec: $f=9.\pi.r.v^n$ et : $F=\rho_2.V.g$

$\Rightarrow$ $-9.\pi.r.v^n-\rho_2.V.g+m.g=m.\dfrac{dv}{dt}$ $\Rightarrow$ $m.\dfrac{dv}{dt}+9.\pi.r.v^n+\rho_2.V.g-m.g=0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{9.\pi.r.v^n}{m}+\dfrac{\rho_2.V.g}{m}-g=0$

$m=\rho_1.V$, donc: $\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{9.\pi.r.v^n}{\rho_1.V}=g-\dfrac{\rho_2.g}{\rho_1}$ avec: $V=\dfrac{4}{3}.\pi.r^3$ $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{27}{4.\rho_1.r^2}.v^n=g\left(\dfrac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1}\right)}$

qui est sous la forme : $\boxed{\dfrac{dv}{dt}+A.v^n=B}$, donc: $\boxed{A=\dfrac{27}{4.\rho_1.r^2}}$. et: $\boxed{B=g\left(\dfrac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1}\right)}$

3) Lorsque la bille atteint la vitesse limite. $v=v_\ell=C^{te}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{dv}{dt}=0$

la relation : $\dfrac{dv}{dt}+A.v^n=B$ devient : $A.v_\ell^{\,n}=B$ $\Rightarrow$ $v_\ell^{\,n}=\dfrac{B}{A}=\dfrac{\dfrac{g.(\rho_1-\rho_2)}{\rho_1}}{\dfrac{27}{4.\rho_1.r^2}}=\dfrac{4..r^2g.(\rho_1-\rho_2)}{27}$

4) $v_\ell^{\,n}=\dfrac{4.r^2g.(\rho_1-\rho_2)}{27}=\dfrac{4\times(10^{-2})^2.9{,}81.(2{,}7-1{,}26).10^3}{27}=0{,}21$

$\ln v_\ell^{\,n}=\ln 0{,}21$ $\Rightarrow$ $n\ln v_\ell=\ln 0{,}21$ $\Rightarrow$ $n=\dfrac{\ln 0{,}21}{\ln v_\ell}=\dfrac{\ln 0{,}21}{\ln 0{,}21}=1$

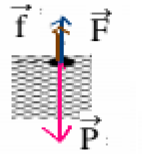
8) Correction du Sujet du baccalauréat 2010 session normale section sc. mathématique:

1)1-1- - Système étudié {la bille a}

-Bilan et représentation des forces :

La bille (a) est soumise pendant son mouvement par rapport au repère $(O, \vec{i})$ lié à la terre aux forces :

- La poussée d'Archimède : $\vec{F} = -\rho_0.V.g.\vec{i}$ d'intensité $F = \rho_0.V.g$
- La force de frottement fluide : $\vec{f} = -6\pi\eta.r.v.\vec{i}$ d'intensité $f = 6\pi\eta.r.v$
- Son poids : $\vec{P} = m.g.\vec{i}$ d'intensité $P = m.g$



-Application de la deuxième loi de Newton:

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}_G$$

-Projection sur l'axe ox:

$$P - F - f = m.a \Rightarrow m.g - \rho_o.V.g - 6.\pi.\eta.r.v = m.\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{\rho_o.V.g}{m} - \frac{6.\pi.\eta.r.v}{m} \quad \text{avec:} \quad m = \rho.V$$

donc: $\dfrac{dv}{dt} = g - \dfrac{\rho_o.g}{\rho} - \dfrac{6.\pi.\eta.r.v}{\rho.V} \Rightarrow \dfrac{dv}{dt} + \dfrac{.6\pi.\eta.r.v}{g.\frac{4}{3}.\pi.r^3} = g.(1 - \dfrac{\rho_o}{\rho}) \Rightarrow \dfrac{dv}{dt} + \dfrac{9.\eta..v}{2.g..r^2} = g.(1 - \dfrac{\rho_o}{\rho})$ qui est

sous la forme : $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{v}{\tau} = C$ d'où: $C = g.(1 - \dfrac{\rho_o}{\rho})$ et: $\tau = \dfrac{2.g..r^2}{9..\eta}$

A.N: $\tau = \dfrac{2.\rho..r^2}{9.\eta} = \dfrac{2.\times 2600 \times (0,25.\,10^{-2})^2}{9 \times 8.10^{-2}} = 4,51.10^{-2}s$

---

2) 2-1- On a : $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{v}{\tau} = C$,en régime permanent la vitesse devient constante : $v = v_\ell$ alors : $\dfrac{dv}{dt} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{v_\ell}{\tau} = C$ d'où: $v_\ell = \tau.C$ avec: $C = 9,8.(1 - \dfrac{970}{2600}) = 6,15$ et $\tau = 4,51.10^{-2}s$ donc: $v_\ell \approx 0,277m/s$

---

2) 2-1- D'après l'expression de τ : pour la bille a : $\tau_a = \dfrac{2.g..r^2}{9..\eta} = 4,51.10^{-2}s$

On en déduit que pour la bille b de rayon r'=2r : $\tau_b = \dfrac{2.g..(2.r)^2}{9..\eta} = 0,1804s > \tau_a$

2-2- la bille "a" a parcouru la distance d_1=5cm en régime permanent (durant $5\tau_a$), puis a continué son mouvement jusqu'au fond du tube à la profondeur H-d_1.

2-2- la bille "b" a parcouru la distance d_2=80cm en régime permanent (durant $5\tau_b$) puis a continué son mouvement jusqu'au fond du tube à la profondeur H-d_2.

Or la vitesse de chacune d'elle est constante : $v_\ell(a) = 0,277m/s$ et: $v_\ell(b) = 1,109m/s$

Le temps mis par la bille "a" pour atteindre le fond du tube est :

$$t_1 = 5.\tau_a + \frac{H - d_1}{v_\ell(a)} = 5 \times 4,51.10^{-2} + \frac{1 - 0,05}{0,277} = 3,655s$$

Le temps mis par la bille "b" pour atteindre le fond du tube est :

$$t_2 = 5.\tau_b + \frac{H - d_2}{v_\ell(b)} = 5 \times 0,1804 + \frac{1 - 0,8}{1,109} = 1,082s$$

---

la durée qui sépare l'arrivée des deux billes (a) et (b) au fond du tube .

$$\Delta t = t_2 - t_1 \approx 2,57s$$

■■■■■■■■