世界第一簡單 實驗設計

從統計學到參數設計的發想

國立師範大學前數學系教授兼主任　洪萬生◎審訂
高橋　信◎著
陳朕疆◎翻譯

最佳的「實驗設計」入門書籍！

理工科學生必備！
如何成為一位優秀的製造業研發人員？
實驗的結果受哪些變數影響？
該怎麼控制實驗中的「雜音因子」？
理想的實驗順序如何安排？
趕緊跟著本書淺顯易懂的解說，一步步地學習實驗設計吧！

世界第一簡單
實驗設計

高橋 信◎著
洪萬生◎審訂
陳朕疆◎翻譯

序

如同書名所示，這是一本解說「實驗設計」的書。

本書的目標讀者群包括：

・在製造業中從事研發工作者

・想從現在開始學習實驗設計者

・覺得現有的實驗設計書籍難以理解者

・大學想要進入理工科系就讀的高中生

在筆者的拙作中最平易近人的統計書籍是《世界第一簡單統計學》，就算沒有讀過《世界第一簡單統計學》，甚至幾乎沒有任何統計相關知識，閱讀本書時也不會有任何困難。

本書的結構如下：

詳實記述計算過程是本書的一大特色。數學程度好的讀者們可以跟著書中步驟一步步推導，而不太擅長數學的讀者，或者是沒什麼時間的讀者，只要大概看過就行了。也就是說，只要抱著「總之，照著這方式做下去，就能得到正確答案」的想法，掌握住「大略的脈絡」就行了。

由於四捨五入會產生誤差，讀者自行計算出來的值，可能會和本書提供的數值有些出入，請務必理解這一點。

我並不是個筆鋒細膩的人，雖憧憬著創作的領域，卻也抱著一絲敬畏的心情。承蒙Ohmsha社開發局的各位不嫌棄，給我這次執筆的機會，在此致謝。寫作本書時，我從日本中央大學理工學部的酒折文武老師那裡得到了許多建議，在此表示最高的謝意。

高橋信

目錄

第1章 實驗設計是什麼？

背景知識

第1章
實驗設計是什麼？

第2章
統計學的基礎知識

第3章
統計學假說檢定

主　題

第4章
一因子變異數分析

第5章
二因子變異數分析

第6章
理想的實驗順序

第7章
直交表實驗

第8章
參數設計

第 1 章　實驗設計是什麼？

本章將帶你了解以下幾點：

・實驗設計到底是什麼？
・實驗設計能為你做哪些事？在哪些情況下可以幫助你解決問題？

1. 實驗設計

實驗設計一詞難以用三言兩語簡單定義，或者這麼說，實驗設計並非無法定義，只是容易過於抽象，難以理解。所以本節中，筆者將用直覺性的例子，讓讀者感受實驗設計的精神，接著再給予一較為詳細的定義。

1.1　實驗設計的直覺性定義

「實驗設計」是一種統計學的應用，具體來說，是探討以下幾種分析方法[1]的學問：

・一因子變異數分析
・二因子變異數分析
・多因子變異數分析
・直交表實驗

這些分析方法，皆屬於第三章將介紹的「統計學假說檢定」分析方法。

為了能讓您早點體會實驗設計的精神，在此先舉例說明一因子變異數分析和二因子變異數分析。

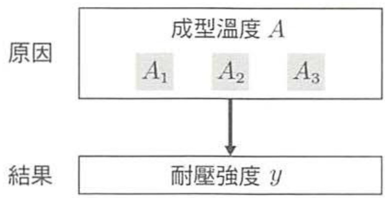
1　「直交表實驗是一種分析方法的名字嗎？」要回答這個問題相當地不容易，在此先姑且把它視為分析方法的名字，才方便我繼續說明下去，請讀者們諒解。

一因子變異數分析

某個便當盒製造商對他們的產品做了耐壓強度實驗，實驗結果如下表：

	成型溫度 A	耐壓強度 y
實驗1	A_1	2
實驗2	A_1	1
實驗3	A_2	10
實驗4	A_2	7
實驗5	A_3	4
實驗6	A_3	6

若我們假設變數間的因果關係如下圖所示：



並以此來進行一因子變異數分析，就能判斷耐壓強度是否會受到成型溫度的影響，且能進一步回答下面的問題：

- 如果便當盒的耐壓強度確實受到成型溫度的影響，那麼能夠達到耐壓強度最高的成型溫度是A_1、A_2還是A_3？換句話說，最佳的A_i是哪一個？

一因子變異數分析是實驗設計的入門，其中被分析者認為是「原因」的變數，如本例中的成型溫度，在實驗設計中稱為「因子」；而分析者對因子的不同「選擇」，如本例中的A_1、A_2、A_3，在實驗設計中則稱為「水準」。

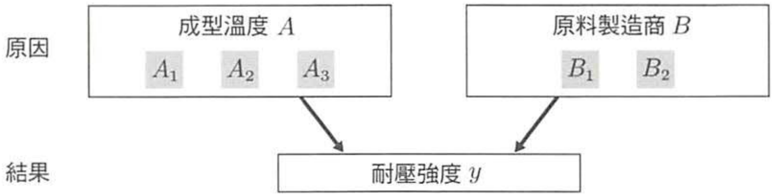
這樣的分析方式只有一個因子，故名為一因子變異數分析。

二因子變異數分析

某個便當盒製造商對他們的產品做了耐壓強度實驗，實驗結果如下表：

	成型溫度 A	原料製造商 B	耐壓強度 y
實驗1	A_1	B_1	2
實驗2	A_1	B_2	1
實驗3	A_2	B_1	10
實驗4	A_2	B_2	7
實驗5	A_3	B_1	4
實驗6	A_3	B_2	6

若我們假設變數間的因果關係如下圖所示：



並進行二因子變異數分析，就能回答以下問題：

- 耐壓強度是否會受到成型溫度或原料製造商的影響？
- 如果便當盒的耐壓強度確實受到成型溫度的影響，那麼能夠讓耐壓強度達到最高的成型溫度是A_1、A_2還是A_3？換句話說，最佳的A_i是哪一個？
- 如果便當盒的耐壓強度確實受到原料製造商的影響，那麼能夠讓耐壓強度達到最高的原料製造商是B_1還是B_2？換句話說，最佳的B_j是哪一個？

再強調一次，這個例子中包括「成型溫度」與「原料製造商」兩個因子。前者可分為A_1、A_2、A_3三個水準，後者可分為B_1、B_2兩

個水準。

由於這樣的分析方式有兩個因子，故名為二因子變異數分析。依此類推，如果有三個因子就叫作三因子變異數分析，四個因子就叫作四因子變異數分析，而三因子以上的變異數分析，總稱為「多因子變異數分析」。

1.2 實驗設計的詳細定義

實驗設計有幾個重點：

- 在容許一定範圍之誤差存在的前提下，
- 為使我們有興趣的變數之值（特徵數）達到理想的範圍，
- 選擇一或數個與該統計量可能有所關聯的變數（因子），
- 選擇該因子的數個水準進行實驗，
- 將實驗所測得的特徵數做進一步之資料分析，而實驗設計就是這個統計方法的總稱。

也就是說，實驗設計是一門處理以下兩個問題的方法論：

- 藉何種方法得到資料（如何進行實驗）。
- 得到的資料該用何種方式分析。[2]

也許有的讀者會完全不了解這到底是什麼，不過就算現在不了解也沒有關係，讀完本書後，請再重新回來看看這一段，你一定會覺得「啊，原來是這麼一回事！」而點頭同意。

2　改寫自永田靖的《入門　実験計画法》（日科技連出版社）的序。

2. 資料分析方法

2.1 「探索型」與「驗證型」

資料分析方法可分為「探索型」與「驗證型」兩種。

「探索型」的資料分析流程：

①手邊有一些資料。
②試著用各種方式進行分析，得到許多分析結果。
③得到「由分析結果看來，事情應該是這麼回事吧！」之類，事後諸葛般的結論。
④向大眾發表分析結果。

「驗證型」的資料分析流程：

①建立假說。
②為了確認假說是否成立，擷取資料並加以分析。
③決定應該要接受假說或是拒絕假說。
④向大眾發表分析結果。

在「探索型」的資料分析中，只要手邊有資料，就能馬上進行分析是其一大優點；然而能夠自由選擇、篩選資料，來強加變數間的因果關係，使結論能隨著分析者的意志而有調整的空間，這一點是其一大缺點。分析者只要在分析時動點手腳，就能得到「任何想要的結果」，所以說，探索型的資料分析就算發表了分析結果，也可能因為說服力不夠，而被其他人否定。

在「驗證型」的資料分析中，一開始就必須設立假說，使得分析工作在起初即顯得較為複雜，這是它的一大缺點；然而，因為是在設立假說後才進行資料的擷取與分析，因此若是假說成立，就可得到說服力高、易被其他人接受的結論。就算分析結果否定了假說，也能得到「至少我們了解到這個假說並不正確」的結論，對今後的研究也算是有所貢獻，分析工作並非完全沒有意義。

2.2　資料分析方法與實驗設計

實驗設計所使用的各種分析方法中，也可分為偏「探索型」的方法，以及偏「驗證型」的方法，一如下表。而第六章將說明的「亂塊法」及「分割法」則是決定實驗順序的方式，並非分析資料的方法，故不在下表內。

偏「探索型」的方法	偏「驗證型」的方法
・直交表實驗 ・參數設計	・一因子變異數分析 ・二因子變異數分析 ・多因子變異數分析

補充說明，直交表實驗的用途較傾向於從許多可以作為因子的變數中，找出適合用來分析的因子；另一方面，一因子變異數分析、二因子變異數分析，或多因子變異數分析則如第3～4頁的例子所述，分析者需在分析前，就先選好欲分析的因子，換句話說，變異數分析的用途為：

- 驗證選擇的因子是否就是造成差異的真正原因。
- 若選擇的因子就是造成差異的真正原因，便能找出該因子的最佳水準。

第2章　統計學的基礎知識

背景知識

第1章
實驗設計是什麼？

第2章
統計學的基礎知識

第3章
統計學假說檢定

主　題

第4章
一因子變異數分析

第5章
二因子變異數分析

第6章
理想的實驗順序

第7章
直交表實驗

第8章
參數設計

第 2 章　統計學的基礎知識

如標題所述，本章將解說統計學的基礎知識。

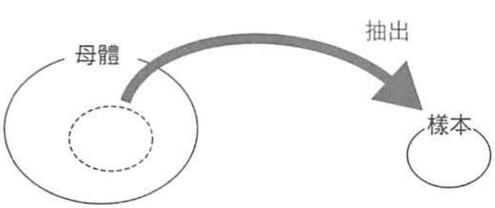
1. 統計學

1.1　母體與樣本

舉個例來說，今天早上的××報紙中提到：「根據昨天做的民調，目前首相支持率為38%。」看到這消息，鳥越先生疑惑地歪了一下頭。因為鳥越先生今年27歲，是個有選舉權的公民，然而從來沒有人來問過他：「你支持現任的首相嗎？」顯然這份民調並沒有徵詢到鳥越先生的意見。「為什麼明明沒問到我這個公民的意見，卻能夠斷定現任首相的支持率是38%呢？」鳥越先生越想越摸不著頭緒，頭又歪得更厲害了。

再來舉個例，本週的電視節目雜誌提到：「上週△△偶像劇的收視率為15.2%。」看到這個消息，鳥越先生又疑惑地歪了一下頭。因為鳥越先生上週也有看△△偶像劇，然而從來沒有人來問他：「你有看△△偶像劇嗎？」顯然這份收視率調查並沒有徵詢到鳥越先生的意見。「為什麼明明沒問到我這個觀眾的意見，卻能夠斷定△△偶像劇的收視率是15.2%呢？」鳥越先生越想越摸不著頭緒，頭又歪得更厲害了。

鳥越先生會感到疑惑是當然的，請參考下圖。

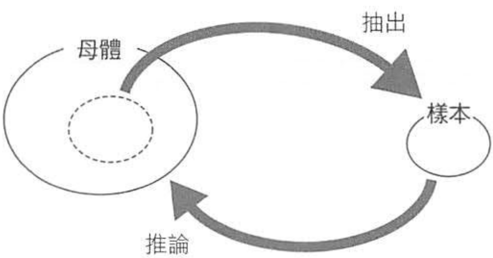


「擁有選舉權的所有公民」或「家中有電視的所有家庭」之類的、我們想調查之對象所構成的族群，在統計學上稱作「母體」；而從母體中抽出（＝選出）來的數個個體的集合，則稱作「樣本」[1]。報社或收視率調查公司所做的，並非普查母體，而是分析從母體中抽出來的樣本。顯然這個樣本中並不包含鳥越先生，沒調查到鳥越先生的意見，才讓鳥越先生感到疑惑。

在大多數的情況下，要以母體為對象做普查是非常困難的，因為這會耗費大量的勞力及時間。

因此報社和收視率調查公司選擇研究抽出的樣本。遺憾的是，若不普查母體，就絕對不可能知道首相支持率或收視率的精確值。

讓人困擾的是，如果可以我們當然希望能夠普查整個母體，但在實務上卻做不到。不過，若我們只是想盡可能了解母體的情況，就算沒那麼精準也沒關係，有沒有其他辦法呢？想解決這樣的問題，「統計學」即是不可或缺的重要工具。所謂的統計學，就是希望能夠從樣本的資訊中，推論出母體情況的學問。



1.2　推論統計學與敘述統計學

剛才提到的說明：「所謂的統計學，就是希望能夠從樣本的資訊中，推論出母體情況的學問」，雖然不能說是錯的，但仍然不夠充分。

統計學可分成「推論統計學」與「敘述統計學」兩大類別，剛

1　樣本中所包含的個體個數稱為「樣本大小」。

才那句話所描述的其實只是前者，而後者又是怎麼一回事呢？所謂的敘述統計學，研究的是如何蒐集、整理、分析資料，將一個團體的情況用最簡單明瞭的方式呈現出來，我們也可以把它想成以整個母體為調查對象的統計學。

也許讀者會覺得上述關於敘述統計學的說明過於抽象，那麼就讓我們用下面的例子來說明吧。大家在念國中或高中的時候，老師是不是說過類似「本班的平均分數是58.4喔！」之類的話呢？老師算出全班平均分數這件事，並不是想要由抽樣的學生分數去推論母體的情況，而是想要將本班的考試情形用最簡單明瞭的方式告訴大家[2]。敘述統計學就是以這樣的觀點來做研究的統計學。

2. 資料類別

資料可分為兩大類，分別是「可測量的資料」及「無法測量的資料」。「可測量的資料」稱為「數量資料」或「屬量資料」；「無法測量的資料」稱作「類別資料」[譯註1]或「屬質資料」。

下表舉例說明數量資料與類別資料的差別：

	一天內喝的啤酒量（ml）	覺得舒適的室溫（℃）	對於M運動飲料的評價	性別
回答者1	350	18	難喝	女
回答者2	350	21	好喝	男
回答者3	500	21	不好也不壞	男
回答者4	700	17	難喝	女
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

數量資料　　　　類別資料

2　要注意的是，在這個例子中，我們將整個母體（本班所有同學）當作樣本，統計學中也允許將整個母體當作樣本。

譯註1　原文「カテゴリーデータ」及「カテゴリカルデーター」意思完全相同，故只譯出其中一個。

3. 離差平方和、變異數與標準差

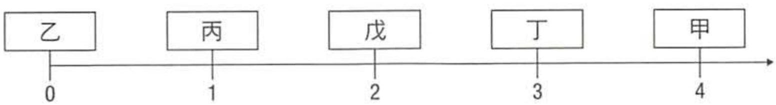
3.1 離差平方和[譯註2]、變異數與標準差

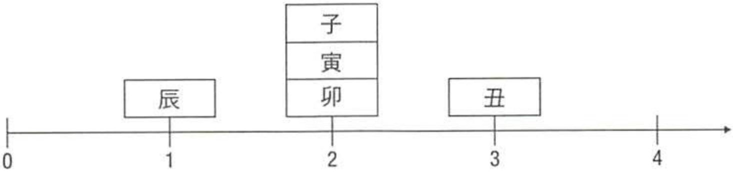
在這個營業區域內有本公司和一家對手公司，上個月這兩家公司的業務員所售出的汽車台數表列如下：

本公司業務員	售出汽車數（台）
甲	4
乙	0
丙	1
丁	3
戊	2

對手公司業務員	售出汽車數（台）
子	2
丑	3
寅	2
卯	2
辰	1

將上表圖形化後可得到下圖：





譯註2　原文為「平方和」，但中文常稱作「離差平方和」，只有在做變異數分析時，才會簡稱「平方和」。

雖然本公司和對手公司的平均值皆為2，然而兩間公司的銷售情況卻給人相當不一樣的感覺。從資料看來，本公司業務員的銷售能力可說是參差不齊，亦即資料的「分散程度」很大。

在統計學裡，我們可以用三種指標來描述資料的「分散程度」：「離差平方和」、「變異數」與「標準差」。三者皆具有以下特徵：

- 最小值為0。
- 資料的「分散程度」越大，三者的值皆越大。

「離差平方和」在許多分析方法的計算過程中時常可以見到，求取離差平方和的公式為：

$$(\text{個別數據}-\text{平均值})^2\text{的總和}$$

離差平方和有一個致命的缺陷，那就是資料越多，離差平方和就會越大，故實務上極少以離差平方和作為「分散程度」的指標。

而「變異數」則可解決這個致命缺陷，求取變異數的公式為[3]：

$$\frac{\text{離差平方和}}{\text{資料個數}}$$

「標準差」在本質上和變異數是一樣的，求取標準差的公式為：

$$\sqrt{\text{變異數}}$$

本公司每位業務員銷售能力的離差平方和、變異數與標準差如下所示：

離差平方和	$\begin{aligned} & (4-2)^2+(0-2)^2+(1-2)^2+(3-2)^2+(2-2)^2 \\ = \; & 2^2+(-2)^2+(-1)^2+1^2+0^2 \\ = \; & 10 \end{aligned}$

3 除上述形式外，變異數還有另一種形式，稱為「不偏變異數」，其計算公式是將原公式的分母由「資料個數」改為「資料個數　減　1」。要說明兩者之間的差異會用到相當大的篇幅，故在本書中不做詳述。

變異數	$\frac{10}{5}=2$
標準差	$\sqrt{2} \fallingdotseq 1.4$

另外，對於任意常數v，「原資料的離差平方和」必定與「原資料的每個數值皆減v後，所得之新資料的離差平方和」相等。換句話說，下列等式一定會成立：

$$\left(y_1-\frac{y_1+\cdots+y_n}{n}\right)^2+\cdots+\left(y_n-\frac{y_1+\cdots+y_n}{n}\right)^2$$
$$=\left((y_1-v)-\frac{(y_1-v)+\cdots+(y_n-v)}{n}\right)^2+\cdots+\left((y_n-v)-\frac{(y_1-v)+\cdots+(y_n-v)}{n}\right)^2$$

3.2 標準差的意義

標準差只不過是把變異數開根號所得的數值，也許會有讀者懷疑標準差有什麼意義。

請再觀察一次變異數的分子，在運算過程中我們把資料做了一次平方，無意間，資料的單位也跟著被平方了。要是想把這個平方後的單位還原，應該要怎麼做呢？顯然只要再把它開根號就可以了。沒錯，真要說，標準差的意義就在於，它是分散程度「將單位還原後的指標」。

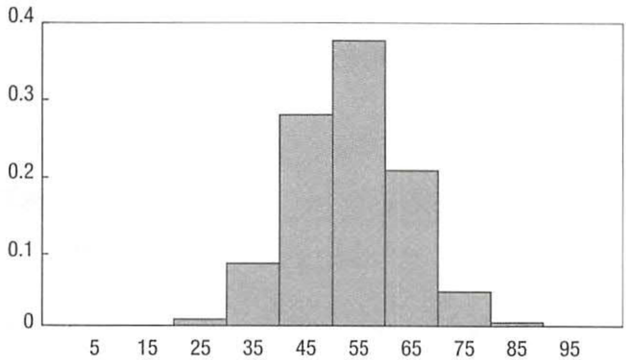
4. 機率密度函數

4.1 機率密度函數

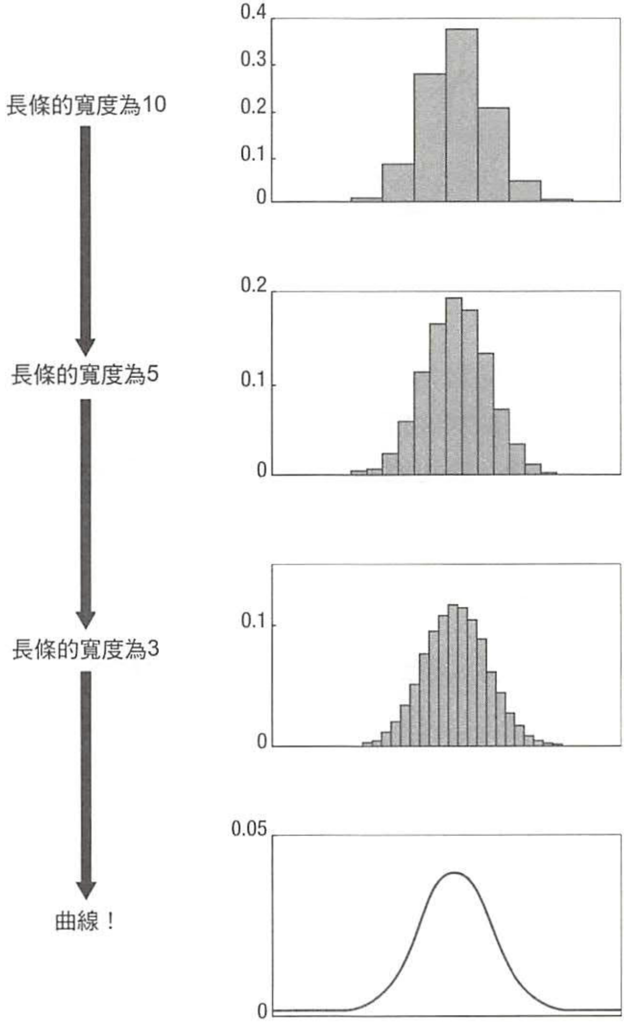
舉個例來說，香川縣的「所有」高三生，參加了由某個升學補習班所舉辦的英語考試。其成績結果如下表：

	英語考試成績
學生1	42
學生2	91
⋮	⋮
學生10421	50
平均值	53
標準差	10

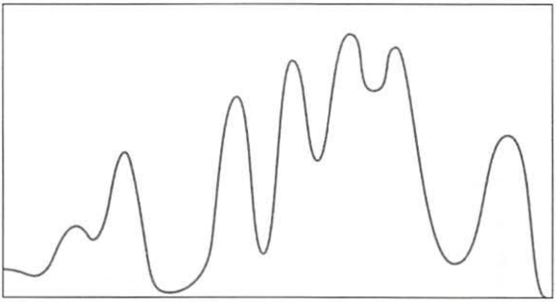
下圖為以上表的資料為基礎，製作出來的「直方圖」。橫軸表示分數，縱軸表示比例。橫軸從0分開始，每10分為一個區間，即每個長條的寬度為10，而橫軸上標示的是每個區間的中間值。



由下圖我們可以發現，若將長條的寬度逐漸縮小，直方圖的輪廓會越來越接近平滑的曲線。「將直方圖中的長條寬度縮小到極限，所得到的曲線，以函數形式表示之」在統計學上稱為「機率密度函數」。



由前頁或下圖所舉的例子，我們可以想像得到，機率密度函數在理論上有無限多種。



本節將介紹任何一本初級統計學的書籍中，一定會提到的幾個主要機率密度函數。

因為機率密度函數是一個相當抽象的概念，所以若只有機率密度函數，並沒有辦法構成統計學的核心。不過在下一章提到的「統計學假說檢定」中，將可看到機率密度函數在幕後扮演著相當重要的角色。

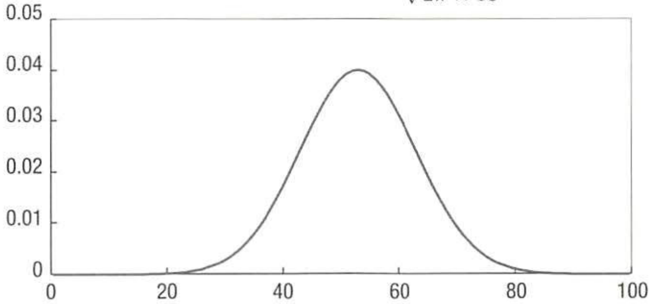
4.2 常態分配

統計學中常常可以看到下面這種機率密度函數：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times x\text{標準差}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - x\text{平均值}}{x\text{標準差}}\right)^2}$$

如果x的機率密度函數可以整理成上面的形式，那麼在統計學上，我們可以說「x服從平均值為○○、標準差為△△的常態分配」。舉例來說，如果剛才所提到的例子中，「香川縣的『所有』高三生的英語考試成績」的機率密度函數如下圖所示：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times 10} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-53}{10}\right)^2}$$



那麼我們就可以說「『英語考試成績』服從平均值為53、標準差為10的常態分配」。

以平均值為中心左右對稱，是常態分配的一大特徵。

4.3　面積＝比例＝機率

接下來要進入本節最重要的部分。

常態分配的圖形中，整條曲線和橫軸之間所夾的面積為1，而且常態分配圖形的其中一段曲線和橫軸所夾的面積，可視為佔全體的比例或者是機率。這到底在講什麼呢？讓我們藉著本頁下方的例子來說明。

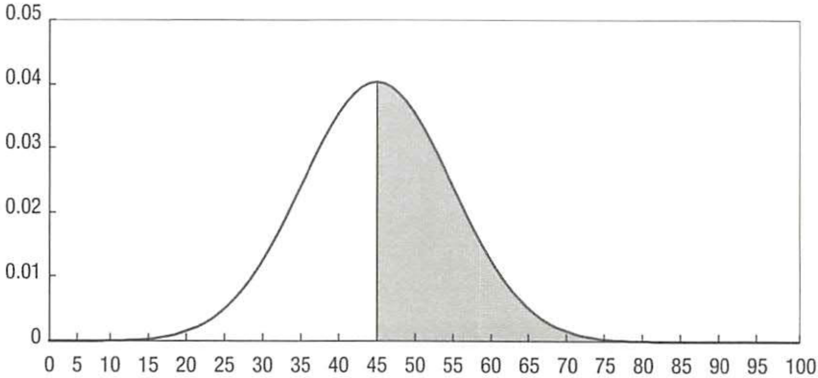
另外，不只是常態分配，任何機率密度函數的曲線與橫軸所夾的面積皆為1，而且機率密度函數的其中一段曲線和橫軸所夾的面積，也都可視為佔全體的比例或者是機率。

例

茨城縣的「所有」高一生，參加了某個升學補習班的數學考試。根據統計結果，我們發現「數學考試成績」可視為平均值為45、標準差為10的常態分配。

那麼，讓我們來好好思考一下以下的三個句子，它們講的其實是同一件事。

①下圖是平均值為45、標準差為10的常態分配，其中著色部分的面積是0.5。



②考試成績在45分以上的應考生，佔所有應考生的比例為0.5（＝50%）。

③從所有應考生中，隨機地抽出1人。他的考試成績在45分以上的機率為0.5（＝50%）。

4.4 卡方分配

在統計學中常常會看到下面這種機率密度函數：

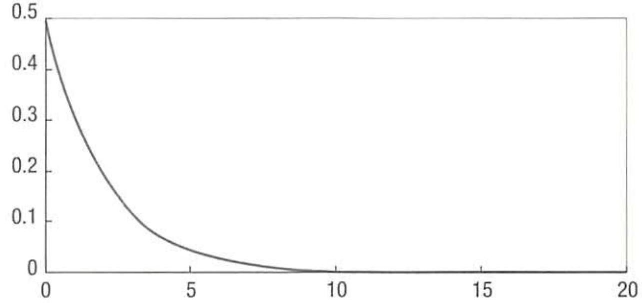
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{\text{自由度}}{2}}\times\int_0^{\infty}x^{\frac{\text{自由度}}{2}-1}e^{-x}dx}\times x^{\frac{\text{自由度}}{2}-1}\times e^{-\frac{x}{2}}\text{，當}x>0\text{時}\\ 0\text{，其他情形時}\end{cases}$$

如果x的機率密度函數可以整理成上面的形式，那麼在統計學上，我們可以說「x服從自由度為○○的卡方分配」。

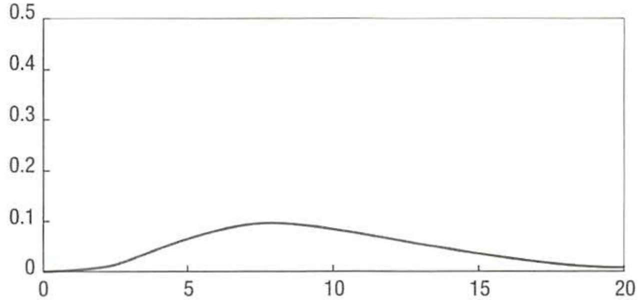
「自由度又是什麼呢？」也許有的讀者會有這樣的疑惑。事實上，問「自由度是什麼呢？」就像是在問「一次函數$f(x)=ax+b$中，a是什麼意思呢？」一樣。所謂的自由度，其實只是一個「會

影響卡方分配的函數圖形的數值」而已，除此之外並無其他重要意義。所以沒有必要去斤斤計較「自由度」這個名詞中的「自由」二字。

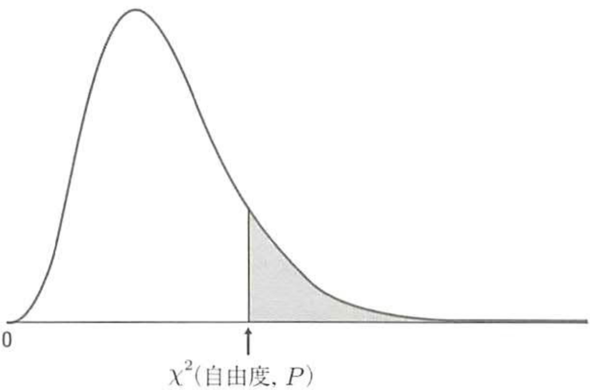
自由度為2的情形



自由度為10的情形



為了實務上的方便，統計學家們建構了「卡方分配表」。下圖中，著色區域代表的機率為P（＝面積＝比例），橫軸標記的是P所對應的χ^2值，其中「χ^2」讀作「卡方」。



下表列出一部分的卡方分配表：

自由度 \ P	0.995	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	5.9915	7.3778	9.2104	10.5965
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	7.8147	9.3484	11.3449	12.8381
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	9.4877	11.1433	13.2767	14.8602
5	0.4118	0.5543	0.8312	1.1455	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

例

自由度為2，且P值為0.05時，χ^2（自由度, P）為5.9915，換句話說，χ^2（2, 0.05）＝5.9915。

4.5　t 分配

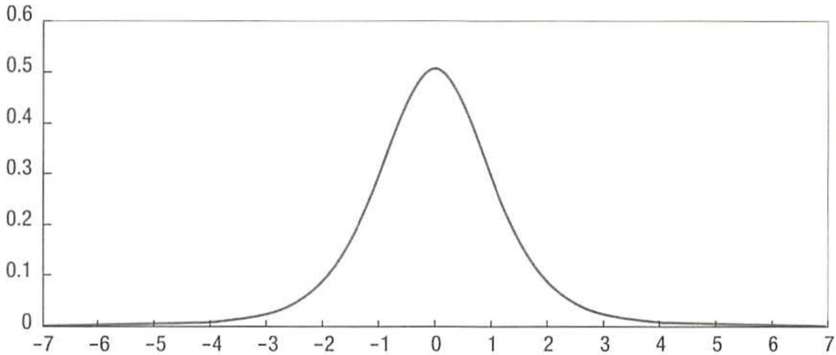
統計學中常常可以看到下面這種機率密度函數：

$$f(x) = \frac{\int_0^\infty x^{\frac{\text{自由度}+1}{2}-1} e^{-x} dx}{\sqrt{\text{自由度} \times \pi} \times \int_0^\infty x^{\frac{\text{自由度}}{2}-1} e^{-x} dx} \times \left(1 + \frac{x^2}{\text{自由度}}\right)^{-\frac{\text{自由度}+1}{2}}$$

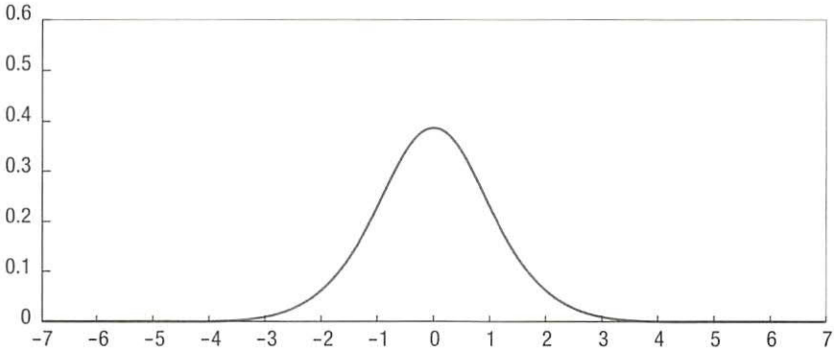
如果x的機率密度函數可以整理成上面的形式，那麼在統計學上，我們可以說「x服從自由度為〇〇的t分配」。

以0為中心左右對稱，是t分配的一大特徵。

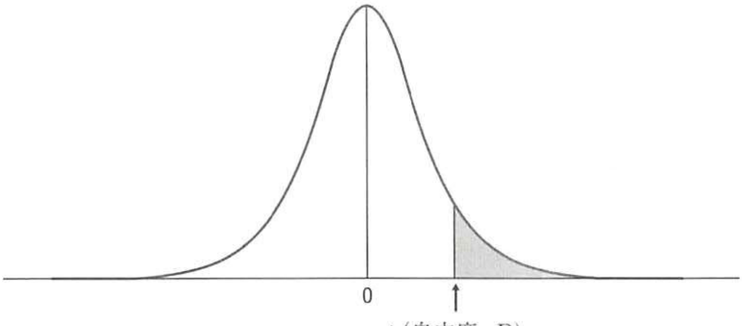
自由度為5的情形



自由度為8的情形



為了實務上的方便，統計學家們建構了「t分配表」。下圖中，著色區域代表的機率為P（＝面積＝比例），橫軸標記的是P所對應的t值。



下表列出一部分的t分配表：

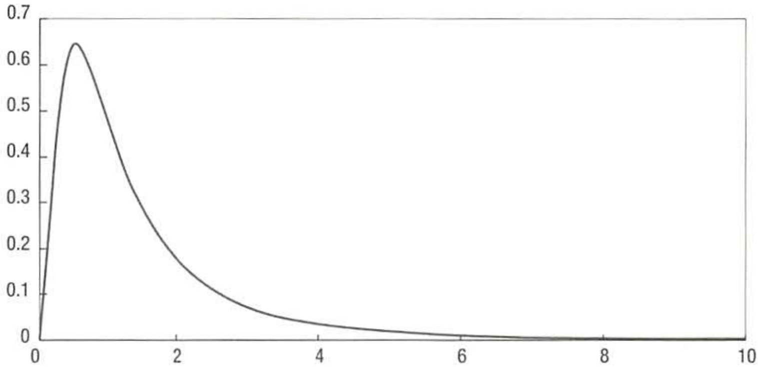
自由度 \ P	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.0777	6.3137	12.7062	31.8210	63.6559
2	1.8856	2.9200	4.3027	6.9645	9.9250
3	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8408
4	1.5332	2.1318	2.7765	3.7469	4.6041
5	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.9979	3.4995
8	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

例

自由度為8且P值為0.05時，t（自由度, P）為1.8595。也就是說，t（8, 0.05）＝1.8595。

4.6 F分配

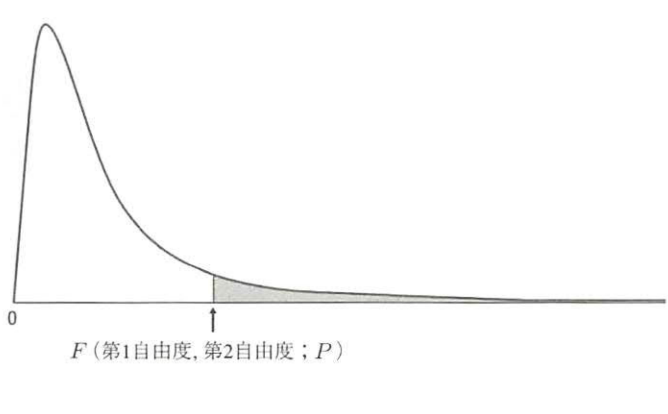
統計學中，F分配是一種常常會碰到的機率密度函數。如果x的機率密度函數的圖形如下圖所示：



那麼在統計學上，我們可以說「x服從第1自由度為7、第2自由度為5的F分配」。由於F分配的機率密度函數式過於複雜，我們不打算在此多加說明。

F分配是實驗設計中頻繁使用，且佔有舉足輕重之地位的機率密度函數。

為了實務上的方便，統計學家們建構了「F分配表」。下圖中，著色區域代表的機率為P（＝面積＝比例），橫軸標記的是P所對應的F值。



下表列出一部分P值為0.05的F分配表：

第2 \ 第1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	…
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	…
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	…
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	…
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	…
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	…
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	…
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	…
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	…
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	…
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	…
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

例

第1自由度為2、第2自由度為9，且P值為0.05時，F（第1自由度，第2自由度；P）為4.26。也就是說，F（2,9;0.05）為4.26。

5. Cramér相關係數

本節所提到的知識，對於理解實驗設計來說幾乎沒有什麼幫助，但對理解下一章是有幫助的，而下一章的知識，對於理解實驗設計則有相當大的幫助。在進入本節的內容前，請先了解這樣的關係。

5.1　Cramér相關係數

「Cramér相關係數」是一種指標，用來描述類別資料與類別資料之間的關係，也有人稱之為「Cramér連關係數[譯註3]」或「Cramér's V」。

Cramér相關係數的值域範圍在0到1之間。如果兩個變數間的關係越強，就越接近1；關係越弱，就越接近0。

5.2　應用例

有部電影預計要在今年秋天上映，發行商想請廣告公司為這部電影做一個廣告，刊登在「讀者群為20～30歲的雜誌」上。廣告公司接到了這樣的委託後，提出了A、B、C三種廣告方案。

這個廣告公司從「所有住在日本的20～30歲國民」中，隨機地抽出300人為對象進行問卷調查，其調查結果如下表：

	喜歡的廣告方案	性別
回答者1	C案	女
回答者2	A案	女
⋮	⋮	⋮
回答者300	B案	男

譯註3　「Cramér相關係數」、「Cramér連關係數」等翻譯名稱僅供參考，中文統計學書籍中較少見，一般直接稱作Cramér's V。

將前頁的調查結果整理過後可得到以下的「列聯表」，由此表能夠看出：不同性別的人對於廣告方案會有不一樣的偏好。換句話說，先不論其相關的程度如何，我們可以大略看出「性別」與「喜歡的廣告方案」之間有所關聯。

		喜歡的廣告方案			合計
		A案	B案	C案	
性別	男性	34	61	53	148
	女性	38	40	74	152
合計		72	101	127	300

在152名受訪女性中，回答喜歡C案的有74人。

依照以下所列出的STEP 1到STEP 5的步驟計算，就可求出「性別」與「喜歡的廣告方案」的Cramér相關係數。在此先公布其計算結果：「性別」與「喜歡的廣告方案」的Cramér相關係數為0.1634。

STEP1

先將原始資料整理成如下的列聯表，粗框中每一格的數值稱為「實際次數」。

		喜歡的廣告方案			合計
		A案	B案	C案	
性別	男性	34	61	53	148
	女性	38	40	74	152
合計		72	101	127	300

STEP2

按照下表的方式進行計算，粗框中每一格的數值稱為「期望次數」。

		喜歡的廣告方案			合計
		A案	B案	C案	
性別	男性	$\frac{148\times 72}{300}$	$\frac{148\times 101}{300}$	$\frac{148\times 127}{300}$	148
	女性	$\frac{152\times 72}{300}$	$\frac{152\times 101}{300}$	$\frac{152\times 127}{300}$	152
合計		72	101	127	300

$$\frac{\text{「女性」的資料筆數}\times\text{「C 案」的資料筆數}}{\text{總資料筆數}}$$

如果「性別」與「喜歡的廣告方案」完全沒有關係，那麼不管男性還是女性，其

A案：B案：C案

的數值都應該要與STEP 2表中的「合計」一致，皆為

$$
\begin{aligned}
&72:101:127\\
&=\frac{72}{72+101+127}:\frac{101}{72+101+127}:\frac{127}{72+101+127}\\
&=\frac{72}{300}:\frac{101}{300}:\frac{127}{300}
\end{aligned}
$$

才對。也就是說，這個數值就是假設「性別」與「喜歡的廣告方案」完全沒有關係時，「喜歡C案的女性人數」之期望數值。

$$152\times\frac{127}{300}=\frac{152\times 127}{300}$$

STEP3

接著計算 $\dfrac{（\text{實際次數}-\text{期望次數}）^2}{\text{期望次數}}$ 的數值

		喜歡的廣告方案			合計
		A案	B案	C案	
性別	男性	$\dfrac{\left(34-\dfrac{148\times 72}{300}\right)^2}{\dfrac{148\times 72}{300}}$	$\dfrac{\left(61-\dfrac{148\times 101}{300}\right)^2}{\dfrac{148\times 101}{300}}$	$\dfrac{\left(53-\dfrac{148\times 127}{300}\right)^2}{\dfrac{148\times 127}{300}}$	148
	女性	$\dfrac{\left(38-\dfrac{152\times 72}{300}\right)^2}{\dfrac{152\times 72}{300}}$	$\dfrac{\left(40-\dfrac{152\times 101}{300}\right)^2}{\dfrac{152\times 101}{300}}$	$\dfrac{\left(74-\dfrac{152\times 127}{300}\right)^2}{\dfrac{152\times 127}{300}}$	152
合計		72	101	127	300

要是實際次數與期望次數相差越大，即「性別」與「喜歡的廣告方案」之間的關係越大，那麼粗框內每一格的數值也會越大。

STEP4

若我們將STEP 3 表中，粗框內的值加總起來，所得到的值稱作「Pearson's卡方統計量」。自此之後，我們將「Pearson's卡方統計量」記為「χ_0^2」。

$$
\begin{aligned}
\chi_0^2 &= \frac{\left(34-\frac{148\times72}{300}\right)^2}{\frac{148\times72}{300}}+\frac{\left(61-\frac{148\times101}{300}\right)^2}{\frac{148\times101}{300}}+\frac{\left(53-\frac{148\times127}{300}\right)^2}{\frac{148\times127}{300}}\\
&\quad+\frac{\left(38-\frac{152\times72}{300}\right)^2}{\frac{152\times72}{300}}+\frac{\left(40-\frac{152\times101}{300}\right)^2}{\frac{152\times101}{300}}+\frac{\left(74-\frac{152\times127}{300}\right)^2}{\frac{152\times127}{300}}\\
&= 8.0091
\end{aligned}
$$

由STEP 3的計算過程可以了解到，要是實際次數與期望次數相差越大，即「性別」與「喜歡的廣告方案」之間的關係越大，那麼Pearson's卡方統計量χ_0^2也會越大。

STEP5

利用下列公式，求出「Cramér相關係數」的值。

$$
\sqrt{\frac{\chi_0^2}{\text{全部資料筆數}\times(\min\{\text{列聯表的行數},\text{列聯表的列數}\}-1)}}
$$

其中符號min{a, b}代表從a和b中取較小的數。

$$
\sqrt{\frac{8.0091}{300\times(\min\{2,3\}-1)}}=\sqrt{\frac{8.0091}{300\times(2-1)}}=\sqrt{\frac{8.0091}{300}}=0.1634
$$

5.3 Cramér相關係數的評定標準

遺憾的是，統計學中對於「Cramér相關係數之值要大於多少，我們才可以說兩個變數的關聯性很強」的看法並沒有一定的基準。以下是筆者提供的參考標準：

Cramér相關係數		較為詳細的分析	較為粗略的分析
1.0～0.8	→	關聯性非常強	
0.8～0.5	→	關聯性強	有關聯
0.5～0.25	→	關聯性弱	
未滿0.25	→	關聯性非常弱	無關聯

第3章　統計學假說檢定

背景知識

第1章
實驗設計是什麼？

第2章
統計學的基礎知識

第3章
統計學假說檢定

主　題

第4章
一因子變異數分析

第5章
二因子變異數分析

第6章
理想的實驗順序

第7章
直交表實驗

第8章
參數設計

第3章 統計學假說檢定

在上一章的最後一節所舉的應用例中，我們得到的Cramér相關係數是0.1634。若以筆者提供的評定標準來看，可解釋為兩者的「關聯性非常弱」。

然而0.1634這個數值，是由從母體「所有住在日本的20～30歲國民」中，偶然抽出的300人的資料計算而來的。如果抽到的是另外300人，那麼我們計算出來的Cramér相關係數就不會是0.1634，也有可能得到接近0的數值。

那麼，究竟上一章最後一節所舉的應用例中，母體的Cramér相關係數到底是多少呢？遺憾的是，若是沒有把母體中所有人的數據都調查清楚，誰也無法知道其精確值。而且，並非只有上一章最後一節的應用例是這樣，一般來說，我們不太可能知道母體的Cramér相關係數的精確值。所以分析者在推測母體的Cramér相關係數時，只能用較為主觀且寬鬆的態度認定：「隨機地從母體中抽出300人的資料，求得其Cramér相關係數值為0.1634，那麼母體的Cramér相關係數也差不多是那樣吧！」

不幸的是，不管是多高深的統計學，都不可能求得母體的Cramér相關係數的精確值，不過卻有辦法推測母體的Cramér相關係數「有可能是0」或者「不太可能會是0」。雖然這樣的結論可能會讓人覺得有講跟沒講不是差不多嗎？然而，我們卻能夠藉由這樣的推論過程，用較為客觀的標準來評斷母體特性，這不也是件令人振奮的事嗎？

藉由「獨立性檢定」的統計分析方法，我們就可以推論出「母體的Cramér相關係數有可能是0」或「不太可能會是0」的結論，而本章將解說何謂獨立性檢定。

「統計學假說檢定[譯註1]」為統計學中數種分析方式的總稱，獨立性檢定為其中一種。本章首先會將假說檢定的原理大略解說一遍，

譯註1　中文教科書一般直接簡稱為假說檢定，之後皆譯為假說檢定。

再針對獨立性檢定詳細解說，最後才說明，與獨立性檢定並列為統計學中最有名的一種假說檢定：母體平均差之檢定。

獨立性檢定的原理也許不太能幫助你理解實驗設計的理論，卻有助於你理解母體平均差檢定的原理，而母體平均差檢定的原理，能夠幫助你理解實驗設計的理論。在進入本節內容前，請先了解這樣的關係。

1. 統計學假說檢定

1.1　假說檢定

所謂的「假說檢定」，指的是分析者藉由分析樣本的資料，推論一開始對母體所建立的假說是否正確的分析方式。由於「假說檢定」一詞過於冗長，通常會簡稱為「檢定」。

就像剛才所說的，假說檢定是分析者藉由分析樣本的資料，推論一開始對母體所建立的假說是否正確的分析方式，但並非「雖然不太明白其原理，不過只要『P值』這東西越小，也就是『顯著』的程度越高，這在數學上大概就OK了吧！」或「一種有數學理論背書的簡便方式」，有不少人對假說檢定會有這樣的誤解。希望不管是現在才第一次接觸假說檢定的人，抑或是曾經學過的人，都能夠注意這一點。

1.2　假說檢定的種類

就像剛才所說的，假說檢定並不是單一分析方式的名稱，而是數種分析方式的總稱。下表即整理出數種假說檢定的使用時機：

	使用時機
獨立性檢定	推論「所有住在日本的20～30歲國民」中，「性別」與「喜歡的廣告方案」的Cramér相關係數值是否比0還要大。
母體比例差之檢定	「A鎮所有具選舉權的公民」與「B鎮所有具選舉權的公民」對於兩鎮合併之議題的支持率是否相等。

母體平均差之檢定	「所有住在東京的大學生」與「所有住在大阪的大學生」平均每個月從雙親那裡拿到的零用錢是否相等。
一因子變異數分析	概念類似「母體有3個以上的母體平均差之檢定」
二因子變異數分析	概念類似「因子有2個以上的一因子變異數分析」

我們可以發現上表提到的例子中，不管哪一個例子都不是在工業上的應用。這是因為在工業上，要定義母體的範圍是相當困難的，對此，我們在第64頁會再詳細解釋。

1.3 假說檢定的步驟

不管是哪一種假說檢定，其步驟都是相似的，如下表所示。請先將下表大略地看過一遍，真的只要大略看過一遍就好。由於其中有許多專用術語還沒有解釋過，所以可能有些人會困惑地想：「這是什麼鬼東西啊？」這些專用術語在後面的篇幅中會有詳細的解釋，現在請先不要拘泥於這些文字。

STEP 1	定義母體的範圍
STEP 2	建立虛無假說以及對立假說
STEP 3	選擇應該要使用哪種「檢定」
STEP 4	決定顯著水準
STEP 5	從樣本的資料，求得檢定統計量的值。
STEP 6	確認STEP 5中求出的檢定統計量的值，是否在拒絕域內。
STEP 7	如果STEP 6中，檢定統計量的值在拒絕域內，則可做出「對立假說正確」[譯註2]，或者是「差異顯著」的結論；如果不在拒絕域內，結論會變成「虛無假說不能說是錯的」[譯註3]，或者是「差異並不顯著」的結論。

譯註2　中文統計學書籍通常稱作「拒絕虛無假說」。
譯註3　中文統計學書籍通常稱作「不拒絕虛無假說」。

2. 獨立性檢定

2.1　獨立性檢定

就像先前所說的，所謂的「獨立性檢定」是一種用來推論「母體的Cramér相關係數有可能是0」或「不太可能會是0」的分析方法，也可以說是一種「利用列聯表來推論兩個變數之間是否有關係」的分析手法。

獨立性檢定也被稱作「卡方檢定」，常常被用來分析各式各樣的問卷調查結果。另外，所謂的「卡方檢定」其實是所有與卡方分配相關之假說檢定的總稱。在接下來的說明中，馬上就會讓各位明白獨立性檢定與卡方分配之間的關係。

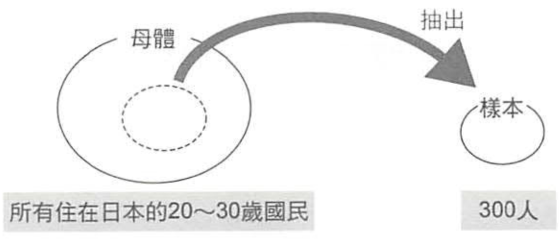
2.2　Pearson's卡方統計量與卡方分配

在解說獨立性檢定的應用例以前，讓我們先來看看作為獨立性檢定之基礎的重要原理。

雖然現實中不太可能做得到，但假設我們做了這樣的實驗：

STEP1

從我們定義的母體「所有住在日本的20～30歲國民」中，隨機地抽出300人作為樣本。



STEP2

以STEP 1所抽出的300人為對象，做一份27頁的問卷調查，求出其調查結果的Pearson's卡方統計量，即χ_0^2之值。

STEP3

將抽出來的300人放回母體。

STEP4

持續重複STEP 1到STEP 3的步驟。

如果母體「所有住在日本的20～30歲國民」的Cramér相關係數是0，那麼反覆操作上述步驟後，將得到的所有Pearson's卡方統計量χ_0^2繪製成直方圖，會得到一個自由度為2的卡方分配。換句話說，如果母體「所有住在日本的20～30歲國民」中，喜歡的廣告方案與性別的Cramér相關係數是0，那麼經上述步驟操作後，所得到的Pearson's卡方統計量將會服從自由度為2的卡方分配。

在此筆者將做個實驗以驗證上面的敘述，而為了使實驗能夠順利進行，筆者加了以下的限制條件：

・真正的母體「所有住在日本的20～30歲國民」約有1600萬人，要以其為對象進行調查是不可能的，所以我們將下表所列出的1萬人，當作「所有住在日本的20～30歲國民」。

	喜歡的廣告方案	性別
回答者1	C案	女
回答者2	A案	女
⋮	⋮	⋮
回答者10000	B案	男

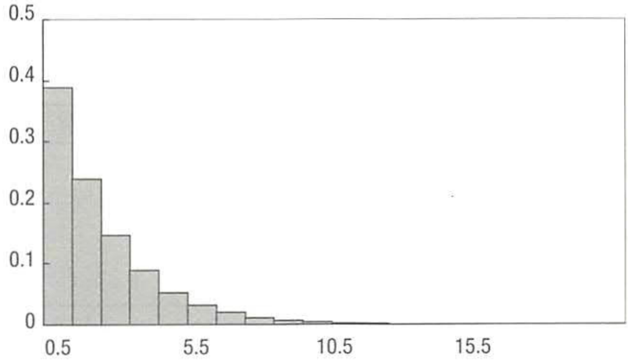
・假定「所有住在日本的20～30歲國民」中，喜歡的廣告方案和性別的Cramér相關係數是0，就能得到下表，其中男性和女性「A案：B案：C案」的比值是相等的。

		喜歡的廣告方案			合計
		A案	B案	C案	
性別	男性	600	2400	3000	6000
	女性	400	1600	2000	4000
合計		1000	4000	5000	10000

・由於沒有重覆次數的限制，我們就重覆操作STEP 1到STEP 3的步驟20000次。

實驗結果如下表所示，以下表的資料為基礎，可做成直方圖，筆者將之列於其下。

	Pearson's卡方統計量 χ_0^2
第1次	0.8598
第2次	0.7557
⋮	⋮
第20000次	2.7953



的確，上圖與第21頁「自由度為2的情形」的機率密度函數圖非常相似。Pearson's卡方統計量 χ_0^2，似乎真的會服從自由度為2的卡方分配。

雖然和實驗本身沒有直接關係，但在這裡想請各位注意一件事。自由度「2」是由以下的公式計算而來的：

$$(2-1)\times(3-1)=1\times 2=2$$

「男性」與「女性」，共有兩個分類。

「A案」、「B案」與「C案」，共有三個分類。

這個公式似乎有些讓人難以理解，不過就算不知道其原理，在實務上也不會有任何不便，請不要過於在意。

2.3 應用例

讓我們按照「問題 → 想法 → 解答」的順序，逐步說明。

問題

有部電影預計要在今年秋天上映，發行商想請廣告公司為這部電影做一個廣告，刊登在「讀者群為20～30歲的雜誌」上。廣告公司接到了這樣的委託後，提出了A、B、C三種廣告方案。

這個廣告公司從「所有住在日本的20～30歲國民」中，隨機地抽出300人為對象進行問卷調查。其調查結果如下表：

	喜歡的廣告方案	年齡	性別
回答者1	C案	24	女
回答者2	A案	27	女
⋮	⋮	⋮	⋮
回答者300	B案	21	男

而「性別」與「喜歡的廣告方案」的列聯表如下：

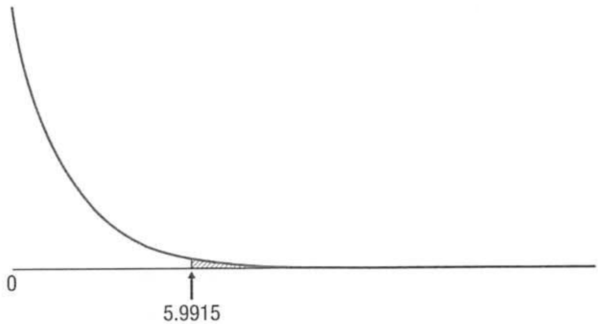
		喜歡的廣告方案			合計
		A案	B案	C案	
性別	男性	34	61	53	148
	女性	38	40	74	152
合計		72	101	127	300

請利用獨立性檢定判斷母體「所有住在日本的20～30歲國民」中，「性別」與「喜歡的廣告方案」的Cramér相關係數是否比0還大。換句話說，請判斷「性別」與「喜歡的廣告方案」是否有關係，其使用的顯著水準（※稍後會解釋）為0.05。

想法

如同第38頁所述，如果母體「所有住在日本的20～30歲國民」

中，「性別」與「喜歡的廣告方案」的Cramér相關係數值為0，那麼其Pearson's卡方統計量χ_0^2將服從自由度為2的卡方分配。因此可推論，如果母體「所有住在日本的20～30歲國民」中，「性別」與「喜歡的廣告方案」的Cramér相關係數值為0，則隨機抽出300人的資料所計算出來的χ_0^2之值比5.9915還要大的機率為0.05，一如第22頁的卡方分配表所示。



本節的應用例中，在第31頁所計算出來的χ_0^2值是 8.0091。你覺得這個值代表什麼意義呢？雖然這只是隨機從母體中抽出的300人，並不代表整個母體，但其計算出來的χ_0^2值似乎有點太大了。若把第31頁的說明文字也考慮進去，應該能夠很自然地得到這樣的結論：母體「所有住在日本的20～30歲國民」中，「性別」與「喜歡的廣告方案」的Cramér相關係數值比0還要大。

除了本節所提到的應用例之外，獨立性檢定也是按照以下的流程一步步進行的：

①先假設「母體的Cramér相關係數值為0」

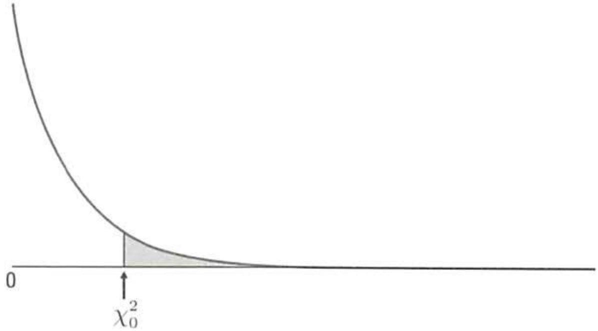
②求出樣本資料的χ_0^2值

③如果得到的χ_0^2值大到某個程度，就能得出「母體的Cramér相關係數值比0還要大」的結論

請把上述流程牢牢記住！

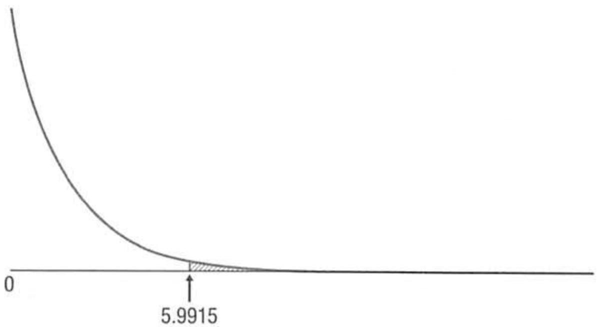
接下來，要為讀者補充說明上一段的步驟3。

如果χ_0^2值越大，下圖的著色部分，也就是機率，理所當然地會越小。

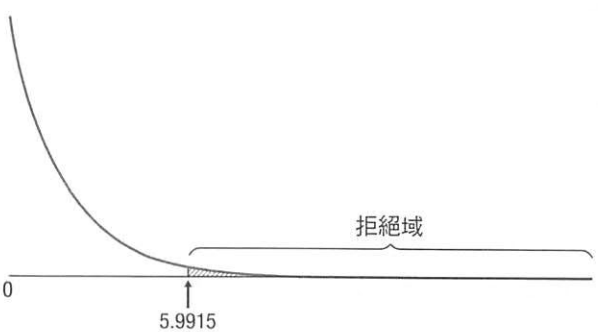


在獨立性檢定中，如果上圖中著色部分所代表的機率，比一般稱為「顯著水準」的值還要小，就能得出「母體的Cramér相關係數值比0還要大」的結論。通常，顯著水準會設定為0.05或0.01，而要取哪個值，則需由分析者視實驗的需求判斷。

如果我們使用的顯著水準為0.05，那麼顯著水準事實上就如同前頁的說明般，會與下圖斜線部分所代表的機率相等。



另外，下圖括弧的範圍稱作「拒絕域」。



解答

STEP1

定義母體範圍。

將「所有住在日本的20～30歲國民」定義為母體吧！

本來，在本節的應用例中就已經將母體定義為「所有住在日本的20～30歲國民」，所以如果只是要討論本節的應用例，其實是不需要STEP 1的。

舉個例來說，如果我們將「所有住在都市中，有選舉權的公民」當作母體，那麼所謂的「都市」，具體來說指的是哪些地方呢？是指「東京都與大阪府」嗎？還是指「每個都道府縣的縣廳所在地」呢？這個問題的答案應該要由分析者來決定，也就是說，實際上在做假說檢定的時候，分析者必須要自己定義母體的範圍。

不管是哪種假說檢定，如果不謹慎地定義好母體的範圍，就很容易陷入「咦？我剛才到底推論了什麼東西？」的窘境。陷入這種情況的分析者並不在少數，千萬要小心。

STEP 2

建立虛無假說與對立假說。

照著下面的方式建立假說吧！

虛無假說	母體的Cramér相關係數為0
對立假說	母體的Cramér相關係數比0還要大

第48～49頁將說明何謂「虛無假說」以及「對立假說」。

STEP 3

決定要進行哪一種「檢定」方法。

進行獨立性檢定吧！

本來在本節的應用例中，就已經決定要進行獨立性檢定了，所以如果只是要討論本節的應用例，其實是不需要STEP 3的。

然而在實際操作假說檢定的時候，分析者就必須依照自己的目的，選擇符合需求的假說檢定方法。

STEP4

決定顯著水準。

把顯著水準定成0.05吧！

本來在本節的應用例中，就已經將顯著水準設定成0.05了，所以如果只是要討論本節的應用例，其實是不需要STEP 4的。

然而在實際操作假說檢定的時候，分析者就必須自己決定顯著水準該設定為多少，就像剛才所說的，一般來說，我們會將顯著水準設定成0.05或0.01。

通常，我們會以符號「α」來表示顯著水準。

STEP5

從樣本資料中，求出檢定統計量的值。

接下來要進行的是獨立性檢定，而獨立性檢定的檢定統計量為Pearson's卡方統計量χ_0^2。在本節的應用例中，經過第31頁的計算過程後，我們可以得到的檢定統計量之值為8.0091。

另外，如果本節應用例中所建立的虛無假說是正確的，那麼計算出來的檢定統計量應該會服從自由度為2的卡方分配才對吧！

所謂的「檢定統計量」，是將所有樣本資料經數學轉換後，得到的一個數值。依照不同種類的假說檢定，我們會使用不同形式的檢定統計量。

STEP6

判斷STEP 5中所計算出來的檢定統計量之值，是否在拒絕域內。

我們算出來的檢定統計量，也就是Pearson's卡方統計量χ_0^2，為8.0091。而在顯著水準為0.05的情況下，由卡方分配表可得知，拒絕域為「5.9915以上」。顯然，檢定統計量在拒絕域內！

拒絕域的範圍會隨著顯著水準α的不同而有所改變。本節應用例中，如果α不是0.05而是0.01，由第22頁的卡方分配表可以得知，拒絕域為「9.2104以上」。

STEP7

如果STEP 6中得到的結果是檢定統計量之值在拒絕域內，則可得出「對立假說正確」，或者是「差異顯著」的結論；如果不在拒絕域內，結論會變成「虛無假說不能說是錯的」，或者「差異並不顯著」。

因為檢定統計量在拒絕域內，所以對立假說「母體的Cramér相關係數比0還要大」是正確的，換句話說，男女對於不同廣告方案之偏好的差異是顯著的！

在假說檢定中，就算檢定統計量之值在拒絕域內，我們也不能斷定「對立假說『絕對』正確」，我們頂多只能說：「雖然很想說對立假說『絕對』是正確的……但不幸的是，正確的可能並不是對立假說，而是虛無假說，而且虛無假說正確的機率最高為（α×100）%」。

3.「虛無假說不能說是錯的」

也許有的讀者不太明白STEP 7中，「虛無假說不能說是錯的」這一句話想表達的是什麼意思。

如果檢定統計量的值不在拒絕域內，我們應該能說「虛無假說是正確的」才對，然而在假說檢定中並不允許這麼做，我們頂多只能得到「虛無假說不能說是錯的」的結論。

舉例來說，假設前一節的應用例中，我們算出來的 χ_0^2 不是8.0091，而是2.5013。顯然檢定統計量並不在拒絕域內，那麼自然就不能得出「母體的Cramér相關係數比0還要大」的結論，但是我們也不能因此斷言「母體的Cramér相關係數是0」。

在此讓我們用更直觀的例子來說明。先不管假說檢定的種類或顯著水準這些繁瑣的東西，讓我們用以下列出的假說來進行假說檢定：

虛無假說	X是犯人
對立假說	X不是犯人

如果X能夠拿出非常充分的不在場證明，那麼「X不是犯人」此一論述就相當牢不可破，X是犯人的可能性變得微乎其微；相反的，如果X只能拿出曖昧不明的不在場證明，那麼「X不是犯人」的說法就很難站得住腳，然而卻也不能因為X的不在場證明不夠充分，就斷言「X是犯人」。

4. 虛無假說與對立假說

不管是獨立性檢定還是其他檢定，只要是進行假說檢定，都必須要建立「虛無假說」和「對立假說」。

要以簡單幾句話來說明這兩個假說分別代表什麼意義，並不是件容易的事，但是我們可以簡單地這樣描述：虛無假說通常會設成「母體的Cramér相關係數為0」、「平均值是A」、「B和C相等」之類，多為肯定句的敘述，其指涉的答案較為單一，而且證明起來比較困難；然而對立假說卻會設成「平均值不是A」、「B和C並不相等」之類，多為否定句的敘述，其指涉的答案有多種可能。總之，對立假說指的就是站在虛無假說對立面的假說。

假說檢定是種奠基於反證法的方法。大部分的讀者在高中的時候應該都有接觸過「證明$\sqrt{2}$為無理數」的題目，在下一頁中，我們將其證明過程與假說檢定做個比較，這樣應該可以讓大家更能掌握虛無假說與對立假說的概念吧！

	證明「$\sqrt{2}$為無理數」的流程	假設檢定的大致流程
①	先假設「$\sqrt{2}$為『有理數』」，換言之，先暫時否定「$\sqrt{2}$為無理數」的說法。 $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ ※注意這裡需假設m與n的最大公因數為1。	先暫時假設「『虛無假說』正確」，換句話說，先暫時否定「對立假說正確」的說法。
②	試著用各種方式驗證①的假設是否正確。 若將①的算式稍做變化，可得到 $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ 也就是 $2n^2 = m^2$ 由於等號左邊是一個偶數，所以m一定也會是偶數，也就是2的倍數。我們可以令 $m = 2k$ 。 接著將 $m = 2k$ 帶入 $2n^2 = m^2$ ，就能夠得到 $2n^2 = (2k)^2 = 4k^2$ ，化簡後得 $n^2 = 2k^2$ 。由於等號右邊是一個偶數，所以n一定會是2的倍數，我們可以令 $n = 2l$ 。	由樣本資料求取檢定統計量之值。
③	如果產生矛盾，那麼就可以確定①中所提出的假設是不正確的，也就是說，和①中提出的假設正好相反的說法：「$\sqrt{2}$為無理數」，才是我們的結論。 由②所推導出來的 $\begin{cases} m = 2k \\ n = 2l \end{cases}$ 與①中所提出的假設有矛盾，因此我們可以推論出與①的假設正好相反的說法：「$\sqrt{2}$為無理數」，才是我們的結論。	如果檢定統計量之值大到某個程度，就能夠推論①中所提出的假設是不太可能的，也就是說，和①中提出的假設正好相反的說法：「對立假說正確」，才是我們的結論。

5. P值與假說檢定的步驟

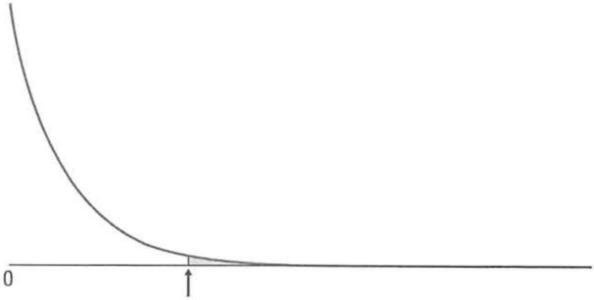
在假說檢定中，可以依據以下兩點來做出最後的結論。

①檢定統計量的值是否在拒絕域內

②P值是否比顯著水準還要小

目前我們只講解過①的理由，本節將會說明②的原理。

所謂的「P值」，指的是在虛無假說正確的情況下抽樣所得到的χ_0^2，與本次抽樣所得的χ_0^2相等，或是比χ_0^2還要大的機率[1]。在第3節所提到的應用例中，P值指的就是下圖著色部分所代表的機率。



在個人電腦普及之前（※大約是在1990年代初期），要動手去計算P值是相當麻煩的，因此當時的假說檢定在下結論的時候，通常採用①的論點作為判斷依據，然而現在採用②論點的人有逐漸增加的趨勢。這是因為，雖然P值的計算方式會隨著假說檢定的種類而改變，但只要利用Excel之類的軟體來計算，要求出P值就變得相當容易。

如果採用②的論點作為判斷依據，那麼假說檢定在STEP 6之後將會有所變化。以下將詳述其改變的地方。

STEP6

比較STEP 5中求出的檢定統計量之值所對應的P值，是否比顯

1　這裡所描述的是獨立性檢定中的P值意義，然而P值意義會隨著所使用的假說檢定種類的不同而有所差異。

著水準還要小。

顯著水準為0.05，而檢定統計量之值為8.0091，所對應的P值為0.0182。$0.0182 < 0.05$，P值比顯著水準還小呢！

就像剛才所說的，雖然P值的算法會隨著假說檢定的種類而改變，但只要利用Excel之類的軟體，要求出P值就會變得相當容易。

STEP7

STEP 6中，如果P值比顯著水準還要小，就能夠得出「對立假說正確」，也就是「差異顯著」的結論；如果P值比顯著水準還要大，結論就會是「虛無假說不能說是錯的」，或者是「差異並不顯著」。

P值比顯著水準還要小，因此對立假說「母體的Cramér相關係數比0還要大」是正確的，換句話說，差異是顯著的！

在假說檢定中，就算P值比顯著水準還要小，我們也不能斷定「對立假說『絕對』正確」，我們頂多只能說：「雖然很想說對立假說『絕對』是正確的……但不幸的是，正確的可能並非對立假說，而是虛無假說，而且虛無假說正確的機率最高為（$\alpha \times 100$）%。」

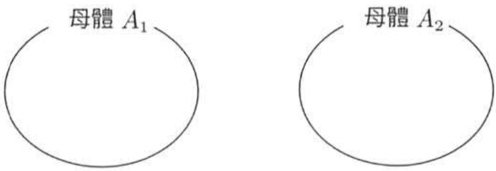
如果P值比顯著水準還要大，我們似乎就能說「虛無假說正確」，然而在假說檢定中，是不允許這麼做的，我們頂多只能夠得到「虛無假說不能說是錯的」的結論。

6. 母體平均差之檢定

6.1 母體平均差之檢定

假設μ_i為母體A_i的平均值，σ_i為母體A_i的標準差。

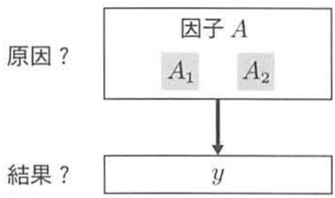
假說檢定中的「母體平均差之檢定」，目的是要推論兩個母體的平均值是否有差異，也就是要從樣本資料推論下圖中的μ_1與μ_2是否有差異。



平均值	μ_1
標準差	σ_1

平均值	μ_2
標準差	σ_2

從不同的角度來看，也可以將A視作因子，將A_1與A_2視為屬於同一因子的兩個水準，並以假說檢定來驗證A是否就是能改變結果的原因。



在進行母體平均標準差之檢定時，我們必須假設每個母體皆服從常態分配，且母體的標準差σ_1與σ_2相等。

6.2 應用例

讓我們按照「問題 → 想法 → 解答」的順序，逐步說明。

問題

之前△△新聞社提出了這樣的假說：「東京都和大阪府雖然都是大都市，但是後者的物價應該比較便宜吧？那麼住在大阪府的大學生，每個月從雙親那裡拿到的生活費應該也比較少才對！」

為了驗證這個假說，△△新聞社在2009年4月進行了一項調查，得到的結果如下表所示。其中A_1代表住在東京都，A_2代表住在大阪府。

	居住地 A	每個月拿到的生活費 y
大學生1	A_1	107000
大學生2	A_1	108000
大學生3	A_1	116000
大學生4	A_1	120000
大學生5	A_1	123000
大學生6	A_2	90000
大學生7	A_2	99000
大學生8	A_2	103000
大學生9	A_2	104000
大學生10	A_2	118000

請用母體平均差之檢定驗證$\mu_1 > \mu_2$是否正確，換句話說，請驗證居住地的不同是否會影響到每個月拿到的生活費。其使用的顯著水準為0.05。

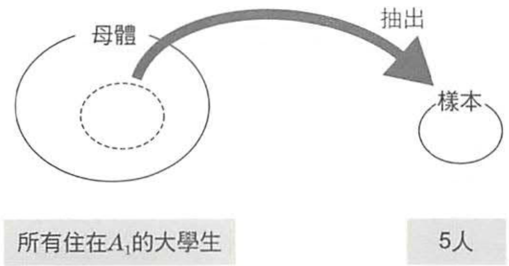
如同前頁所述，在進行母體平均標準差之檢定的時候，我們必須假設每個母體皆服從常態分配。然而，我們很難想像住在東京都或大阪府的大學生，每個月所拿到的生活費是像「98142日圓」這樣，不乾不脆的金額。因此，我們不得不說，像本節的應用例這樣，大膽地假設每個母體皆為常態分配的做法，其實是不怎麼嚴謹的，但再怎麼說這也只是個「例子」，請務必先了解這一點。

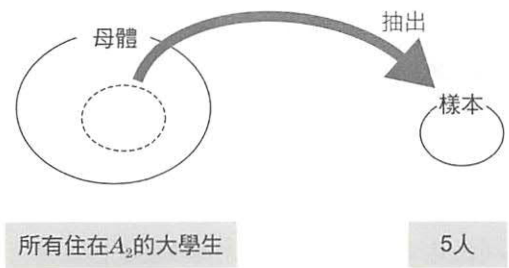
想法

雖然在現實中不太可能做得到，不過假設我們做了以下的實驗：

STEP1

從「所有住在A_1的大學生」與「所有住在A_2的大學生」這兩個母體中，分別隨機抽出5人作為樣本。





STEP2

調查STEP 1中所抽出的10人，每個月拿到的生活費是多少，接著由下列公式：

$$t_0 = \frac{\bar{A}_1 - \bar{A}_2}{\sqrt{\dfrac{S_1 + S_2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)} \times \left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$$

n_1	A_1的樣本大小
n_2	A_2的樣本大小
$\bar{A}_1$	A_1的樣本平均值
$\bar{A}_2$	A_2的樣本平均值
S_1	A_1的樣本離差平方和
S_2	A_2的樣本離差平方和

就能夠求得母體平均值之差的檢定所對應的檢定統計量，t_0。

STEP3

將抽出的10人分別放回各自的母體。

STEP4

持續重覆STEP 1到STEP 3的步驟。

如果$\mu_1 = \mu_2$，那麼經上述步驟操作後，將所有得到的檢定統計量t_0繪製成直方圖，會得到一個近似自由度為8的t分配。換句話說，如果$\mu_1 = \mu_2$，那麼經上述步驟操作後，所得到的檢定統計量t_0會服從自由度為8的t分配。

在此，筆者將做個實驗以驗證上面的敘述，而為了使實驗能夠順利進行，筆者做了以下的條件限制：

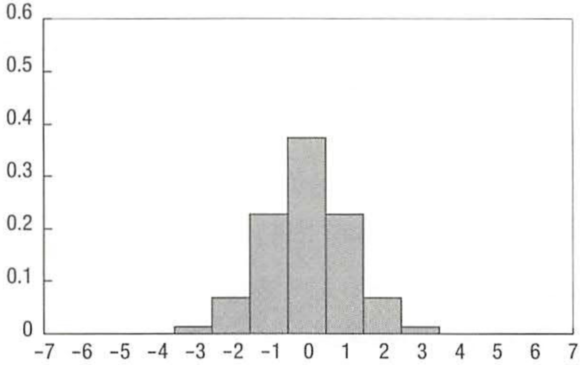
- 將下表所列出的24000人，當作「所有住在A_1的大學生」以及「所有住在A_2的大學生」。

	居住地 A	每個月拿到的生活費 y
大學生1	A_1	97000
⋮	⋮	⋮
大學生14000	A_1	93000
大學生14001	A_2	98000
⋮	⋮	⋮
大學生24000	A_2	89000

- 假設$\mu_1 = \mu_2$
- 由於沒有限制實驗次數，所以我們就重覆操作STEP 1到STEP 3的步驟32000次。

實驗結果如下表所示。以下表的資料為基礎，可繪成直方圖，筆者將之列於其下。

	檢定統計量t_0
第1次	1.1688
第2次	0.5639
⋮	⋮
第32000次	−0.4381



的確，上圖與第23頁「自由度為8的情形」的機率密度函數圖非常相似，檢定統計量t_0似乎真的會服從自由度為8的t分配。

雖然和實驗本身沒有直接關係，但在這裡想請各位注意一件事，自由度「8」是由以下的公式計算而來的：

$$\underbrace{(5-1)}_{A_1\text{的樣本大小}}+\underbrace{(5-1)}_{A_2\text{的樣本大小}}=4+4=8$$

這個公式似乎有些讓人難以理解，不過就算不知道其原理，在實務上也不會有任何不便，請不要過於在意。

解答

STEP 1	定義母體的範圍。	定義以下兩者為欲分析的母體： ・所有住在A_1的大學生 ・所有住在A_2的大學生
STEP 2	建立虛無假說以及對立假說。	將虛無假說建立為「$\mu_1=\mu_2$」， 而對立假說為「$\mu_1>\mu_2$」。
STEP 3	選擇應該要使用何種「檢定」。	進行母體平均差的檢定。
STEP 4	決定顯著水準。	顯著水準為0.05。
STEP 5	從樣本的資料，計算出檢定統計量之值。	我們決定要進行母體平均差的檢定。如同第54頁所述，母體平均差之檢定的檢定統計量為t_0。 本節應用例中，檢定統計量t_0之值為： $\dfrac{114800-102800}{\sqrt{\dfrac{202800000+410800000}{(5-1)+(5-1)}\times\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}\right)}}=2.1665$ 另外，在本節的應用例中，如果虛無假說正確，檢定統計量將會服從自由度為8的t分配。
STEP 6	計算STEP 5得到的檢定統計量之值所對應的P值，觀察P值是否比顯著水準還要小。	顯著水準為0.05，而檢定統計量之值2.1665所對應的P值為0.0311。$0.0311<0.05$，P值較小。
STEP 7	如果STEP 6中，P值比顯著水準還要小的話，就能得到「對立假說正確」，或者是「差異顯著」的結論。 如果P值比顯著水準大，結論就會是「虛無假說不能說是錯的」，或者是「差異並不顯著」。	P值比顯著水準還要小，因此我們認為對立假說「$\mu_1>\mu_2$」是正確的，換句話說，差異是顯著的。

6.3 母體平均差之檢定的對立假說、拒絕域與P值

本節應用例中所使用的分析方法，屬於第6頁中所提到的「驗證型」的資料分析方法。首先建立虛無假說與對立假說，接著從母體中抽取樣本，再由樣本資料求出檢定統計量之值。在進入本節內容前，請先充分了解以上的分析流程。

一般來說，母體平均差之檢定中，有三種對立假說可以選擇：

① $\mu_1 > \mu_2$

② $\mu_1 < \mu_2$

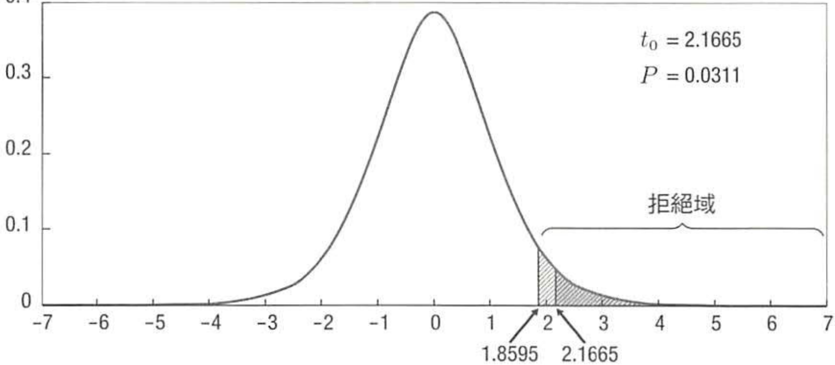
③ $\mu_1 \neq \mu_2$

在「單尾檢定」的情況下，我們會選擇①或②作為對立假說；而在「雙尾檢定」的情況下，則選擇③作為對立假說。

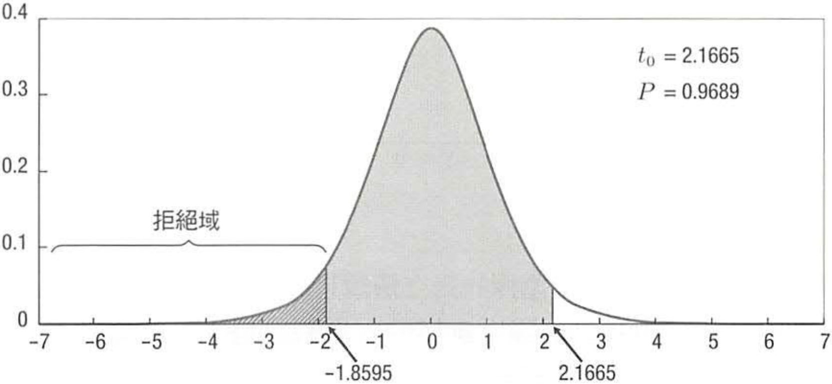
下圖標示出本節應用例的拒絕域範圍以及P值大小，至於為什麼下圖中所標示的拒絕域範圍，會在圖的右端，那是因為在抽樣以前，△△新聞社就已經先認定「$\mu_1 > \mu_2$應該是對的，那麼理所當然$\bar{A}_1 > \bar{A}_2$也會是對的。所以檢定統計量

$$t_0 = \frac{\bar{A}_1 - \bar{A}_2}{\sqrt{\dfrac{S_1 + S_2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)} \times \left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$$

的值明顯會是正數。」

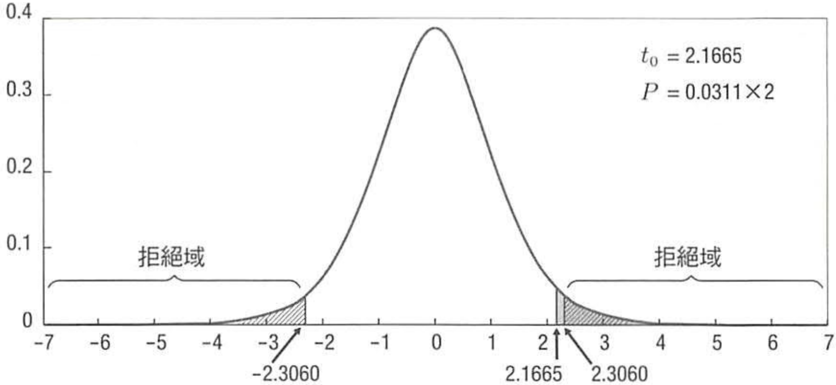


如果本節應用例在一開始所選擇的對立假說不是①而是②，換句話說，如果在抽樣之前，△△新聞社認定「$\mu_1 < \mu_2$應該是對的，那麼理所當然 $\bar{A}_1 < \bar{A}_2$ 也會是對的，所以檢定統計量的值t_0明顯會是負數」，那麼拒絕域的範圍與P值大小就會變成下圖的樣子。



如果本節應用例在一開始所選擇的對立假說是③，換句話說，如果在抽樣之前，△△新聞社認定「$\mu_1 \neq \mu_2$應該是對的，那麼理所當然 $\bar{A}_1 < \bar{A}_2$ 或 $\bar{A}_1 > \bar{A}_2$ 其中之一會是對的，所以檢定統計量的值t_0明顯會是正數或負數」，那麼拒絕域的範圍與P值大小就會變成下頁的圖。請注意拒絕域被分成兩塊，分別位於左右兩端，每塊分別代表$\frac{\alpha}{2}$的機率。[2]

2　如果檢定統計量t_0之值為正數的話，就要確認它是否在右側的拒絕域內；如果t_0為負數的話，就要確認它是否在左側的拒絕域內。



這裡要注意的有兩點：

第一，如果本節所選擇的對立假說是②或③，就會得到差異不顯著的結論，但我們實際上選擇的對立假說是①，結論是差異顯著。這代表分析者需藉經驗判斷要選擇哪一個對立假說，才能夠得到差異顯著（※或者是差異不顯著）的結論。

第二，如同第6頁所述，原則上，我們會傾向把假說檢定歸類在「驗證型」資料分析的分析方法。這並不是說「探索型」的資料分析方法絕對不能使用，如果能以探索型的資料分析法為契機，而產生新的想法，那麼反而是相當有用的[3]。但至少我們並不鼓勵剛起步的初學者這麼做，因為要是這麼做，就可能會造成分析者會有「總之先盡可能地蒐集資料，再依照我們想得到的結果，選擇要用哪一個對立假說，接著照順序進行假說檢定，最後只將差異顯著的結果列在報告或論文上即可。」之類的想法，讓人有種「可以得到任何想要的結果」、「只要結果對了就OK」的感覺。

3　在第7章將解說的直交表實驗，即屬於這種類型的分析；在附錄2將解說的多重比較法與獨立性檢定，也傾向於這類的分析手法。

第4章 一因子變異數分析

背景知識

第1章
實驗設計是什麼？

第2章
統計學的基礎知識

第3章
統計學假說檢定

主　題

第4章
一因子變異數分析

第5章
二因子變異數分析

第6章
理想的實驗順序

第7章
直交表實驗

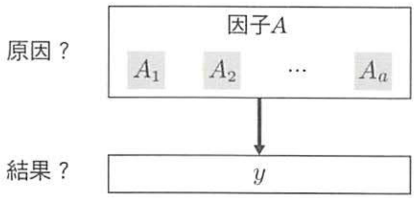
第8章
參數設計

第 4 章　一因子變異數分析

本章將解說「一因子變異數分析」，我們可將其視為「母體有三個以上的母體平均差之檢定」。一因子變異數分析不僅是一種假說檢定，更是實驗設計的基礎。

1. 一因子變異數分析

所謂的一因子變異數分析，是一種利用樣本資料來驗證三個以上的母體之平均值是否相等的假說檢定。我們也可將其視為一種驗證因子A是否為造成差異的原因之假說檢定。



在一因子變異數分析中，必須假定每個母體皆服從常態分配，且每個母體的標準差皆相等，在此前提下才能進行分析。

2. 應用例

2.1　應用例

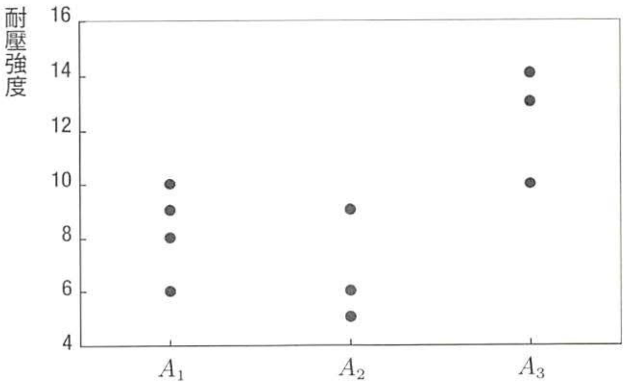
讓我們按照「問題 → 想法 → 解答」的順序，逐步說明：

問題

××工業股份有限公司的主力產品是便當盒。之前，工廠在製造便當盒時的成型溫度皆設定為A_1度，而公司認為便當盒的耐壓強度有提升的必要，於是研究員將成型溫度當作因子做了一個實驗，其結果列於次頁的表。

	成型溫度 A	耐壓強度 y
實驗1	A_1	8
實驗2	A_1	10
實驗3	A_1	6
實驗4	A_1	9
實驗5	A_2	9
實驗6	A_2	5
實驗7	A_2	5
實驗8	A_2	6
實驗9	A_3	13
實驗10	A_3	14
實驗11	A_3	10
實驗12	A_3	10

將上表資料整理過後可得到下圖：



請利用一因子變異數分析，判斷便當盒的成型溫度是否會影響到耐壓強度，換句話說，請判斷「在A_1度成型的便當盒」、「在A_2度成型的便當盒」與「在A_3度成型的便當盒」的平均耐壓強度是否有所不同。其使用的顯著水準為0.05。

想法

與工業相關的母體資料之定義

在定義與工業相關的母體資料時，有幾點須注意。

拿之前的例子來說，上一章的應用例所提到的母體「所有住在日本的20～30歲國民」，所包含的人們在現實中是真實存在的，換句話說，母體是有限的[1]；另一方面，本節應用例的母體包含了「在A_1度成型的便當盒」、「在A_2度成型的便當盒」與「在A_3度成型的便當盒」在內的所有便當盒。理論上，便當盒可以無限地製造下去，想要有多少就可以有多少，在「現在」這個時間點上，我們沒有辦法得到所有便當盒的資訊，換句話說，母體是無限的。

以一因子變異數分析作為實驗設計的第一步時，應建立的對立假說

在進入解答的部分之前，先來揭曉答案吧！在本節的應用例中，虛無假說及對立假說應設為：

虛無假說	$\mu_1=\mu_2=\mu_3$
對立假說	$\mu_1=\mu_2=\mu_3$是不對的

這裡請注意，雖然虛無假說指涉的答案只有一個，但對立假說是有多種可能的。這裡的對立假說包含了：

- $\mu_1\neq\mu_2\neq\mu_3$
- $\mu_1=\mu_2\neq\mu_3$
- $\mu_1\neq\mu_2=\mu_3$

等數種可能。

1　然而，在不同的時間點，譬如說從2009年8月10日14時05分22秒，變成2009年8月10日14時05分23秒時，母體的組成成員理應有所變化。因為在這一秒內，有的人會從29歲變成30歲，有的人會從19歲變成20歲。

解答

STEP 1	定義母體的範圍。	定義下列三者為欲分析的母體： ・在A_1度成型的便當盒 ・在A_2度成型的便當盒 ・在A_3度成型的便當盒
STEP 2	建立虛無假說以及對立假說。	虛無假說設為「$\mu_1=\mu_2=\mu_3$」； 對立假說設為「$\mu_1=\mu_2=\mu_3$是不對的」。
STEP 3	選擇使用哪一種「檢定」。	進行一因子變異數分析。
STEP 4	決定顯著水準。	顯著水準為0.05。
STEP 5	從樣本的資料，計算出檢定統計量之值。	我們決定要進行一因子變異數分析。一因子變異數分析的統計量為 $\frac{V_A}{V_e}$ 。本節應用例中，檢定統計量的值為8.6512。[2] 另外，在本節的應用例中，如果虛無假說正確的話，檢定統計量將服從第1自由度為2、第2自由度為9的F分配。
STEP 6	計算STEP 5得到的檢定統計量之值所對應的P值，觀察P值是否比顯著水準還要小。	顯著水準為0.05，而檢定統計量之值為8.6512所對應的P值為0.0080，比顯著水準小。
STEP 7	如果STEP 6中，P值比顯著水準還要小，就能得到「對立假說正確」，或者是「差異顯著」的結論。 如果P值比顯著水準大，結論就會是「虛無假說不能說是錯的」，或者是「差異並不顯著」。	P值比顯著水準還要小，因此我們認為對立假說「$\mu_1=\mu_2=\mu_3$是不對的」是正確的，或者說三者間的差異是顯著的。

2　其計算過程將於次頁詳細解說。

2.2 檢定統計量的計算方式

要計算一因子變異數分析的檢定統計量之值並不困難，但是會有點費工夫，所以前頁不列出計算過程，只列出其結果為「8.6512」，而其計算過程以及每個符號所代表的意義則在這裡解說。

下列算式中，y_{ij}代表A_i的第j個資料，等號左邊表示每個資料與總平均的差異，那麼理所當然地，在一加一減$\bar{A}_i$後，我們可以改寫成等號右邊的形式：

$$y_{ij} - \bar{T} = \left(\bar{A}_i - \bar{T}\right) + \left(y_{ij} - \bar{A}_i\right)$$

全體資料的總平均

A_i資料的平均

在一因子變異數分析中，這個等式的每一項都有其公認的名稱，也會用固定的公認符號代表[3]，且各項的離差平方和同樣也有其固定的公認符號。下表整理出各項的名稱及代表符號：

	名稱	公認符號	離差平方和的公認符號
$y_{ij} - \bar{T}$	無特定名稱	無特定符號	S_T
$\left(\bar{A}_i - \bar{T}\right)$	A_i的效果	a_i	S_A
$\left(y_{ij} - \bar{A}_i\right)$	誤差	e_{ij}	S_e

本節應用例中的檢定統計量之值，可由以下所列出STEP 1到STEP 3的計算過程求出。

3　雖然這裡用「公認」一詞，然而實際上依照文獻的不同也會有所差異。

STEP1

計算 $\bar{A}_i$。

$$\bar{A}_1=\frac{33}{4}=8.25 \qquad \bar{A}_2=\frac{25}{4}=6.25 \qquad \bar{A}_3=\frac{47}{4}=11.75$$

STEP2

按照下表的方式計算各項。

	成型溫度 A_i	耐壓強度 y_{ij}	$y_{ij}-\bar{T}$	A_i的效果 $a_i=\bar{A}_i-\bar{T}$	誤差 $e_{ij}=y_{ij}-\bar{A}$
實驗1	A_1	8	–0.75	–0.5	–0.25
實驗2	A_1	10	1.25	–0.5	1.75
實驗3	A_1	6	–2.75	–0.5	–2.25
實驗4	A_1	9	0.25	–0.5	0.75
實驗5	A_2	9	0.25	–2.5	2.75
實驗6	A_2	5	–3.75	–2.5	–1.25
實驗7	A_2	5	–3.75	–2.5	–1.25
實驗8	A_2	6	–2.75	–2.5	–0.25
實驗9	A_3	13	4.25	3	1.25
實驗10	A_3	14	5.25	3	2.25
實驗11	A_3	10	1.25	3	–1.75
實驗12	A_3	10	1.25	3	–1.75
	合　計	105	0	0	0
	平　均	8.75	0	0	0
	離差平方和	94.25	94.25	62	32.25

$\downarrow S_T$　　$\downarrow S_A$　　$\downarrow S_e$

不只是本節的應用例，對於所有的一因子變異數分析，以下的等式都一定會成立：

$$S_T=S_A+S_e$$

STEP3

將STEP 2所得到的數值代入下列公式，以求出一因子變異數分析的檢定統計量之值：

$$\frac{V_A}{V_e}=\frac{\frac{S_A}{f_A}}{\frac{S_e}{f_e}}$$

其中，自由度為：

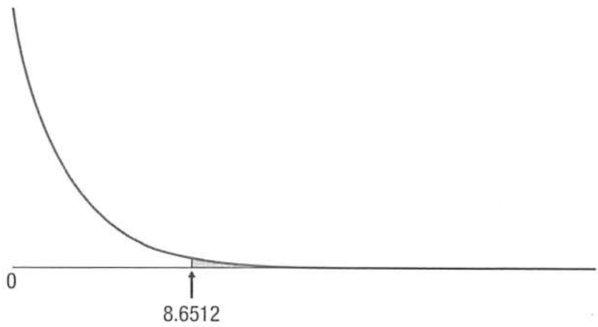
$$\begin{cases} f_T = \text{所有資料個數} - 1 \\ f_A = A\text{的水準個數} - 1 \\ f_e = f_T - f_A \end{cases}$$

本節應用例中，檢定統計量之值為：

$$\frac{V_A}{V_e}=\frac{\frac{S_A}{f_A}}{\frac{S_e}{f_e}}=\frac{\frac{62}{3-1}}{\frac{32.25}{(12-1)-(3-1)}}=8.6512$$

2.3 P值的計算方式

下圖為第1自由度為2、第2自由度為9的F分配機率密度函數圖。本節應用例的P值為下圖中著色區域代表的機率。



2.4 變異數分析表

將一因子變異數分析與二因子變異數分析的結果，依照特定方式整理成較為簡明的表，稱為「變異數分析表」。在一般的實驗設計相關書籍以及統計軟體的輸出格式中，一定會出現這樣的表。

	自由度f	離差平方和S	平均平方V	分散比 F_0	P值
A	2	62	31	8.6512	0.0080
e	9	32.25	3.5833		
T	11	94.25			

3. 結果分析

一因子變異數分析是一種假說檢定。因此，在前一節的應用例中，一因子變異數分析只能用來判斷「$\mu_1=\mu_2=\mu_3$是不對的」此一對立假說是否正確而已。分析者最關心的是「最佳A_i為何」，卻無法從一因子變異數分析中得知，不過請不用擔心。

3.1 最佳水準

如果檢定結果顯示因子A能造成顯著的差異，那麼最大或最小的$\bar{A}_i$就是A_i的最佳水準。

在前一節的應用例中，結果顯示因子A能造成顯著的差異，而且$\bar{A}_i$值越大，A_i就越是理想中的條件，所以由第67頁所計算的結果

$$\begin{cases} \bar{A}_1 = \ \ 8.25 \\ \bar{A}_2 = \ \ 6.25 \\ \bar{A}_3 = 11.75 \end{cases}$$

我們可以得知A_3是最佳水準。

3.2 母體平均之估計

第63頁中所列出的十二個資料，再怎麼說也不過是從「在A_1度成型的便當盒」、「在A_2度成型的便當盒」與「在A_3度成型的便當盒」等母體中抽出來的樣本而已。換句話說，前一節所求出來的$\bar{A}_i$只是樣本的平均，並非母體平均μ_i。

那麼，μ_3真正的數值到底是多少呢？因為我們不可能得到母體內的所有資料，所以絕對不可能算出μ_3真正的數值。不過統計學有趣的地方就在於，我們能夠得到「μ_3會介於『多少以上多少以下』的範圍內，這樣的估計『大概不會錯吧』」的答案。我們把估計「多少以上多少以下」的過程叫作「區間估計」，估計出來的區間稱為「信賴區間」，而「大概不會錯吧」這句話的信心程度稱為

「信心水準」、「信賴率」或「信賴係數」等。

值得注意的是，信心水準並非在求出信賴區間「之後」才「判明」，事實上，信心水準是在求出信賴區間「之前」，分析者就要先「決定」的數字。所以剛才提到「μ_3會介於『多少以上多少以下』的範圍內，這樣的估計『大概不會錯吧』」的說法，應該要改成「在信心水準為△△%的情況下，μ_3會介於『多少以上多少以下』的範圍內較為適當」。

一般來說，信心水準會設為95%或99%，分析者需自行判斷要採用哪一個。乍看之下可能會覺得99%無論如何應該都比95%還要好，然而99%所得到的信賴區間必定會比95%還要大，換句話說，99%的信賴區間一定會得到說服力比較差的結論，所以並不能說哪個信心水準一定比較好。

統計學中有兩種可行的區間估計[4] [譯註2]：

- 信心水準為△△%時，μ_i會介於「多少以上多少以下」的範圍內。
- 信心水準為△△%時，$(\mu_i-\mu_j)$會介於「多少以上多少以下」的範圍內。

前者稱作「母體平均的估計」，後者稱作「母體平均差之估計」，本書中將解說前者的估計過程。

母體平均的估計

在信心水準為95%的情況下，μ_i的信賴區間為：

$$\bar{A}_i \pm t\left(f_e, 0.025\right) \sqrt{\frac{V_e}{A_i\text{的資料個數}}}$$

4　順帶一提，我們也能以μ_i與μ_j為對象，進行母體平均差之檢定。我們將在「附錄2 多重比較」中介紹相關的主題。

譯註2　事實上，區間估計不只這兩種，比例、變異數、相關係數以及其他許多母數，都可以用區間估計的方法估計之。

所以在前節的應用例中，我們可以得到μ_3的信賴區間為：

$$11.75 \pm 2.2622\sqrt{\frac{3.5833}{4}}$$

第5章　二因子變異數分析

背景知識

第1章
實驗設計是什麼？

第2章
統計學的基礎知識

第3章
統計學假說檢定

主　題

第4章
一因子變異數分析

第5章
二因子變異數分析

第6章
理想的實驗順序

第7章
直交表實驗

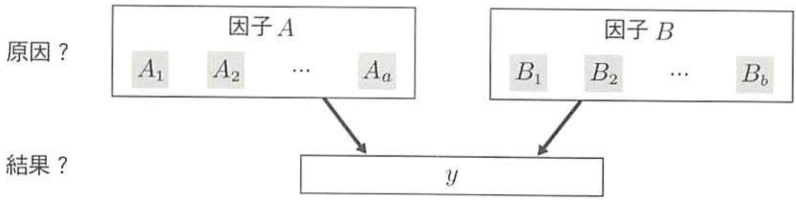
第8章
參數設計

第 5 章　二因子變異數分析

本章將解說「二因子變異數分析」，我們可將其視為「有二個因子的一因子變異數分析」。二因子變異數分析不僅是一種假說檢定，也和一因子變異數分析一樣，是實驗設計的基本方法。

1. 二因子變異數分析

所謂的二因子變異數分析，是一種假說檢定，用來驗證因子A與因子B是否為造成結果差異的原因。



二因子變異數分析可分為「非重複實驗的情形[譯註1]」與「重複實驗的情形」兩大類。

非重複實驗的情形

	成型溫度 A	原料供應商 B	耐壓強度 y
實驗1	A_1	B_1	9.0
實驗2	A_1	B_2	7.5
實驗3	A_2	B_1	7.0
實驗4	A_2	B_2	5.5
實驗5	A_3	B_1	13.5
實驗6	A_3	B_2	10.0

譯註1　有的教科書會將非重複實驗的二因子變異數分析，稱作「區集化一因子變異數分析」。

重複實驗的情形

	成型溫度 A	原料供應商 B	耐壓強度 y
實驗1	A_1	B_1	8
實驗2	A_1	B_1	10
實驗3	A_1	B_2	6
實驗4	A_1	B_2	9
實驗5	A_2	B_1	9
實驗6	A_2	B_1	5
實驗7	A_2	B_2	5
實驗8	A_2	B_2	6
實驗9	A_3	B_1	13
實驗10	A_3	B_1	14
實驗11	A_3	B_2	10
實驗12	A_3	B_2	10

不需要做太多次實驗就能得到結果，是非重複實驗設計的一大賣點。然而，每個條件為「A_i與B_j」的實驗我們都只做一次，得到的結論不容易說服其他人也是事實，再加上非重複實驗沒有辦法確認第三節所提到的「交互作用」是否存在。若想要改善這些缺點，就必須進行重複實驗。

考慮到數學難易度的差異，本章將先行解說非重複實驗的情形，再介紹重複實驗的情形。

另外，在進行二因子變異數分析時，必須假定每個以「A_i與B_j」條件處理的母體皆服從常態分配，且每個母體的標準差皆相等，在此前提下才能進行分析。

2. 非重複實驗的應用例

2.1 應用例

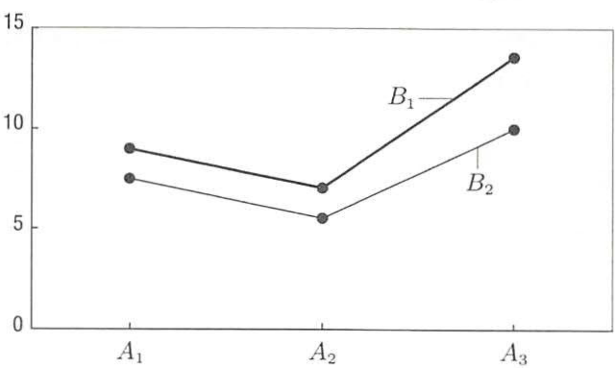
讓我們按照「問題 → 解答」的順序，逐步說明：

問題

××工業股份有限公司的主力產品是便當盒。之前，工廠在製造便當盒時的成型溫度皆設定為A_1度，原料供應商皆為B_1公司，而××公司認為有必要提升便當盒的耐壓強度，於是研究員將成型溫度與原料供應商當作因子，做了一系列實驗。其結果如下表所示：

	成型溫度 A	原料供應商 B	耐壓強度 y
實驗1	A_1	B_1	9.0
實驗2	A_1	B_2	7.5
實驗3	A_2	B_1	7.0
實驗4	A_2	B_2	5.5
實驗5	A_3	B_1	13.5
實驗6	A_3	B_2	10.0

將上表資料整理過後可得到下圖，圖中各點為各個條件下的平均值。



請利用二因子變異數分析，判斷便當盒的成型溫度以及原料供應商是否會影響到耐壓強度，換句話說，請判斷：

- 「在A_1度成型的便當盒」、「在A_2度成型的便當盒」與「在A_3度成型的便當盒」的平均耐壓強度是否有所不同。
- 「以B_1原料成型的便當盒」、「以B_2原料成型的便當盒」與「以B_3原料成型的便當盒」的平均耐壓強度是否有所不同。

其使用的顯著水準為0.05。

解答

STEP 1	定義母體的範圍。	定義下列六者為欲分析的母體： ・在「A_1與B_1」條件下成型的便當盒 ・在「A_1與B_2」條件下成型的便當盒 ・在「A_2與B_1」條件下成型的便當盒 ・在「A_2與B_2」條件下成型的便當盒 ・在「A_3與B_1」條件下成型的便當盒 ・在「A_3與B_2」條件下成型的便當盒
STEP 2	建立虛無假說以及對立假說。	虛無假說設為： 「A_1、A_2與A_3條件的平均耐壓強度皆相等」 「B_1、B_2條件的平均耐壓強度相等」 對立假說設為： 「A_1、A_2與A_3條件的平均耐壓強度不完全相等」 「B_1、B_2條件的平均耐壓強度不相等」
STEP 3	選擇使用哪一種「檢定」。	進行二因子變異數分析。
STEP 4	決定顯著水準。	顯著水準為0.05。
STEP 5	以樣本的資料，計算出檢定統計量之值。	※後述
STEP 6	計算STEP 5得到的檢定統計量之值所對應的P值，觀察P值是否比顯著水準還要小。	顯著水準為0.05，而因子A的P值為0.0412，比顯著水準小；因子B的P值為0.0831 ，比顯著水準大。
STEP 7	如果STEP 6中，P值比顯著水準還要小，就能得到「對立假說正確」，或者是「差異顯著」的結論；如果P值比顯著水準大，結論就會是「虛無假說不能說是錯的」，或者是「差異並不顯著」。	對立假說「A_1、A_2與A_3條件的平均耐壓強度不完全相等」是正確的，或者說三者間的差異顯著；另一方面，虛無假說「B_1、B_2條件的平均耐壓強度相等」不能說是錯的，或者說兩者間的差異並不顯著。

2.2 檢定統計量的計算方式

二因子變異數分析之檢定統計量的計算方式，和一因子變異數分析幾乎相同，但是，由於虛無假說和對立假說各有兩組，檢定統計量的計算方式比一因子變異數分析複雜了一些。因此前頁說明檢定步驟時，先略過了計算檢定統計量的STEP 5，而將其計算過程放在這裡說明。

下列算式中，y_{ij}代表條件為「A_i與B_j」的資料，等號左邊表示每個資料與總平均的差異，那麼理所當然地，我們可以改寫成等號右邊的形式：

$$y_{ij}-\bar{T}=\left(\bar{A}_i-\bar{T}\right)+\left(\bar{B}_j-\bar{T}\right)+\left\{\left(y_{ij}-\bar{T}\right)-\left(\bar{A}_i-\bar{T}\right)-\left(\bar{B}_j-\bar{T}\right)\right\}$$

全體資料的總平均　　A_i資料的平均　　B_j資料的平均

在非重複實驗的二因子變異數分析中，這個等式的每一項都有公認的名稱，也會用固定的公認符號代表[1]，且各項的離差平方和也有固定的公認符號。下表即整理出各項的名稱及代表符號：

	名稱	公認符號	離差平方和的公認符號
$y_{ij}-\bar{T}$	無特定名稱	無特定符號	S_T
$\left(\bar{A}_i-\bar{T}\right)$	A_i的效果	a_i	S_A
$\left(\bar{B}_j-\bar{T}\right)$	B_j的效果	b_j	S_B
$\left\{\left(y_{ij}-\bar{T}\right)-\left(\bar{A}_i-\bar{T}\right)-\left(\bar{B}_j-\bar{T}\right)\right\}$	誤差	e_{ij}	S_e

1　雖然這裡用「公認」一詞，然而實際上依照文獻的不同也會有所差異。

本節應用例中的檢定統計量之值，可由以下列出的STEP 1到STEP 3的計算過程求出。

STEP1

計算$\bar{A}_i$和$\bar{B}_j$。

$$\bar{A}_1 = \frac{16.5}{2} = 8.25 \quad \bar{A}_2 = \frac{12.5}{2} = 6.25 \quad \bar{A}_3 = \frac{23.5}{2} = 11.75$$

$$\bar{B}_1 = \frac{29.5}{3} = 9.83 \quad \bar{B}_2 = \frac{23.0}{3} = 7.67$$

STEP2

按照下表的方式計算各項。

	成型溫度 A_i	原料供應商 B_j	耐壓強度 y_{ij}	$y_{ij}-\bar{T}$	A_i的效果 a_i	B_j的效果 b_j	誤差 e_{ij}
實驗1	A_1	B_1	9	0.25	−0.5	1.08	−0.33
實驗2	A_1	B_2	7.5	−1.25	−0.5	−1.08	0.33
實驗3	A_2	B_1	7	−1.75	−2.5	1.08	−0.33
實驗4	A_2	B_2	5.5	−3.25	−2.5	−1.08	0.33
實驗5	A_3	B_1	13.5	4.75	3	1.08	0.67
實驗6	A_3	B_2	10	1.25	3	−1.08	−0.67
		合　計	52.5	0	0	0	0
		平　均	8.75	0	0	0	0
		離差平方和	39.375	39.375	31	7.042	1.333
				↓ S_T	↓ S_A	↓ S_B	↓ S_e

不只是本節的應用例，對於所有的非重複實驗之二因子變異數分析，以下的等式都一定會成立。

$$S_T = S_A + S_B + S_e$$

STEP3

將STEP 2得到的數值代入下列公式，求出「非重複實驗之二因子變異數分析」的檢定統計量：

$$\begin{cases} \dfrac{V_A}{V_e} = \dfrac{\dfrac{S_A}{f_A}}{\dfrac{S_e}{f_e}} \\[2ex] \dfrac{V_B}{V_e} = \dfrac{\dfrac{S_B}{f_B}}{\dfrac{S_e}{f_e}} \end{cases}$$

其中，自由度為：

$$\begin{cases} f_T = \text{所有資料個數} - 1 \\ f_A = A \text{ 的水準個數} - 1 \\ f_B = B \text{ 的水準個數} - 1 \\ f_e = f_T - f_A - f_B \end{cases}$$

本節應用例中，檢定統計量之值為：

$$\begin{cases} \dfrac{V_A}{V_e} = \dfrac{\dfrac{S_A}{f_A}}{\dfrac{S_e}{f_e}} = \dfrac{\dfrac{31}{3-1}}{\dfrac{1.3333}{(6-1)-(3-1)-(2-1)}} = 23.25 \\[2ex] \dfrac{V_B}{V_e} = \dfrac{\dfrac{S_B}{f_B}}{\dfrac{S_e}{f_e}} = \dfrac{\dfrac{7.0417}{2-1}}{\dfrac{1.3333}{(6-1)-(3-1)-(2-1)}} = 10.5625 \end{cases}$$

2.3 變異數分析表

下表即為本節應用例所對應的變異數分析表：

	自由度f	離差平方和S	平均平方V	變異數比 F_0	P值
A	2	31	15.5	23.25	0.0412
B	1	7.0417	7.0417	10.5625	0.0831
e	2	1.3333	0.6667		
T	5	39.375			

P值的計算方式與上一章的一因子變異數分析相同，故不在此多加著墨。

2.4 結果分析

最佳水準

如果檢定結果顯示因子A能造成顯著的差異，那麼最大或最小的$\bar{A}_i$就是A_i的最佳水準；如果檢定結果顯示因子B能造成顯著的差異，那麼最大或最小的$\bar{B}_j$就是B_j的最佳水準。

在本節的應用例中，結果顯示因子A能造成顯著的差異，而且$\bar{A}_i$值越大，A_i就越是理想中的條件，所以由第80頁計算的結果：

$$\begin{cases} \bar{A}_1 = \ \ 8.25 \\ \bar{A}_2 = \ \ 6.25 \\ \bar{A}_3 = 11.75 \end{cases}$$

我們可以得知A_3是最佳水準。

母體平均之估計

假設因子A能造成顯著的差異，那麼μ_i的信心水準為95%時，信賴區間為：

$$\bar{A}_i \pm t\left(f_e, 0.025\right)\sqrt{\frac{V_e}{A_i\text{的資料個數}}}$$

假設因子B能造成顯著的差異，那麼μ_j的信心水準為95%時，信賴區間為：

$$\bar{B}_j \pm t\left(f_e, 0.025\right)\sqrt{\frac{V_e}{B_j\text{ 的資料個數}}}$$

假設因子A與因子B皆能造成顯著的差異，那麼μ_{ij}的信心水準為95%時，信賴區間為：

$$\left\{\bar{T} + \left(\bar{A}_i - \bar{T}\right) + \left(\bar{B}_j - \bar{T}\right)\right\} \pm t\left(f_e, 0.025\right)\sqrt{\left(\frac{A\text{的水準個數} + B\text{的水準個數} - 1}{\text{全部的資料個數}}\right)V_e}$$

本節應用例的結果顯示，因子A能造成顯著的差異，因此可以推得本節應用例μ_3的信賴區間為：

$$11.75 \pm 4.3027\sqrt{\frac{0.6667}{2}}$$

3. 重複實驗的二因子變異數分析

3.1 應用例

讓我們按照「問題 → 想法 → 解答」的順序，逐步說明。不過這裡的「想法」和前幾章的不太一樣，我們將著重於解說「交互作用」。

問題

××工業股份有限公司的主力產品是便當盒。之前，工廠在製造便當盒時的成型溫度皆設定為A_1度，原料供應商皆為B_1公司，而××公司認為有必要提升便當盒的耐壓強度，於是研究員將成型溫度與原料供應商當作因子做了一個實驗。結果如下表所示：

	成型溫度 A	原料供應商 B	耐壓強度 y
實驗1	A_1	B_1	8
實驗2	A_1	B_1	10
實驗3	A_1	B_2	6
實驗4	A_1	B_2	9
實驗5	A_2	B_1	9
實驗6	A_2	B_1	5
實驗7	A_2	B_2	5
實驗8	A_2	B_2	6
實驗9	A_3	B_1	13
實驗10	A_3	B_1	14
實驗11	A_3	B_2	10
實驗12	A_3	B_2	10

請利用二因子變異數分析，判斷便當盒的成型溫度以及原料供應商是否會影響到耐壓強度，換句話說，請判斷：

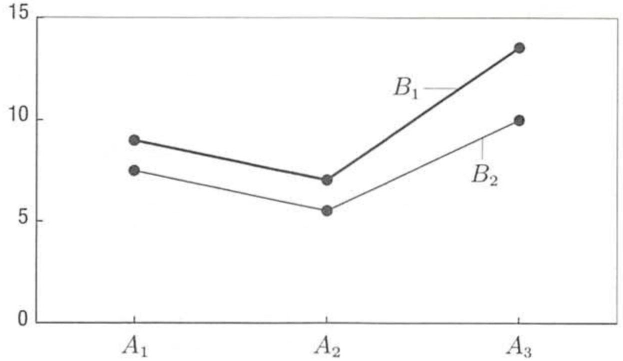
- 「在A_1度成型的便當盒」、「在A_2度成型的便當盒」與「在A_3度成型的便當盒」的平均耐壓強度是否有所不同。
- 「以B_1原料成型的便當盒」、「以B_2原料成型的便當盒」與

「以B_3原料成型的便當盒」的平均耐壓強度是否有所不同。

另外也請判斷交互作用$A \times B$是否存在。其使用的顯著水準為0.05。

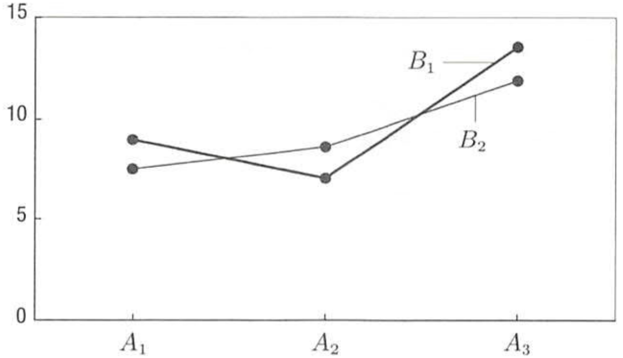
想法

將「問題」提供的資料整理過後，可以得到下圖，圖中各點為各個條件下的平均值。



我們可以發現，圖中的B_1和B_2大致上是平行的。

下圖為使用另一筆資料所繪成的圖：



我們可以發現，圖中的B_1和B_2有交叉而非平行。

依據母體資料所繪成的圖[2]，如果線段平行，我們就能說「$A \times B$沒有交互作用」；如果線段有交叉而非平行，我們就能說「$A \times B$有交互作用」。

2　請注意，這張圖依據的並不是樣本資料。

是否有交互作用，並不代表好或壞，換句話說，「有交互作用實在太棒了」、「沒有交互作用讓人鬆了一口氣」之類的解釋方式並不恰當，我們只是純粹要確認是否有交互作用而已。然而，如果沒有交互作用，就會比較易於解釋分析結果；要是有交互作用，我們就會提出「為什麼會有交互作用呢？」的疑問，而開啟研究的新方向。

解答

STEP 1	定義母體的範圍。	定義下列六者為母體： ・在「A_1與B_1」條件下成型的便當盒 ・在「A_1與B_2」條件下成型的便當盒 ・在「A_2與B_1」條件下成型的便當盒 ・在「A_2與B_2」條件下成型的便當盒 ・在「A_3與B_1」條件下成型的便當盒 ・在「A_3與B_2」條件下成型的便當盒
STEP 2	建立虛無假說以及對立假說。	虛無假說設為： 「A_1、A_2與A_3條件的平均耐壓強度皆相等」 「B_1、B_2條件的平均耐壓強度相等」 「$A \times B$的交互作用不存在」 對立假說設為： 「A_1、A_2與A_3條件的平均耐壓強度不完全相等」 「B_1、B_2條件的平均耐壓強度不相等」 「$A \times B$的交互作用存在」
STEP 3	選擇使用哪一種「檢定」。	進行二因子變異數分析。
STEP 4	決定顯著水準。	顯著水準為0.05。
STEP 5	以樣本的資料，計算出檢定統計量之值。	※後述
STEP 6	計算STEP 5得到的檢定統計量所對應的P值，觀察P值是否比顯著水準還要小。	顯著水準為0.05。 因子A的P值為0.0080，比顯著水準小。 因子B的P值為0.0583，比顯著水準大。 交互作用$A \times B$的P值為0.6211，比顯著水準大。
STEP 7	如果STEP 6中，P值比顯著水準還要小，就能得到「對立假說正確」，或者是「差異顯著」的結論；如果P值比顯著水準大，結論就會是「虛無假說不能說是錯的」，或者是「差異並不顯著」。	對立假說「A_1、A_2與A_3條件的平均耐壓強度不完全相等」是正確的，或者說三者間的差異是顯著的；另一方面，虛無假說「B_1、B_2條件的平均耐壓強度相等」、「$A \times B$的交互作用不存在」不能說是錯的，或者說各項間的差異並不顯著。

3.2 檢定統計量的計算方式

重複實驗的檢定統計量計算方式與非重複實驗的情形幾乎一樣，然而由於重複實驗必須確認$A \times B$有沒有交互作用，計算過程比非重複實驗還要複雜，因此前頁說明檢定步驟時，略過了STEP 5，而將計算過程放在這裡說明。

下列算式中，y_{ijk}代表條件為「A_i與B_j」的第k個資料，等號左邊為每個資料與總平均的差異，那麼理所當然地，我們可以改寫成等號右邊的形式：

$$y_{ijk} - \bar{T} = \left(\bar{A}_i - \bar{T}\right) + \left(\bar{B}_j - \bar{T}\right) + \left\{\left(\overline{A_iB_j} - \bar{T}\right) - \left(\bar{A}_i - \bar{T}\right) - \left(\bar{B}_j - \bar{T}\right)\right\} + \left(y_{ijk} - \overline{A_iB_j}\right)$$

A_i全體資料的總平均　　A_i資料的平均　　B_j資料的平均

條件為「A_i與B_j」的資料的平均

在非重複實驗的二因子變異數分析中，這個等式的每一項都有公認的名稱，也會用固定的公認符號代表[3]，且各項的離差平方和也有固定的公認符號。下表即整理出各項的名稱及代表符號：

	名稱	公認符號	離差平方和的公認符號
$x_{ijk} - \bar{T}$	無特定名稱	無特定符號	S_T
$\left(\bar{A}_i - \bar{T}\right)$	A_i的效果	a_i	S_A
$\left(\bar{B}_j - \bar{T}\right)$	B_j的效果	b_j	S_B
$\left\{\left(\overline{A_iB_j} - \bar{T}\right) - \left(\bar{A}_i - \bar{T}\right) - \left(\bar{B}_j - \bar{T}\right)\right\}$	交互作用 $A \times B$	$(ab)_{ij}$	$S_{A \times B}$
$\left(x_{ijk} - \overline{A_iB_j}\right)$	誤差	e_{ijk}	S_e

3　雖然這裡用「公認」一詞，然而實際上依照文獻的不同也會有所差異。

本節應用例中的檢定統計量之值，可由以下列出的STEP 1到STEP 3的計算過程求出。

STEP1

計算 $\bar{A}_i$、$\bar{B}_j$ 以及 $\overline{A_iB_j}$。

$$\begin{cases} \bar{A}_1 = \dfrac{33}{4} = 8.25 \\ \bar{A}_2 = \dfrac{25}{4} = 6.25 \\ \bar{A}_3 = \dfrac{47}{4} = 11.75 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{B}_1 = \dfrac{59}{6} = 9.83 \\ \bar{B}_2 = \dfrac{46}{6} = 7.67 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{A_1B_1} = \dfrac{18}{2} = 9 \\ \overline{A_1B_2} = \dfrac{15}{2} = 7.5 \\ \overline{A_2B_1} = \dfrac{14}{2} = 7 \\ \overline{A_2B_2} = \dfrac{11}{2} = 5.5 \\ \overline{A_3B_1} = \dfrac{27}{2} = 13.5 \\ \overline{A_3B_2} = \dfrac{20}{2} = 10 \end{cases}$$

STEP2

按照下表的方式計算各項。

	成型溫度 A_i	原料供應商 B_j	耐壓強度 y_{ijk}	$y_{ijk}-\bar{T}$	A_i的效果 a_i	B_j的效果 b_j	交互作用 A×B $(ab)_{ij}$	誤差 e_{ijk}
實驗1	A_1	B_1	8	−0.75	−0.5	1.08	−0.33	−1.0
實驗2	A_1	B_1	10	1.25	−0.5	1.08	−0.33	1.0
實驗3	A_1	B_2	6	−2.75	−0.5	−1.08	0.33	−1.5
實驗4	A_1	B_2	9	0.25	−0.5	−1.08	0.33	1.5
實驗5	A_2	B_1	9	0.25	−2.5	1.08	−0.33	2.0
實驗6	A_2	B_1	5	−3.75	−2.5	1.08	−0.33	−2.0
實驗7	A_2	B_2	5	−3.75	−2.5	−1.08	0.33	−0.5
實驗8	A_2	B_2	6	−2.75	−2.5	−1.08	0.33	0.5
實驗9	A_3	B_1	13	4.25	3	1.08	0.67	−0.5
實驗10	A_3	B_1	14	5.25	3	1.08	0.67	0.5
實驗11	A_3	B_2	10	1.25	3	−1.08	−0.67	0
實驗12	A_3	B_2	10	1.25	3	−1.08	−0.67	0
		合　計	105	0	0	0	0	0
		平　均	8.75	0	0	0	0	0
		離差平方和	94.25	94.25	62	14.08	2.67	15.5
				↓ S_T	↓ S_A	↓ S_B	↓ $S_{A\times B}$	↓ S_e

不只是本節的應用例，對於所有重複實驗之二因子變異數分析，以下的等式都一定會成立。

$$S_T = S_A + S_B + S_{A\times B} + S_e$$

STEP3

將STEP 2得到的數值代入下列公式，求出「重複實驗之二因子變異數分析」的檢定統計量：

$$\frac{V_A}{V_e}=\frac{\frac{S_A}{f_A}}{\frac{S_e}{f_e}} \qquad \frac{V_B}{V_e}=\frac{\frac{S_B}{f_B}}{\frac{S_e}{f_e}} \qquad \frac{V_{A\times B}}{V_e}=\frac{\frac{S_{A\times B}}{f_{A\times B}}}{\frac{S_e}{f_e}}$$

其中，自由度為：

$$\begin{cases} f_T = \text{所有資料個數} - 1 \\ f_A = A\text{ 的水準個數} - 1 \\ f_B = B\text{ 的水準個數} - 1 \\ f_{A\times B} = f_A \times f_B \\ f_e = f_T - f_A - f_B - f_{A\times B} \end{cases}$$

在本節應用例中，檢定統計量為：

$$\begin{cases} \dfrac{V_A}{V_e}=\dfrac{\frac{S_A}{f_A}}{\frac{S_e}{f_e}}=\dfrac{\frac{62}{3-1}}{\frac{15.5}{(12-1)-(3-1)-(2-1)-(3-1)(2-1)}}=12 \\ \dfrac{V_B}{V_e}=\dfrac{\frac{S_B}{f_B}}{\frac{S_e}{f_e}}=\dfrac{\frac{14.0833}{2-1}}{\frac{15.5}{(12-1)-(3-1)-(2-1)-(3-1)(2-1)}}=5.4516 \\ \dfrac{V_{A\times B}}{V_e}=\dfrac{\frac{S_{A\times B}}{f_{A\times B}}}{\frac{S_e}{f_e}}=\dfrac{\frac{2.6667}{(3-1)(2-1)}}{\frac{15.5}{(12-1)-(3-1)-(2-1)-(3-1)(2-1)}}=0.5161 \end{cases}$$

3.3 變異數分析表

下表即為本節應用例所對應的變異數分析表：

	自由度f	離差平方和S	平均平方V	變異數比F_0	P值
A	2	62	31	12	0.0080
B	1	14.0833	14.0833	5.4516	0.0583
$A\times B$	2	2.6667	1.3333	0.5161	0.6211
e	6	15.5	2.5833		
T	11	94.25			

3.4 結果分析

最佳水準

能使 $\overline{A_iB_j}$ 變成最大或最小的「A_i與B_j」就是最佳水準。

在本節的應用例中，$\overline{A_iB_j}$ 的值越大，「A_i與B_j」就越是理想中的條件，所以由第88頁計算的結果：

$$\begin{cases} \overline{A_1B_1} = 9 \\ \overline{A_1B_2} = 7.5 \\ \overline{A_2B_1} = 7 \\ \overline{A_2B_2} = 5.5 \\ \overline{A_3B_1} = 13.5 \\ \overline{A_3B_2} = 10 \end{cases}$$

我們可以得知「A_3與B_1」是最佳水準。

母體平均之估計

μ_{ij}的信心水準為95%時，信賴區間為：

$$\overline{A_iB_j} \pm t(f_e, 0.025)\sqrt{\frac{V_e}{\text{「}A_i\text{與}B_j\text{」的資料個數}}}$$

因此可以推得本節應用例，μ_{31}之信賴區間為：

$$13.5 \pm 2.4469\sqrt{\frac{2.5833}{2}}$$

4. 合併誤差

4.1　合併誤差

讓我們再來看一次上一節應用例的變異數分析表。

	自由度 f	離差平方和 S	平均平方 V	變異數比 F_0	P 值
A	2	62	31	12	0.0080
B	1	14.0833	14.0833	5.4516	0.0583
$A \times B$	2	2.6667	1.3333	0.5161	0.6211
e	6	15.5	2.5833		
T	11	94.25			

一般來說，像這種幾乎可說是沒有 $A \times B$ 交互作用的情況，我們會假定母體中 $A \times B$ 的交互作用完全不存在，而將交互作用的自由度 f 與離差平方和 S 合併到誤差 e 中，這種處理方式稱作「合併誤差」。下表即為上表經過合併誤差後的變異數分析表。原本的結論中 B 因子不會造成顯著差異，但處理後變成會造成顯著差異了。

	自由度 f	離差平方和 S	平均平方 V	變異數比 F_0	P 值
A	2	62	31	13.6514	0.0026
B	1	14.0833	14.0833	6.2018	0.0375
e'	$6+2$	$15.5+2.6667$	$\dfrac{15.5 + 2.6667}{6 + 2}$		
T	11	94.25			

資料經過合併誤差後，即需將「結果分析」視同於非重複實驗的二因子變異數分析。

4.2 應注意的事項

此處有四個要注意的地方。

第一，是否要合併誤差，在統計學上並沒有一定的基準。不過，大致上我們可以把下列條件當作標準：

・F_0的值在2以下
・P值在0.2以上

第二，並非只有重複實驗的二因子變異數才能合併誤差，在多因子變異數分析以及直交表實驗中，合併誤差也是重要的一環。

第三，能與誤差合併的項目不只有交互作用項，因子也可以與誤差合併，不過有一些限制條件。譬如說，在三因子變異數分析中，並不允許「合併A因子與誤差，卻不合併 $A \times C$的交互作用與誤差」。我們只能夠在「合併A因子與誤差，並將所有與A因子有關係的交互作用與誤差合併」與「不合併A因子與誤差，而將某些和A因子有關係的交互作用與誤差合併」中，選擇其中一種做法。

第四，並非在任何情況下，分析者都必須將不顯著的交互作用或因子、誤差合併。當分析者決定要將某因子或某交互作用、誤差合併時，所代表的僅是分析者主觀的認定，與該因子或交互作用相關的虛無假說是正確的而已。請仔細考慮後，再決定是否要合併誤差。

第6章 理想的實驗順序

背景知識

第1章
實驗設計是什麼？

第2章
統計學的基礎知識

第3章
統計學假說檢定

主　題

第4章
一因子變異數分析

第5章
二因子變異數分析

第6章
理想的實驗順序

第7章
直交表實驗

第8章
參數設計

第 6 章　理想的實驗順序

在本章開始之前，請再看一次第63頁、第67頁以及第84頁的表。最左邊那一行寫著「實驗△△」對吧！雖然之前沒有特別提到，但那一行數字僅僅代表實驗的編號而已，並不代表我們實際做實驗的順序，也就是說，雖然並非絕對不能將實驗編號就這麼當作實際實驗的順序，但這樣的做法不太容易被認同。

本章將解說如何設計理想的實驗順序。

1. 實驗的原則

為了與重複實驗的二因子變異數分析對照，我們利用下表來解說實驗原則[1]。下表所列出的實驗順序是筆者隨機決定的。

	實驗順序	成型溫度 A	原料供應商 B	耐壓強度 y
實驗1	10	A_1	B_1	
實驗2	6	A_1	B_1	
實驗3	4	A_1	B_2	
實驗4	3	A_1	B_2	
實驗5	9	A_2	B_1	
實驗6	12	A_2	B_1	
實驗7	2	A_2	B_2	
實驗8	7	A_2	B_2	
實驗9	5	A_3	B_1	
實驗10	1	A_3	B_1	
實驗11	8	A_3	B_2	
實驗12	11	A_3	B_2	

1　在本章中，常常會出現和下表長得幾乎一模一樣的表，請特別留意其中的些微差別。

重複實驗的二因子變異數分析進行一次實驗後，原則上，必須把所有條件回復到原始狀態，才能進行下一次實驗，因此實驗順序如下：

①實驗前的原始狀態
②進行條件為「A_3與B_1」的實驗
③回復到原始狀態
④進行條件為「A_2與B_2」的實驗
⑤回復到原始狀態
⑥進行條件為「A_1與B_2」的實驗

即使第三次實驗與第四次實驗的實驗條件皆為「A_1與B_2」，也不能在還沒把成型溫度調回原始狀態的狀況下，就這麼繼續實驗。

並不是只有重複實驗的二因子變異數分析，需要將所有條件回復到原始狀態之後，才能進行下一次實驗，一因子變異數分析以及非重複實驗的二因子變異數分析都必須遵照這個原則。

2. 亂塊法與分割法

假設我們要設計一個重複實驗的二因子變異數分析，因子A有A_1、A_2、A_3三個水準，因子B有B_1、B_2兩個水準。而受到器械與時間的限制，一天之內能進行的實驗次數只有六次。

並非絕對不能按照下表所列出的實驗順序做實驗，但這樣的做法不太容易被認同。

	實驗順序	成型溫度 A	原料供應商 B	耐壓強度 y
實　驗 第1天	1	A_1	B_1	
	2	A_1	B_2	
	3	A_1	B_1	
	4	A_1	B_2	
	5	A_2	B_1	
	6	A_2	B_2	
實　驗 第2天	7	A_2	B_1	
	8	A_2	B_2	
	9	A_3	B_1	
	10	A_3	B_2	
	11	A_3	B_1	
	12	A_3	B_2	

為什麼不太容易被認同呢？如果濕氣是一個會影響耐壓強度的變數，而實驗第一天是個萬里無雲的天氣，實驗第二天卻下起了傾盆大雨，那麼耐壓強度的差異明明是受到濕氣的影響，卻很有可能會被誤會成受到成型溫度的影響。

這麼說來，理想的實驗順序應該要用什麼方法決定呢？答案有「亂塊法」以及「分割法」。

2.1 亂塊法

用本節的例子來解釋，亂塊法的作法如下：

- 將「實驗日」當作因子R，分為R_1及R_2兩個水準。
- 每個條件為「A_i與B_j」的實驗，一日內只執行一次。
- 在同一日內執行的實驗，其實驗順序為隨機決定。

排出來的實驗過程如下表。另外，像R這種：

- 沒有必要求出最佳水準
- 與「成型溫度」或「原料供應商」等因子不同，水準無法再現的因子，稱作「區集因子」。

	實驗順序	成型溫度 A	原料供應商 B	耐壓強度 y
實　驗	6	A_1	B_1	
第一天	1	A_1	B_2	
R_1	4	A_2	B_1	
	3	A_2	B_2	
	5	A_3	B_1	
	2	A_3	B_2	
實　驗	12	A_1	B_1	
第二天	8	A_1	B_2	
R_2	7	A_2	B_1	
	10	A_2	B_2	
	11	A_3	B_1	
	9	A_3	B_2	

若以亂塊法為原則設計實驗，就必須在每一次的實驗結束後，將條件回復到原始狀態，因此缺點是有些麻煩，而待會將提到該如何克服這個缺點，也就是以「分割法」為原則設計實驗。

2.2 分割法

「分割法」也被稱作「分割實驗」。在本節的例子中，簡單來說，分割法會先固定住難以變更水準的因子，再逐次改變另一個因子的水準，其中固定的因子又被稱作「1次因子」，而逐次改變的因子則被稱作「2次因子」。用較為具體的方式來解釋，操作步驟就是：

①將「實驗日」當作因子R，分為R_1及R_2兩個水準。
②在R_1條件下，隨機決定A_1、A_2、A_3的實驗順序。
③假設步驟②決定的實驗順序為「$A_2 \to A_1 \to A_3$」，那麼就先在A_2條件下，隨機決定B_1、B_2的實驗順序；接著在A_1條件下，隨機決定B_1、B_2的實驗順序；最後在A_3條件下，隨機決定B_1、B_2的實驗順序。
④在R_2條件下，隨機決定A_1、A_2、A_3的實驗順序。
⑤假設步驟④決定的實驗順序為「$A_3 \to A_2 \to A_1$」，那麼就先在A_3條件下，隨機決定B_1、B_2的實驗順序；接著在A_2條件下，隨機決定B_1、B_2的實驗順序；最後在A_1條件下，隨機決定B_1、B_2的實驗順序。

	實驗順序	成型溫度 A	原料供應商 B	耐壓強度 y
實驗第一天 R_1	4	A_1	B_1	
	3	A_1	B_2	
	2	A_2	B_1	
	1	A_2	B_2	
	5	A_3	B_1	
	6	A_3	B_2	
實驗第二天 R_2	12	A_1	B_1	
	11	A_1	B_2	
	9	A_2	B_1	
	10	A_2	B_2	
	7	A_3	B_1	
	8	A_3	B_2	
		↑ 1次因子	↑ 2次因子	

由前頁的表可以知道，在分割法的作法下，一日內成型溫度只變更了三次，而不久前解說過的亂塊法則需要六次，兩者有相當大的差異。

以分割法為原則設計的實驗，比以亂塊法為原則設計的實驗還要容易實行，這是它的優點，然而分割法並非完全沒有缺點，事實上，在計算誤差時分割法會變得相當麻煩。具體來說，分割法的誤差可分為下列兩種：

- 條件為「R_k與A_i」所對應的1次誤差$e_{(1)ik}$
- 條件為「R_k、A_i與B_j」所對應的2次誤差$e_{(2)ijk}$

下表為其變異數分析表，請特別留意增加的列以及變異數比的分母。另外，如果要合併誤差，R應合併到$e_{(1)}$；而$A \times B$則應合併到$e_{(2)}$。

	自由度f	離差平方和S	平均平方V	變異數比F_0	P值
R				$\frac{V_R}{V_{e(1)}}$	
A				$\frac{V_A}{V_{e(1)}}$	
$e_{(1)}$				$\frac{V_{e(1)}}{V_{e(2)}}$	
B				$\frac{V_B}{V_{e(2)}}$	
$A \times B$				$\frac{V_{A \times B}}{V_{e(2)}}$	
$e_{(2)}$					
T					

2.3 應用例

讓我們按照「問題 → 想法 → 解答」的順序，逐步說明。解答只分別列出了亂塊法與分割法的變異數分析表，目的是為了讓讀者能夠更直接地掌握亂塊法與分割法的精神。

問題

（1）左下的表列出了以亂塊法得到的實驗結果，試分析之。

（2）右下的表列出了以分割法得到的實驗結果，試分析之。

	實驗順序	成型溫度 A	原料供應商 B	耐壓強度 y
實驗第一天 R_1	6	A_1	B_1	8
	1	A_1	B_2	6
	4	A_2	B_1	9
	3	A_2	B_2	5
	5	A_3	B_1	13
	2	A_3	B_2	10
實驗第二天 R_2	12	A_1	B_1	10
	8	A_1	B_2	9
	7	A_2	B_1	5
	10	A_2	B_2	6
	11	A_3	B_1	14
	9	A_3	B_2	10

	實驗順序	成型溫度 A	原料供應商 B	耐壓強度 y
實驗第一天 R_1	4	A_1	B_1	8
	3	A_1	B_2	6
	2	A_2	B_1	9
	1	A_2	B_2	5
	5	A_3	B_1	13
	6	A_3	B_2	10
實驗第二天 R_2	12	A_1	B_1	10
	11	A_1	B_2	9
	9	A_2	B_1	5
	10	A_2	B_2	6
	7	A_3	B_1	14
	8	A_3	B_2	10

1次因子　2次因子

想法

下列算式中，y_{ijk}代表條件為「R_k、A_i與B_j」的資料，等號左邊為每個資料與總平均的差異。那麼理所當然地，我們可以改寫成等號右邊的形式：

$$
\begin{aligned}
y_{ijk}-\bar{T} &= \left(\bar{R}_k-\bar{T}\right)+\left(\bar{A}_i-\bar{T}\right)+\left(\bar{B}_j-\bar{T}\right)+\left\{\left(\overline{A_iB_j}-\bar{T}\right)-\left(\bar{A}_i-\bar{T}\right)-\left(\bar{B}_j-\bar{T}\right)\right\}\\
&\quad+\left\{\left(y_{ijk}-\bar{T}\right)-\left(\bar{R}_k-\bar{T}\right)-\left(\overline{A_iB_j}-\bar{T}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

另外，也可以改寫成下列的算式：

$$
\begin{aligned}
y_{ijk}-\bar{T} &= \left(\bar{R}_k-\bar{T}\right)+\left(\bar{A}_i-\bar{T}\right)+\left(\bar{B}_j-\bar{T}\right)+\left\{\left(\overline{A_iB_j}-\bar{T}\right)-\left(\bar{A}_i-\bar{T}\right)-\left(\bar{B}_j-\bar{T}\right)\right\}\\
&\quad+\left[\left\{\left(y_{ijk}-\bar{T}\right)-\left(\bar{R}_k-\bar{T}\right)-\left(\overline{A_iB_j}-\bar{T}\right)\right\}-\left\{\left(\overline{R_kA_i}-\bar{T}\right)-\left(\bar{R}_k-\bar{T}\right)-\left(\bar{A}_i-\bar{T}\right)\right\}\right]\\
&\quad+\left\{\left(\overline{R_kA_i}-\bar{T}\right)-\left(\bar{R}_k-\bar{T}\right)-\left(\bar{A}_i-\bar{T}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

其中前者對應前頁的（1），後者對應前頁的（2）。

解答

（1）

	自由度f	離差平方和S	平均平方V	變異數比F_0	P值
R	1	0.75	0.75	0.2542	0.6355
A	2	62	31	10.5085	0.0162
B	1	14.0833	14.0833	4.7740	0.0806
$A\times B$	2	2.6667	1.3333	0.4520	0.6600
e	5	14.75	2.95		
T	11	94.25			

R因子並不會造成顯著差異，$A\times B$的交互作用也不會造成顯著差異。若將R因子以及$A\times B$的交互作用這兩項合併到誤差e，得到的變異數分析表如下：

	自由度f	離差平方和S	平均平方V	變異數比F_0	P值
A	2	62	31	13.6514	0.0026
B	1	14.0833	14.0833	6.2018	0.0375
e'	8	18.1667	2.2708		
T	11	94.25			

進一步來說，R因子並不會造成顯著差異所代表的是：在不同的日子進行實驗，並不會影響到耐壓強度，因此從此之後，研究時就不需要在意實驗日該選在哪一天了。

如果R因子會造成顯著差異，接著我們就會想問：「為什麼在不同的日子進行實驗，會影響到耐壓強度呢？」進而開啟新的研究方向。

（2）

	自由度 f	離差平方和 S	平均平方 V	變異數比 F_0	P 值
R	1	0.75	0.75	0.1875	0.7072
A	2	62	31	7.75	0.1143
$e_{(1)}$	2	8	4	1.7778	0.3096
B	1	14.0833	14.0833	6.2593	0.0876
$A \times B$	2	2.6667	1.3333	0.5926	0.6069
$e_{(2)}$	3	6.75	2.25		
T	11	94.25			

R因子並不會造成顯著差異，$A \times B$的交互作用也不會造成顯著差異。若將R因子與誤差$e_{(1)}$合併，並將$A \times B$的交互作用與誤差$e_{(2)}$合併，得到的變異數分析表如下：

	自由度 f	離差平方和 S	平均平方 V	變異數比 F_0	P 值
A	2	62	31	10.6286	0.0435
$e_{(1)}$	3	8.75	2.9167	1.5487	0.3116
B	1	14.0833	14.0833	7.4779	0.0411
$e_{(2)}$	5	9.4167	1.8833		
T	11	94.25			

上表的誤差$e_{(1)}$造成的差異雖然不顯著，但不顯著的程度並不大。如果誤差$e_{(1)}$造成的差異非常不顯著的話，我們會將$e_{(1)}$與$e_{(2)}$合併。

3. Fisher的三個原則

在樣本的資料量不多的情況下，如果我們希望盡可能得到更多資訊，那麼在進行實驗時，就必須考慮「Fisher的三個原則」。其中Fisher為人名，取自提出者Ronald Aylmer Fisher。

Fisher的三個原則包括「隨機化」、「區集控制」以及「重複實驗」。所謂的隨機化，指的是隨機決定每個實驗的順序；區集控制用前節的例子來解釋，即將每個R_k當作一「層」，使各層內的環境條件盡可能維持一致，而各層間的環境條件盡可能做出差異；重複實驗指的是在同樣的條件下，對數個個體進行實驗，用前節的例子來解釋，即指在條件為「A_i與B_j」的情況下，重複執行數次實驗。

前節所解說的亂塊法，即滿足Fisher的三個原則。

第7章 直交表實驗

背景知識

第1章
實驗設計是什麼？

第2章
統計學的基礎知識

第3章
統計學假說檢定

主　題

第4章
一因子變異數分析

第5章
二因子變異數分析

第6章
理想的實驗順序

第7章
直交表實驗

第8章
參數設計

第7章 直交表實驗

本章將解說何謂「直交表實驗」。要特別注意的是，本章所使用的數學原理，難度會比之前高上許多。

1. 直交表實驗

所謂的「直交表實驗」是一種假說檢定，它利用下一節將提到的「直交表」，從許多可以作為因子的變數中，找出適合用來分析的因子。

進行直交表實驗時，必須在分析者決定「我們用直交表實驗來分析吧！」之後，才能夠開始蒐集資料，絕對不能在隨意地蒐集一些資料之後，才決定用直交表實驗分析。

另外，在進行直交表實驗時，必須假定每個「需要蒐集資料的水準組合」所對應的每個母體皆服從常態分配，且每個母體的標準差皆相等。在此前提下，才能進行直交表實驗。

2. 直交表

就像剛才所說的，直交表實驗需要用到一個叫作「直交表」的表格才能進行，而直交表的建構難以用簡單幾句話來說明，因此我們大膽決定不在此多加著墨。本節將直接展示建構完成的直交表，並解說直交表的利用方式。

2.1 直交表的種類

直交表可分為「2水準系直交表」與「3水準系直交表」兩大類。[1]

2水準系直交表

下一頁所列出的表格，是稱作「$L_4(2^3)$直交表」的2水準系直交

1　嚴格來說，除了這兩大類外，還存在著其他類別的直交表。我們將在下一章介紹幾個例子。

表。該表有四列三欄，是「$L_4(2^3)$直交表」此一名稱的由來。

	[1]	[2]	[3]
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1
成分	a		a
		b	b

2水準系直交表除了$L_4(2^3)$直交表之外，還包括$L_8(2^7)$、$L_{16}(2^{15})$等種類。

3水準系直交表

下表為稱作「$L_9(3^4)$直交表」的3水準系直交表。該表有九列四欄，是「$L_9(3^4)$直交表」此一名稱的由來。

	[1]	[2]	[3]	[4]
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1
成分	a		a	a^2
		b	b	b[譯註1]

3水準系直交表除了$L_9(3^4)$直交表之外，還包括$L_{27}(3^{13})$ 、$L_{81}(3^{40})$等種類。

譯註1　經查證相關書籍後，此處應為[a^2 b]，而非原著所列的[a b^2]，應為原著作者筆誤。

2.2 直交表的名稱由來

若將$L_4(2^3)$直交表中的「2」置換成「–1」，就可以得到下表[2]：

	[1]	[2]	[3]
1	1	1	1
2	1	–1	–1
3	–1	1	–1
4	–1	–1	1

讓我們試著求出[1]和[2]的內積：

$$(1 \quad 1 \ -1 \ -1)\cdot(1 \ -1 \quad 1 \ -1)=0$$

同樣地，[1]和[3]的內積與[2]和[3]的內積也是0，亦即[1]、[2]和[3]互為正交[譯註2]關係。

如果我們將$L_9(3^4)$直交表中的「2」置換成「–1」、「3」置換成「0」[譯註3]，就可以得到下表[3]：

	[1]	[2]	[3]	[4]
1	1	1	1	1
2	1	–1	–1	–1
3	1	0	0	0
4	–1	1	–1	0
5	–1	–1	0	1
6	–1	0	1	–1
7	0	1	0	–1
8	0	–1	1	0
9	0	0	–1	1

讓我們試著求出[1]和[2]的內積：

$$(1 \quad 1 \quad 1 \ -1 \ -1 \ -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)\cdot(1 \ -1 \quad 0 \quad 1 \ -1 \quad 0 \quad 1 \ -1 \quad 0)=0$$

2 在此省略「成分」列。

3 在此省略「成分」列。

譯註2 此處原文漢字為「直交」，但台灣較常見「正交」一詞，故翻作正交。

譯註3 經查證相關書籍後，此處的2與3應分別置換成ω與ω^2才是較為正確的作法，其中ω為$x^3=1$的一個複數解。

同樣地，表中任意兩欄的內積也是0，亦即各欄互為正交關係，因此這些表才被稱作「直交表」。

2.3 直交表的使用方式

××工業股份有限公司沒有製造便當盒的經驗，現在想要試著開發、製造便當盒產品。上級要求研究員鳥越先生開發的產品，耐壓強度要越大越好。然而因為××工業股份有限公司沒有製造便當盒的經驗，鳥越先生無從得知在開發時，應該要拿哪些變數當作實驗的因子，但是研究又不能沒有進度，因此鳥越先生先提出了「成型溫度」、「原料供應商」、「調配方式」和「成型時間」等四個變數作為實驗因子，準備要進行非重複實驗的四因子變異數分析。但是由下表可以知道，就算每個實驗因子只分成兩個水準，實驗次數還是高達了2^4次。對鳥越先生來說，這樣的實驗次數實在不能算少，這些變數真的能夠當作實驗因子嗎？身為分析者的鳥越先生感到相當不安。

	成型溫度 A	原料供應商 B	調配方式 C	成型時間 D	耐壓強度 y
實驗1	A_1	B_1	C_1	D_1	
實驗2	A_1	B_1	C_1	D_2	
實驗3	A_1	B_1	C_2	D_1	
實驗4	A_1	B_1	C_2	D_2	
實驗5	A_1	B_2	C_1	D_1	
實驗6	A_1	B_2	C_1	D_2	
實驗7	A_1	B_2	C_2	D_1	
實驗8	A_1	B_2	C_2	D_2	
實驗9	A_2	B_1	C_1	D_1	
實驗10	A_2	B_1	C_1	D_2	
實驗11	A_2	B_1	C_2	D_1	
實驗12	A_2	B_1	C_2	D_2	
實驗13	A_2	B_2	C_1	D_1	
實驗14	A_2	B_2	C_1	D_2	
實驗15	A_2	B_2	C_2	D_1	
實驗16	A_2	B_2	C_2	D_2	

這樣的情況，正是直交表登場的時機。依照以下列出的STEP 1到STEP 4一步步照著做，就能夠將實驗次數由十六次減半成八次。

STEP1

準備$L_8(2^7)$直交表如下：

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2
成分	a		a		a		a
		b	b			b	b
				c	c	c	c

STEP2

從$L_8(2^7)$直交表中，選取與變數個數相同的欄數。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2
成分	a		a		a		a
		b	b			b	b
				c	c	c	c

為什麼不單純地選擇[1]、[2]、[3]、[4]欄就好，而要刻意選擇[1]、[2]、[4]、[7]欄呢？這是有理由的。雖然本書不會直接說明理由，不過在本書的第116～120頁中將提出相關的說明。

STEP3

將選擇的欄與變數一一對應，這個一一對應的做法稱為「配置變數」。

	成型溫度 A	原料供應商 B	[3]	調配方式 C	[5]	[6]	成型時間 D
1	A_1	B_1	1	C_1	1	1	D_1
2	A_1	B_1	1	C_2	2	2	D_2
3	A_1	B_2	2	C_1	1	2	D_2
4	A_1	B_2	2	C_2	2	1	D_1
5	A_2	B_1	2	C_1	2	1	D_2
6	A_2	B_1	2	C_2	1	2	D_1
7	A_2	B_2	1	C_1	2	2	D_1
8	A_2	B_2	1	C_2	1	1	D_2
成分	a	b	a b	c	a c	b c	a b c

STEP4

按照下表的方式進行八次實驗。

	成型溫度 A	原料供應商 B	調配方式 C	成型時間 D	耐壓強度 y
1	A_1	B_1	C_1	D_1	
2	A_1	B_1	C_2	D_2	
3	A_1	B_2	C_1	D_2	
4	A_1	B_2	C_2	D_1	
5	A_2	B_1	C_1	D_2	
6	A_2	B_1	C_2	D_1	
7	A_2	B_2	C_1	D_1	
8	A_2	B_2	C_2	D_2	
成分	a	b	c	a b c	

請特別注意，表中每個變數的每個水準都出現了四次，換句話說，我們在每一個條件下，平均地減少了相同的實驗次數。

3. 直交表實驗的缺點

3.1 直交表實驗的缺點

就像剛才所說的，如果用$L_8(2^7)$直交表來設計實驗的話，就算變數有四個之多，也只要八次的實驗就能得到結果，實在是讓人相當振奮。然而這個世界並不像我們想的這麼簡單，本來應該要做的實驗被縮減了，就會產生一些無法避免的缺失。

下表為非重複實驗四因子變異數分析的變異數分析表，在表中我們可以看到交互作用項占了很多列。

	自由度f	離差平方和S	平均平方V	變異數比 F_0	P值
A					
B					
C					
D					
$A\times B$					
$A\times C$					
$A\times D$					
$B\times C$					
$B\times D$					
$C\times D$					
$A\times B\times C$					
$A\times B\times D$					
$A\times C\times D$					
$B\times C\times D$					
e					
T					

另一方面，列於次頁的直交表實驗變異數分析表，完全沒有代表交互作用項的列。

	自由度 f	離差平方和 S	平均平方 V	變異數比 F_0	P 值
A					
B					
C					
D					
e					
T					

在直交表實驗中，變異數分析表的各個交互作用列會自動消失。因為在直交表實驗中，分析者必須自行判斷因子間有沒有交互作用，也就是說：

- 如果分析者認為母體中有 $A\times B$ 的交互作用，就要在一開始建立變異數分析表時，設置 $A\times B$ 的交互作用列。
- 如果分析者認為母體中沒有 $A\times C$ 的交互作用，就要在一開始建立變異數分析表時，不設置 $A\times C$ 的交互作用列。

分析者必須在分析「之前」，就「主觀地判斷」上述這些事。也許這裡會有不少讀者覺得莫名其妙，明明就是因為不知道母體的狀況才要分析，怎麼可能在一開始就能做出這種判斷呢？這樣的想法筆者完全能理解，也完全同意，然而如果不暫時把這樣的疑慮放一邊，我們就無法繼續進行直交表實驗，在這個地方讓我們先暫時別去管這樣的問題。

如果分析者判斷母體中只有 $A\times B$ 的交互作用以及 $B\times D$ 的交互作用，那麼在進行直交表實驗時，所建立的變異數分析表就會如下：

	自由度 f	離差平方和 S	平均平方 V	變異數比 F_0	P 值
A					
B					
C					
D					
$A\times B$					
$B\times D$					
e					
T					

另外，在直交表實驗中不會考慮「●×▲×■」以上的交互作用，不管變數有幾個，一般來說，我們只會考慮「●×▲」的交互作用。

3.2 確認無法配置變數的欄

分析者所判斷的交互作用項目，會影響我們將變數配置到直交表時所選擇的欄。假如我們要使用$L_8(2^7)$直交表來設計實驗，其作法如下：

- 將變數A配置於[1]
- 再將變數B配置於[2]
- 另外，分析者判斷母體中有$A \times B$的交互作用

在此情況下，需要[3]的資訊才能夠計算出$A \times B$的交互作用[4]，因此我們不能將變數配置在[3]。假如我們要使用$L_{27}(3^{13})$直交表來設計實驗，其作法如下：

- 將變數A配置於[1]
- 並將變數B配置於[2]
- 另外，分析者判斷母體中有$A \times B$的交互作用

在此情況下，需要[3]和[4]的資訊才能夠計算出$A \times B$的交互作用，因此我們不能將變數配置在[3]和[4]。

要確認直交表中有哪些欄無法配置變數，有以下幾種方法：

- 交互作用表
- 點線圖
- 直交表的成分代號

4　「需要[3]的資訊」究竟是什麼意思呢？我們將在第125～127頁中解說。

交互作用表

下表為$L_8(2^7)$直交表所對應的「交互作用表」。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
[1]		3	2	5	4	7	6
[2]			1	6	7	4	5
[3]				7	6	5	4
[4]					1	2	3
[5]						3	2
[6]							1

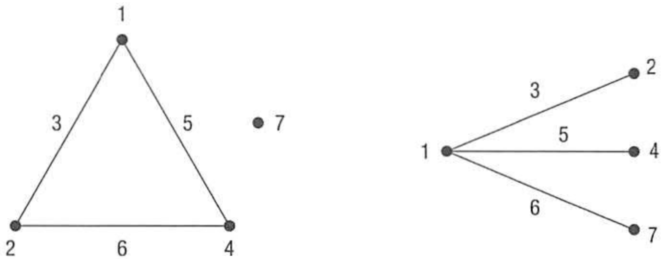
・將變數A配置於[1]。
・再將變數B配置於[2]。
・另外，如果分析者判斷母體中有$A \times B$的交互作用，就不能將變數配置於[3]。

下表為$L_9(3^4)$直交表所對應的交互作用表：

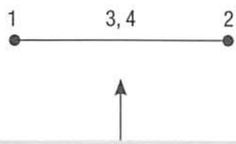
	[1]	[2]
[1]		3 4

點線圖

下圖中，兩者皆為$L_8(2^7)$直交表所對應的「點線圖」。



下圖為$L_9(3^4)$直交表所對應的「點線圖」。



- 將變數A配置於[1]。
- 再將變數B配置於[2]。
- 另外，如果分析者判斷母體中有$A \times B$的交互作用，就不能將變數配置於[3]和[4]。

直交表的成分代號

下表為$L_8(2^7)$直交表。請特別留意成分那一列中，形式為「$[q]$的成分$\times[r]$的成分」的項目。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2
	a		a		a		a
成分		b	b			b	b
				c	c	c	c

・將變數A配置於[1]
・再將變數B配置於[2]
・另外，如果分析者判斷母體中有$A\times B$的交互作用，我們不能將變數配置於[3]，因為：

[1]的成分 $\times$ [2]的成分$=a\times b=ab=$[3]的成分

另外，2水準系直交表中的成分，有下列的關係：

$$a^2=b^2=c^2=d^2=\cdots=1$$

下表為$L_9(3^4)$直交表。請特別留意成分那一列中，形式為「$[q]$的成分×$[r]$的成分」與「$[q]$的成分×（$[r]$的成分）^{2}」的項目。

	[1]	[2]	[3]	[4]
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1
成分	a	b	a b	a 譯註4 b^2

・將變數A配置於[1]

・再將變數B配置於[2]

・另外，如果分析者判斷母體中有$A \times B$的交互作用，我們不能將變數配置於[3]和[4]，因為：

[1]的成分 × [2]的成分$=a \times b=ab=$[3]的成分

（[1]的成分）×（[2]的成分）$^2=a \times b^2=ab^2=$[4]的成分 譯註5

如果找不到上述兩種形式的項目，那麼請再找找看形式為：

（$[q]$的成分×$[r]$的成分）^{2}

（$[q]$的成分×（$[r]$的成分）^{2}）^{2}

的項目。另外，3水準系直交表中的成分，有下面的關係：

$$a^3 = b^3 = c^3 = d^3 = \cdots = 1$$

譯註4　經查證相關書籍後，此處應為$[a^2\ b]$，而非原著所列的$[a\ b^2]$，應為原著作者筆誤。

譯註5　在譯註4所指的地方修改過後，這裡也必須跟著更改代入的數。

3.3 直交表的數學特徵

直交表有許多數學上的特徵，在這裡我們介紹其中的三個。

以$L_4(2^3)$直交表為例，本書此後提到直交表及其對應的資料時，

	[1]	[2]	[3]	資料
1	1	1	1	y_1
2	1	2	2	y_2
3	2	1	2	y_3
4	2	2	1	y_4
成分	a		a	
		b	b	

都會將以下的東西定義為「欄平方和」：

$$2\left\{\left(\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)^2+\left(\frac{y_3+y_4}{2}-\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)^2\right\}$$

$$2\left\{\left(\frac{y_1+y_3}{2}-\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)^2+\left(\frac{y_2+y_4}{2}-\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)^2\right\}$$

$$2\left\{\left(\frac{y_1+y_4}{2}-\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)^2+\left(\frac{y_2+y_3}{2}-\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)^2\right\}$$

並將其記為$S_{[q]}$，如下所示：

$$S_{[1]}=2\left\{\left(\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)^2+\left(\frac{y_3+y_4}{2}-\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)^2\right\}$$

$$S_{[2]}=2\left\{\left(\frac{y_1+y_3}{2}-\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)^2+\left(\frac{y_2+y_4}{2}-\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)^2\right\}$$

$$S_{[3]}=2\left\{\left(\frac{y_1+y_4}{2}-\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)^2+\left(\frac{y_2+y_3}{2}-\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)^2\right\}$$

特徵1

以$L_4(2^3)$直交表為例：

	[1]	[2]	[3]	資料
1	1	1	1	y_1
2	1	2	2	y_2
3	2	1	2	y_3
4	2	2	1	y_4
成分	a		a	
		b	b	

下列等式會成立：

$$S_{[1]} = \frac{\{(y_1 + y_2) - (y_3 + y_4)\}^2}{4}$$

$$S_{[2]} = \frac{\{(y_1 + y_3) - (y_2 + y_4)\}^2}{4}$$

$$S_{[3]} = \frac{\{(y_1 + y_4) - (y_2 + y_3)\}^2}{4}$$

同樣，在2水準系直交表中，以下等式會成立：

$$S_{[q]} = \frac{\{\text{與}[q]\text{的第1水準對應的資料總和} - \text{與}[q]\text{的第2水準對應的資料總和}\}^2}{\text{直交表的列數}}$$

試著確認看看吧！

$$
\begin{aligned}
S_{[1]} &= 2\left\{\left(\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)^2+\left(\frac{y_3+y_4}{2}-\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)^2\right\}\\
&= 2\left\{\left(\frac{(y_1+y_2)-(y_3+y_4)}{4}\right)^2+\left(\frac{-(y_1+y_2)+(y_3+y_4)}{4}\right)^2\right\}\\
&= 2\left\{\left(\frac{(y_1+y_2)-(y_3+y_4)}{4}\right)^2+\left(\frac{(y_1+y_2)-(y_3+y_4)}{4}\right)^2\right\}\\
&= \frac{\{(y_1+y_2)-(y_3+y_4)\}^2}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{[2]} &= 2\left\{\left(\frac{y_1+y_3}{2}-\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)^2+\left(\frac{y_2+y_4}{2}-\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)^2\right\}\\
&= 2\left\{\left(\frac{(y_1+y_3)-(y_2+y_4)}{4}\right)^2+\left(\frac{-(y_1+y_3)+(y_2+y_4)}{4}\right)^2\right\}\\
&= 2\left\{\left(\frac{(y_1+y_3)-(y_2+y_4)}{4}\right)^2+\left(\frac{(y_1+y_3)-(y_2+y_4)}{4}\right)^2\right\}\\
&= \frac{\{(y_1+y_3)-(y_2+y_4)\}^2}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{[3]} &= 2\left\{\left(\frac{y_1+y_4}{2}-\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)^2+\left(\frac{y_2+y_3}{2}-\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)^2\right\}\\
&= 2\left\{\left(\frac{(y_1+y_4)-(y_2+y_3)}{4}\right)^2+\left(\frac{-(y_1+y_4)+(y_2+y_3)}{4}\right)^2\right\}\\
&= 2\left\{\left(\frac{(y_1+y_4)-(y_2+y_3)}{4}\right)^2+\left(\frac{(y_1+y_4)-(y_2+y_3)}{4}\right)^2\right\}\\
&= \frac{\{(y_1+y_4)-(y_2+y_3)\}^2}{4}
\end{aligned}
$$

特徵2

假設Q是直交表的欄數，那麼不管是2水準系直交表，還是3水準系直交表，以下的等式必會成立：

$$S_T = S_{[1]} + S_{[2]} + \cdots + S_{[Q]}$$

試著確認看看吧！

讓我們來確認$L_4(2^3)$直交表的情形。

S_T可以改寫為下面的形式：

$$\begin{aligned} S_T &= (y_1 - \bar{T})^2 + (y_2 - \bar{T})^2 + (y_3 - \bar{T})^2 + (y_4 - \bar{T})^2 \\ &= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - 4\left(\bar{T}\right)^2 \end{aligned}$$

另一方面，$S_{[1]}+S_{[2]}+S_{[3]}$也可以改寫為下面的形式：

$$\begin{aligned} & S_{[1]} + S_{[2]} + S_{[3]} \\ = \ & 2\left\{\left(\frac{y_1+y_2}{2} - \bar{T}\right)^2 + \left(\frac{y_3+y_4}{2} - \bar{T}\right)^2\right\} + 2\left\{\left(\frac{y_1+y_3}{2} - \bar{T}\right)^2 + \left(\frac{y_2+y_4}{2} - \bar{T}\right)^2\right\} \\ & +2\left\{\left(\frac{y_1+y_4}{2} - \bar{T}\right)^2 + \left(\frac{y_2+y_3}{2} - \bar{T}\right)^2\right\} \\ = \ & \frac{(y_1+y_2)^2}{2} + \frac{(y_3+y_4)^2}{2} + \frac{(y_1+y_3)^2}{2} + \frac{(y_2+y_4)^2}{2} + \frac{(y_1+y_4)^2}{2} + \frac{(y_2+y_3)^2}{2} \\ & -6\left(y_1+y_2+y_3+y_4\right)\bar{T} + 12\left(\bar{T}\right)^2 \\ = \ & \frac{(y_1+y_2)^2}{2} + \frac{(y_3+y_4)^2}{2} + \frac{(y_1+y_3)^2}{2} + \frac{(y_2+y_4)^2}{2} + \frac{(y_1+y_4)^2}{2} + \frac{(y_2+y_3)^2}{2} - 12\left(\bar{T}\right)^2 \\ = \ & y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + \frac{(y_1+y_2+y_3+y_4)^2}{2} - 12\left(\bar{T}\right)^2 \\ = \ & y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - 4\left(\bar{T}\right)^2 \end{aligned}$$

因此可以證明$S_T = S_{[1]} + S_{[2]} + S_{[3]}$必會成立。

等式 $S_T = S_{[1]} + S_{[2]} + \cdots + S_{[Q]}$ 成立，代表的是：為了能夠得出S_e，我們不能將直交表的每一欄都配置變數。

特徵3

以$L_4(2^3)$直交表為例，將變數以下表的方式配置：

	變數 A	變數 B	[3]	資料
1	A_1	B_1	1	y_1
2	A_1	B_2	2	y_2
3	A_2	B_1	2	y_3
4	A_2	B_2	1	y_4
成分	a		a	
		b	b	

另外，如果分析者判斷母體中有$A \times B$的交互作用，下列等式將會成立：

$$S_{A \times B} = S_{[3]}$$

以$L_9(3^4)$直交表為例，將變數以下表的方式配置：

	變數 A	變數 B	[3]	[4]	資料
1	A_1	B_1	1	1	y_1
2	A_1	B_2	2	2	y_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	A_3	B_3	2	1	y_9
成分	a		a	a	
		b	b	b^2	

另外，如果分析者判斷母體中有$A \times B$的交互作用，下列等式將會成立：

$$S_{A \times B} = S_{[3]} + S_{[4]}$$

也就是說，不管是2水準系直交表還是3水準系直交表，如果分析者判斷母體中有$A \times B$的交互作用，那麼在進行交互作用的相關計算時，就會用到前面所提到的，那些不能配置變數的欄。

(試著確認看看吧！)

以$L_4(2^3)$直交表為例，按照下列步驟來進行確認：

・將變數A配置於[1]。

・再將變數B配置於[2]。

・另外，判斷母體中是否有$A \times B$的交互作用。

定義S_{AB}是以「A_i與B_j」為條件的離差平方和，我們可以得到：

$$S_{A\times B} = S_{AB} - S_A - S_B$$

接著按照各項離差平方和的定義拆解組合，計算過程如下：

$$S_{A\times B} = S_{AB} - S_A - S_B$$

$$\begin{aligned}
S_{AB} &= \left(\frac{y_1}{1} - \bar{T}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{1} - \bar{T}\right)^2 + \left(\frac{y_3}{1} - \bar{T}\right)^2 + \left(\frac{y_4}{1} - \bar{T}\right)^2 \\
&= \left(y_1 - \bar{T}\right)^2 + \left(y_2 - \bar{T}\right)^2 + \left(y_3 - \bar{T}\right)^2 + \left(y_4 - \bar{T}\right)^2 \\
&= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - 2\left(y_1 + y_2 + y_3 + y_4\right)\bar{T} + 4\left(\bar{T}\right)^2 \\
&= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - 4\left(\bar{T}\right)^2 \\
S_A &= 2\left\{\left(\frac{y_1 + y_2}{2} - \bar{T}\right)^2 + \left(\frac{y_3 + y_4}{2} - \bar{T}\right)^2\right\} \\
&= \frac{\left(y_1 + y_2\right)^2}{2} + \frac{\left(y_3 + y_4\right)^2}{2} - 2\left(y_1 + y_2 + y_3 + y_4\right)\bar{T} + 4\left(\bar{T}\right)^2 \\
&= \frac{\left(y_1 + y_2\right)^2}{2} + \frac{\left(y_3 + y_4\right)^2}{2} - 4\left(\bar{T}\right)^2 \\
S_B &= 2\left\{\left(\frac{y_1 + y_3}{2} - \bar{T}\right)^2 + \left(\frac{y_2 + y_4}{2} - \bar{T}\right)^2\right\} \\
&= \frac{\left(y_1 + y_3\right)^2}{2} + \frac{\left(y_2 + y_4\right)^2}{2} - 4\left(\bar{T}\right)^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - 4\left(\bar{T}\right)^2 \\
&\quad - \left\{ \frac{(y_1 + y_2)^2}{2} + \frac{(y_3 + y_4)^2}{2} - 4\left(\bar{T}\right)^2 \right\} \\
&\quad - \left\{ \frac{(y_1 + y_3)^2}{2} + \frac{(y_2 + y_4)^2}{2} - 4\left(\bar{T}\right)^2 \right\} \\
&= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \\
&\quad - \frac{(y_1 + y_2)^2}{2} - \frac{(y_3 + y_4)^2}{2} - \frac{(y_1 + y_3)^2}{2} - \frac{(y_2 + y_4)^2}{2} + 4\left(\bar{T}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left\{ 4y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2 + 4y_4^2 \right. \\
&\qquad \left. -2(y_1 + y_2)^2 - 2(y_3 + y_4)^2 - 2(y_1 + y_3)^2 - 2(y_2 + y_4)^2 + 16\left(\bar{T}\right)^2 \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&2(y_1 + y_2)^2 + 2(y_3 + y_4)^2 + 2(y_1 + y_3)^2 + 2(y_2 + y_4)^2 \\
&= 4y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2 + 4y_4^2 + 4y_1y_2 + 4y_3y_4 + 4y_1y_3 + 4y_2y_4 \\
&= 4y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2 + 4y_4^2 + 4(y_1 + y_4)(y_2 + y_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\left\{ -4(y_1 + y_4)(y_2 + y_3) + 16\left(\bar{T}\right)^2 \right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{ -4(y_1 + y_4)(y_2 + y_3) + (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)^2 \right\} \\
&= \frac{\{(y_1 + y_4) - (y_2 + y_3)\}^2}{4} = S_{[3]}
\end{aligned}
$$

4. 應用例

4.1 應用例

讓我們按照「問題 → 解答」的順序，逐步說明。與解說一因子變異數分析及二因子變異數分析時不同，為減少繁雜的計算過程，解答只列出變異數分析表。

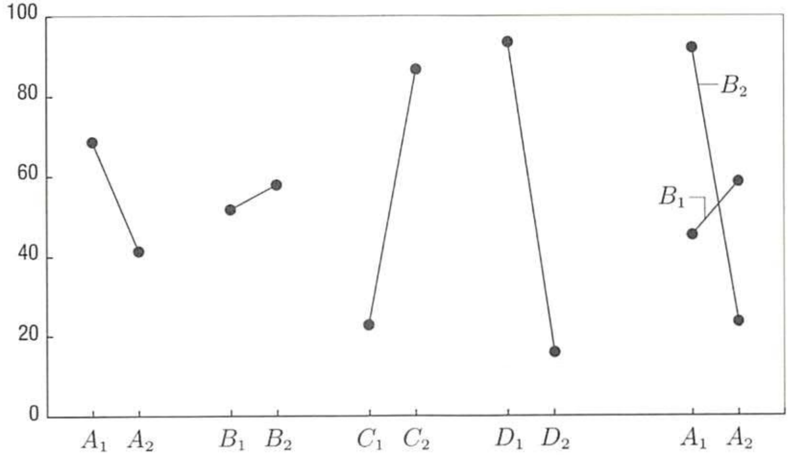
在一因子變異數分析及二因子變異數分析的章節中，「結果分析」的部分說明了如何得知最佳水準以及推測母體的平均，不過本節將不會這麼做。筆者認為直交表實驗的精神，在於從許多可以作為因子的變數中，找出適合用來分析的因子，故過於拘泥於其他細節是沒有必要的。

問題

××工業股份有限公司沒有製造便當盒的經驗，現在想要試著開發、製造便當盒產品。上級要求研究員鳥越先生開發的產品，耐壓強度要越大越好，然而因為××工業股份有限公司沒有製造便當盒的經驗，鳥越先生無從得知在開發時，應該要拿哪些變數當作實驗的因子，但是研究又不能沒有進度，因此鳥越先生先提出了「成型溫度」、「原料供應商」、「調配方式」和「成型時間」等四個變數作為實驗因子，同時也懷疑 $A\times B$有交互作用，在此情況下鳥越先生進行了一系列的實驗，實驗結果的記錄如下表：

	成型溫度 A	原料供應商 B	調配方式 C	成型時間 D	耐壓強度 y
實驗1	A_1	B_1	C_1	D_1	54
實驗2	A_1	B_1	C_2	D_2	36
實驗3	A_1	B_2	C_1	D_2	4
實驗4	A_1	B_2	C_2	D_1	180
實驗5	A_2	B_1	C_1	D_2	5
實驗6	A_2	B_1	C_2	D_1	112
實驗7	A_2	B_2	C_1	D_1	28
實驗8	A_2	B_2	C_2	D_2	19

下圖表示在各個水準之下，所得資料的平均。我們可以發現，與其他的變數相比，B因子在不同水準下的平均值並不會相差太多，雖然在計算分析之前還不能妄下定論，但我們大概可以感覺到，B不太可能是造成差異的原因。



（1）請在「假設$A \times B$沒有交互作用」的前提下，利用直交表實驗來回答以下四個問題，並設顯著水準為0.05。

- A因子是否會影響耐壓強度？
- B因子是否會影響耐壓強度？
- C因子是否會影響耐壓強度？
- D因子是否會影響耐壓強度？

（2）請在「假設$A \times B$有交互作用」的前提下，利用直交表實驗來回答以下五個問題，並設顯著水準為0.05。

- A因子是否會影響耐壓強度？
- B因子是否會影響耐壓強度？
- C因子是否會影響耐壓強度？
- D因子是否會影響耐壓強度？
- $A \times B$的交互作用是否存在？

解答

（1）

	自由度 f	離差平方和 S	平均平方 V	變異數比 F_0	P 值
A	1	1512.5	1512.5	0.9923	0.3926
B	1	72	72	0.0472	0.8419
C	1	8192	8192	5.3747	0.1032
D	1	12012.5	12012.5	7.8814	0.0674
e	3	4572.5	1524.2		
T	7	26361.5			

由變異數分析表，我們可以得到以下結論：

- A不會造成顯著差異。
- B不會造成顯著差異。
- C不會造成顯著差異。
- D不會造成顯著差異。

在解釋直交表實驗的結果時，要注意幾個地方。

就像先前所說的，直交表實驗的精神，在於從許多可以作為因子的變數中，找出適合用來分析的因子。因此並不會硬性要求要按照一定的規矩求出F_0之值和P值，而是應該要用較為彈性的態度去理解實驗結果所代表的意義。然而具體來說，要有彈性到什麼樣的程度，這就要靠分析者自行判斷了。

以我來說，我會這麼解釋剛才所得到的結果：

- A雖然不會造成顯著的差異，但我們也不能完全忽視A的存在。
- B不會造成顯著的差異，我們甚至可以斷定B不會影響耐壓強度！
- C雖然不會造成顯著的差異，但仍有跡象顯示C可能是原因。
- 把D視為造成差異的原因，應該也不會有什麼問題吧！

另外，如果將B合併到e，會得到下面的變異數分析表：

	自由度f	離差平方和S	平均平方V	變異數比 F_0	P值
A	1	1512.5	1512.5	1.3026	0.3174
C	1	8192	8192	7.0552	0.0566
D	1	12012.5	12012.5	10.3456	0.0324
e'	3+1	4572.5+72	$\frac{4572.5+72}{3+1}$		
T	7	26361.5			

（2）

	自由度f	離差平方和S	平均平方V	變異數比F_0	P值
A	1	1512.5	1512.5	2.4990	0.2547
B	1	72	72	0.1190	0.7631
C	1	8192	8192	13.5349	0.0666
D	1	12012.5	12012.5	19.8472	0.0469
$A\times B$	1	3362	3362	5.5547	0.1425
e	2	1210.5	605.25		
T	7	26361.5			

由變異數分析表，我們可以得到以下結論：

- A不會造成顯著差異。
- B不會造成顯著差異。
- C不會造成顯著差異。
- D會造成顯著差異。
- $A\times B$的交互作用不會造成顯著差異。

照我們得到的結果，很難判斷$A \times B$的交互作用所扮演的角色。

雖然在分析前，我們就先斷定$A \times B$有交互作用，然而算出來的P值卻是0.1425，比顯著水準0.05還要高，由此數據看來，一開始的判斷是錯誤的。但換個角度想，「不管是顯著水準0.05，還是P值0.1425，四捨五入之後都會變成0.1」由這個觀點看來，顯著水準和P值並沒有太大的差異，因此也可以說$A \times B$的交互作用會造成顯著差異，即一開始的判斷是正確的。然而即使如此，身為$A \times B$交互作用的「雙親」之一的B因子，其P值和顯著水準有很大的差異，說得更極端一點，B因子幾乎不會對耐壓強度造成任何影響，在這樣的前提下，$A \times B$的交互作用似乎連討論都不需要討論了。

由上一段的內容我們可以知道，一般來說，在直交表實驗中，若想要討論交互作用是否存在，前提必須是作為「雙親」的因子都要能造成顯著差異。

另外，稍微思考一下應該就能知道，剛才的變異數分析表，若將$A \times B$合併到e，就會得到和（1）一模一樣的變異數分析表。

4.2 檢定統計量之值的計算方式

本節應用例中，（2）的檢定統計量之值可由以下列出的STEP 1到STEP 2計算求出。

STEP1

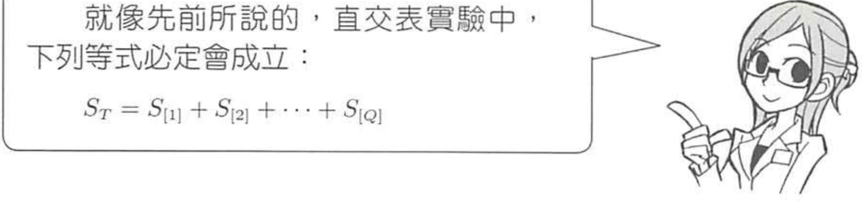
計算$S_{[1]}$、$S_{[2]}$、…、$S_{[Q]}$。

將A因子配置在[1]、B因子配置在[2]，

也就是說，令$\begin{cases} S_{[1]} = S_A \\ S_{[2]} = S_B \\ S_{[3]} = S_{A \times B} \end{cases}$，其平方和的計算過程就會如下：

$$\begin{cases} S_{[1]} &= \dfrac{\{(y_1+y_2+y_3+y_4)-(y_5+y_6+y_7+y_8)\}^2}{8} \\ &= \dfrac{\{(54+36+4+180)-(5+112+28+19)\}^2}{8} \\ &= 1512.5 \\ \\ S_{[3]} &= \dfrac{\{(y_1+y_2+y_7+y_8)-(y_3+y_4+y_5+y_6)\}^2}{8} \\ &= \dfrac{\{(54+36+28+19)-(4+180+5+112)\}^2}{8} \\ &= 3362 \end{cases}$$

由於版面的關係，在此省略了$S_{[2]}$的計算過程。



STEP2

直交表實驗的檢定統計量之公式如下：

$$\frac{V_{[q]}}{V_e} = \frac{\dfrac{S_{[q]}}{f_{[q]}}}{\dfrac{S_e}{f_e}}$$

將STEP 1求出的各項數值，代入上面的公式，以求出檢定統計量之值，其中：

$$\begin{cases} f_T = \text{所有資料的個數} - 1 \\ f_{[q]} = [q]\text{ 的水準個數} - 1 \\ f_{[q]\times[r]} = f_{[q]} \times f_{[r]} \\ f_e = f_T - \text{所有變數與交互作用的自由度總和} \end{cases}$$

舉例來說，如果要求 $\dfrac{V_{[1]}}{V_e}$ 與 $\dfrac{V_{[1]\times[2]}}{V_e}$ 的值，其計算過程如下：

$$\begin{cases} \dfrac{V_{[1]}}{V_e} = \dfrac{V_A}{V_e} = \dfrac{\dfrac{S_A}{f_A}}{\dfrac{S_e}{f_e}} = \dfrac{\dfrac{1512.5}{2-1}}{\dfrac{1210.5}{(8-1)-(1+1+1+1+1)}} = 2.4990 \\ \dfrac{V_{[1]\times[2]}}{V_e} = \dfrac{V_{A\times B}}{V_e} = \dfrac{\dfrac{S_{A\times B}}{f_{A\times B}}}{\dfrac{S_e}{f_e}} = \dfrac{\dfrac{3362}{(2-1)(2-1)}}{\dfrac{1210.5}{(8-1)-(1+1+1+1+1)}} = 5.5547 \end{cases}$$

第8章 參數設計

背景知識

第1章
實驗設計是什麼？

第2章
統計學的基礎知識

第3章
統計學假說檢定

主 題

第4章
一因子變異數分析

第5章
二因子變異數分析

第6章
理想的實驗順序

第7章
直交表實驗

第8章
參數設計

第 8 章　參數設計

在本書的最終章，將探討一般實驗設計相關書籍很少接觸的「參數設計」。

1. 參數設計

富澤先生是△△食品股份有限公司的研發人員，有天上司命令他開發「能讓做出來的鬆餅更加鬆軟的鬆餅粉」，於是富澤先生每天在實驗室裡拼命地工作。富澤先生經過一番努力，某天，終於做出了滿意的試製品，上司和其他研發人員試吃後，無不稱讚。終於鬆了一口氣的富澤先生，情不自禁地熱淚盈眶，為新產品的開發故事劃下完美的句點。

原本故事應該只到這裡，但其實沒那麼簡單就結束。富澤先生開發出來的試製品確實很棒，但這也許是因為實驗室的溫度與濕度管理良好，鬆餅粉和牛奶的比例也被嚴格控制，才能製作出這麼優秀的產品。事實上，日本夏天和冬天的環境條件差異很大，沖繩和北海道的環境亦不盡相同，也並非每個人都會按照△△食品公司建議的步驟製作鬆餅。

遺憾的是，富澤先生的試製品中有下列「雜音因子」：

- 烤鬆餅時的室內溫度。
- 烤鬆餅時的空氣濕度。
- 烤盤的溫度。
- 與鬆餅粉混合的牛奶量。
- 與鬆餅粉混合的牛奶是鮮奶還是低脂牛乳。
- 混合鬆餅粉和牛奶時，使用的是電動攪拌器，還是手動攪拌器。

會產生雜音因子，是因為沒有把環境或是其他人為而無法控制的因素考慮進去。若是忽略了雜音因子在「實際情況」中帶來的影響，這樣的研究是相當危險的。

本書到目前為止所說的因子，指的是研究者有辦法控制其水準的變數，稱為「控制因子[1]」。每個控制因子有不同水準，可以從中產生許多組合以進行試驗。「參數設計」的工作，就是討論該如何設定控制因子的水準，使雜音因子造成的影響降到最低。本章將介紹如何進行參數設計。

參數設計其實是一門可以寫成厚厚一本書的學問，但本章將用較簡明的方式說明之。

2. SN比

所謂的SN比，簡單來說，指的就是$10\log_{10}\dfrac{\text{Signal}}{\text{Noise}}$的值。換句話說，就是以Noise為基準，所得到的Signal大小。在一般的情況下，我們會希望SN比越大越好。

在參數設計的過程中，將會頻繁地利用SN比，而SN比的計算方式也會因為情況的不同而有所變化。本節將解說下表兩種情況的SN比：

1　除了99頁所提到的區集因子之外。

	概要
望大特性	如「油耗」（註：此指的是，單位距離／單位耗油量）、「全壘打數」等，數值越大越好的資料，所對應的SN值。
望目特性	如「產品螺絲的直徑」、「標準體重」等，數值越接近「某個特定的值」越好的資料，所對應的SN值。

2.1 望大特性

我們的周圍存在著許多數字，其中，有些數字對我們來說越大越好，譬如「油耗」、「全壘打數」等等。換句話說，這些數字越「大」，就越是我們希「望」得到的結果，而與之對應的就是「望大特性」的SN比[2]，也就是：

$$-10\log_{10}\left[\frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{y_1^2}+\cdots+\frac{1}{y_n^2}\right)\right]$$

例

下表為「車種A_1的油耗」和「車種A_2的油耗」的記錄

車種A_1的油耗	車種A_2的油耗
17.6	13.3
16.7	13.5
17.4	12.9
17.1	12.3
16.9	

它們各自的SN比可由以下過程計算出來：

$$\begin{cases} -10\log_{10}\left[\frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{17.6^2}+\cdots+\frac{1}{16.9^2}\right)\right]=24.7 \\ -10\log_{10}\left[\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{13.3^2}+\cdots+\frac{1}{12.3^2}\right)\right]=22.3 \end{cases}$$

2　「究竟哪個是Signal，哪個是Noise呢？」、「這個算式是根據什麼樣的基礎推導出來的呢？」請先暫時不要拘泥在這樣的問題上，如果在這裡裹足不前，很難將本章的內容讀完。如果讀者無論如何都想知道原理的話，建議閱讀較為專業的文獻。

2.2 望目特性

另外，有些數字對我們來說，「越接近某個特定的值」越好，譬如「生產的螺絲直徑」、「標準體重」等等。換句話說，這些數字越接近某個「目」標值，就越是我們希「望」得到的結果，而與之對應的就是「望目特性」的SN比：

$$10\log_{10}\left[\frac{(\bar{y})^2}{\frac{1}{n-1}\times\left\{(y_1-\bar{y})^2+\cdots+(y_n-\bar{y})^2\right\}}-\frac{1}{n}\right]$$

例

下表為「使用新買的機台所生產的螺絲直徑」與「使用機齡為五年的機台所生產的螺絲直徑」的記錄。

使用新買的機台所生產的螺絲直徑	使用機齡為五年的機台所生產的螺絲直徑
10.0	10.1
10.1	10.0
10.0	10.0
10.0	9.9
	10.0

它們各自的SN比可由以下的過程計算出來：

$$\begin{cases}10\log_{10}\left(\dfrac{10.025^2}{0.0025}-\dfrac{1}{4}\right)=46.0\\ 10\log_{10}\left(\dfrac{10^2}{0.005}-\dfrac{1}{5}\right)=43.0\end{cases}$$

3. 參數設計所使用的直交表

與進行直交表實驗時類似，在進行參數設計時同樣會用到直交表，然而參數設計比較傾向於使用以下的直交表：

- L_{12}直交表
- L_{18}直交表
- L_{36}直交表

與2水準系直交表或3水準系直交表不同，這些直交表並不存在無法配置變數的欄，換句話說，不需要特別去確認無法配置變數的欄[3]。

為供讀者們參考，在此列出L_{12}直交表和L_{18}直交表，而L_{36}直交表由於欄數和列數過多，礙於版面限制恕不在此列出。

L_{12}直交表

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
3	1	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2
4	1	2	1	2	2	1	2	2	1	1	2
5	1	2	2	1	2	2	1	2	1	2	1
6	1	2	2	2	1	2	2	1	2	1	1
7	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1
8	2	1	2	1	2	2	2	1	1	1	2
9	2	1	1	2	2	2	1	2	2	1	1
10	2	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2
11	2	2	1	2	1	2	1	1	1	2	2
12	2	2	1	1	2	1	2	1	2	2	1

3 若讀者很在意這個部分，可以參考宮川雅巳的《品質を獲得する技術　タグチメソッドがもたらしたもの》（日科技連出版社）或其他工具書。

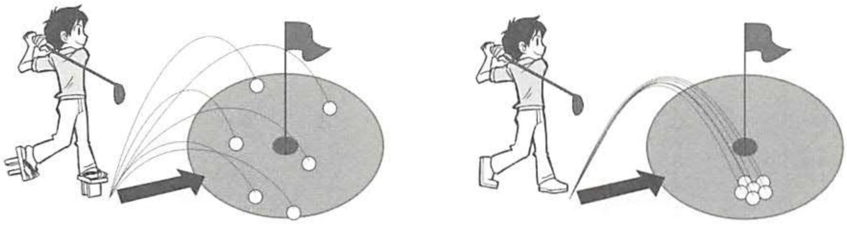
L_{18}直交表

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	2	2	2	2
3	1	1	3	3	3	3	3	3
4	1	2	1	1	2	2	3	3
5	1	2	2	2	3	3	1	1
6	1	2	3	3	1	1	2	2
7	1	3	1	2	1	3	2	3
8	1	3	2	3	2	1	3	1
9	1	3	3	1	3	2	1	2
10	2	1	1	3	3	2	2	1
11	2	1	2	1	1	3	3	2
12	2	1	3	2	2	1	1	3
13	2	2	1	2	3	1	3	2
14	2	2	2	3	1	2	1	3
15	2	2	3	1	2	3	2	1
16	2	3	1	3	2	3	1	2
17	2	3	2	1	3	1	2	3
18	2	3	3	2	1	2	3	1

4. 應用例

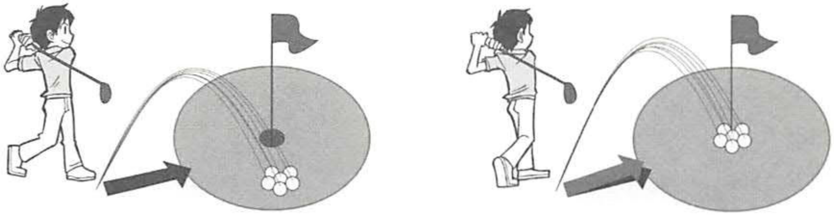
在此以望目特性的參數設計作為例子說明。在望目特性的參數設計中，其操作步驟大致如下：

①尋找能夠使落點更加穩定的因子。



本例中的控制因子為「鞋子」。

②在控制①的因子保持不變的情況下，尋找能夠使落點更接近目標的因子。



本例中的控制因子為「身體的方向」。

若用較為嚴謹的說法描述，操作步驟便會如下：[4]

①尋找能夠對SN比造成顯著影響的控制因子，以及最佳水準。

②在控制①的因子保持不變的情況下，尋找能對平均值造成顯著影響的控制因子。

而不管是①還是②，討論的控制因子可以是一個也可以是複數個。

4　「不太了解步驟①中的『SN比』和步驟②中的『平均』代表什麼意思」，應該有不少讀者會這麼想吧！在下一頁會有詳細的說明，請先暫時忍耐一下。

問題

讓我們按照「問題 → 解答」的順序，逐步說明。

富澤先生推測的控制因子和雜音因子如下表所示[5]：

控制因子	雜音因子
・A ・B ・C	・與鬆餅粉混合的牛奶量 ・烤盤的溫度

另外，富澤先生測得在目前為止的實驗過程中，讓人覺得最鬆軟的鬆餅硬度為50[6]。

（1）請尋找能夠對SN比造成顯著影響的控制因子，以及最佳水準。

（2）請尋找能對平均值造成顯著影響的控制因子。

（3）假設△△食品股份有限公司目前製作鬆餅粉的各個水準分別為「A_1、B_2與C_1」。試比較由（1）和（2）的答案所推得的水準組合，與目前的水準組合的SN比和平均。

5　再怎麼說這只是個「舉例」，請不要拘泥在「具體來說，控制因子中的A、B、C是什麼呢？」這樣的細節上。另外，為了使版面更為簡明，在本節的應用例中，不會多加解釋每個控制因子和雜音因子的水準。譬如，拿雜音因子中的「與鬆餅粉混合的牛奶量」來說，水準可以設計成包含「比△△食品預設的量少20[ml]」、「與△△食品預設的量相等」、「比△△食品預設的量多20[ml]」等。讀者可以像這樣自由設計水準，再閱讀後面的內容。

6　再怎麼說這只是個「舉例」，請不要拘泥在「硬度的定義是什麼？」、「硬度的單位是什麼？」這類的細節上。

解答

若將控制因子配置在L_{12}直交表的第1欄到第3欄，將雜音因子配置於$L_9(3^4)$直交表的第1欄和第2欄，測試不同條件下的硬度，結果即如下表[7]：

將誤差因子配置在$L_9(3^4)$直交表的第1列和第2列，再逆時針旋轉90度，就會得到此表。

				1	2	3	4	5	6	7	8	9			
			N_2	N_{21}	N_{22}	N_{23}	N_{21}	N_{22}	N_{23}	N_{21}	N_{22}	N_{23}			
			N_1	N_{11}	N_{11}	N_{11}	N_{12}	N_{12}	N_{12}	N_{13}	N_{13}	N_{13}			
	A	B	C										平均 $\bar{y}$	不偏變異數 s	SN比 γ
1	A_1	B_1	C_1	38	56	21	47	28	24	59	69	52	43.78	285.94	8.19
2	A_1	B_1	C_1	35	63	52	18	53	69	16	50	16	41.33	428.50	5.88
3	A_1	B_1	C_2	33	72	26	76	40	55	44	43	53	49.11	279.61	9.30
4	A_1	B_2	C_1	71	20	89	56	12	62	45	71	12	48.67	797.50	4.56
5	A_1	B_2	C_2	44	87	50	42	29	30	28	66	55	47.89	379.36	7.73
6	A_1	B_2	C_2	83	23	25	47	40	78	26	74	37	48.11	578.11	5.90
7	A_2	B_1	C_2	31	32	58	87	28	87	70	47	54	54.89	522.61	7.52
8	A_2	B_1	C_2	80	79	80	18	65	57	14	55	64	56.89	628.61	7.02
9	A_2	B_1	C_1	63	28	33	26	52	37	37	60	50	42.89	188.11	9.85
10	A_2	B_2	C_2	47	21	57	73	28	33	75	16	36	42.89	465.36	5.85
11	A_2	B_2	C_1	24	12	34	85	22	21	25	72	60	39.44	679.03	3.38
12	A_2	B_2	C_1	14	22	31	57	16	54	50	82	19	38.33	552.75	4.06

「A_2、B_2、C_1、N_{11}與N_{22}」條件下的資料為22。

$$\frac{47+21+\cdots+36}{9}=42.89$$

$$\frac{1}{9-1}\times\left\{(24-39.44)^2+(12-39.44)^2+\cdots+(60-39.44)^2\right\}=679.03$$

$$10\log_{10}\left(\frac{38.33^2}{552.75}-\frac{1}{9}\right)=4.06$$

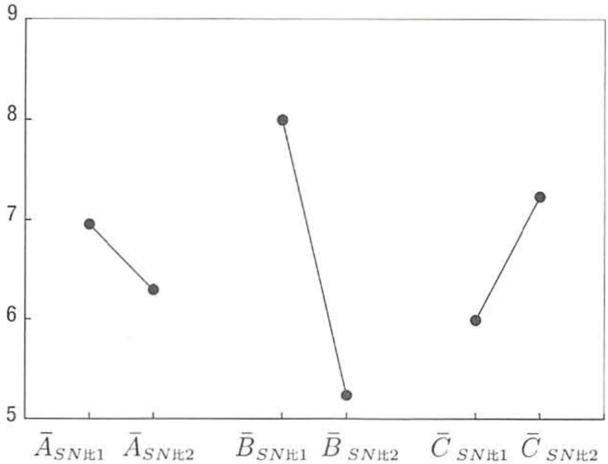
7　參數設計中，控制因子和雜音因子需配置於不同的直交表。控制因子較傾向配置於L_{12}、L_{18}、L_{36}的直交表，而雜音因子不管配置在哪個直交表都沒有關係。雖然在這裡不會詳細解說原因，但其實雜音因子並不一定要使用到直交表。

（1）

下表為將控制因子A、控制因子B、控制因子C視為原因，將SN比γ視為結果，所得到的變異數分析表[8]。

	自由度f	離差平方和S	平均平方V	變異數比F_0	P值
A	1	1.26	1.26	0.58	0.47
B	1	22.10	22.10	10.21	0.01
C	1	4.56	4.56	2.10	0.18
e	8	17.32	2.16		
T	11	45.23			

下圖顯示各水準所得到的平均值：



由上圖以及變異數分析表可以得知，能對SN比γ造成最大影響的控制因子為B，其中B的最佳水準為B_1。[9]雖然控制因子C讓人有些在意，而無法完全忽略，不過在稍後說明（2）的段落中，可以看到C對平均$\bar{y}$的影響比對SN比γ的影響還要大，因此在這裡不加以討論。

8　這個變異數分析表的求得方法，與一因子變異數分析以及二因子變異數分析的情形類似。不過與一因子變異數分析和二因子變異數分析不同的是，在參數設計的變異數分析表中，我們並不會特別去關注變異數比F_0或P值的「絕對大小」。

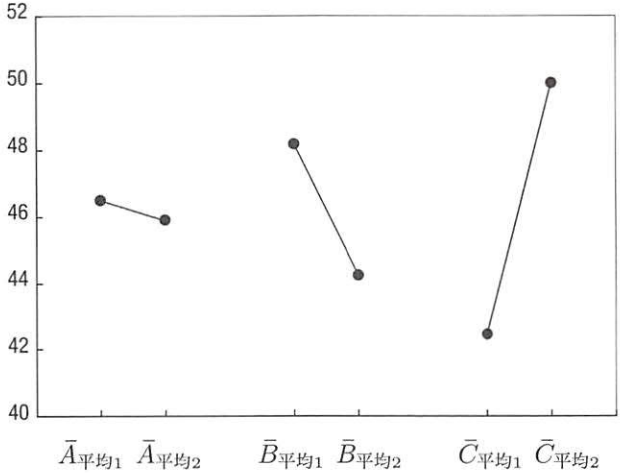
9　如同第139頁所述，在一般的情況下，我們會希望SN比越大越好，因此SN比最大的水準，就是該因子的最佳水準。

(2)

將控制因子A、控制因子B、控制因子C視為原因，將平均 $\bar{y}$ 視為結果，所得到的變異數分析表，即如下表所示：

	自由度f	離差平方和S	平均平方V	變異數比 F_0	P值
A	1	1.05	1.05	0.06	0.82
B	1	46.24	46.24	2.45	0.16
C	1	171.26	171.26	9.06	0.02
e	8	151.26	18.91		
T	11	369.81			

下圖顯示各水準下所得到的平均值：



由上圖可以得知，能對平均值 $\bar{y}$ 造成最大影響的控制因子為C。[10]

10 能夠使鬆餅硬度的平均值 $\bar{y}$ 最接近「讓人覺得最鬆軟的鬆餅硬度（50）」的水準，即為控制因子C的最佳水準。

（3）

如同（1）所說的，能對SN比γ造成最大影響的控制因子為B，其中B的最佳水準為B_1；如同（2）所說的，能對平均值 $\bar{y}$ 造成最大影響的控制因子為C；另外，由第146頁可以得到：

$$\begin{cases} \bar{\gamma} = \dfrac{8.19 + 5.88 + \cdots + 4.06}{12} = 6.61 \\ \bar{\bar{y}} = \dfrac{43.78 + 41.33 + \cdots + 38.33}{12} = 46.19 \end{cases}$$

由以上的資料，可以進一步計算以下三種情形的SN比γ以及平均值 $\bar{y}$：

- 目前製作鬆餅粉時所使用的各個水準「A_1、B_2與C_1」的情形
- 由（1）和（2）的結論所得到的兩種水準組合之一「A_1、B_1與C_1」的情形
- 由（1）和（2）的結論所得到的兩種水準組合之一「A_1、B_1與C_2」的情形

計算結果如下表。

SN比γ

A_1、B_2與C_1	$\bar{\gamma} + \left(\bar{A}_{SN比1} - \bar{\gamma}\right) + \left(\bar{B}_{SN比2} - \bar{\gamma}\right) + \left(\bar{C}_{SN比1} - \bar{\gamma}\right)$ $= 6.61 + (6.93 - 6.61) + (5.25 - 6.61) + (5.99 - 6.61)$ $= 4.96$
A_1、B_1與C_1	$\bar{\gamma} + \left(\bar{A}_{SN比1} - \bar{\gamma}\right) + \left(\bar{B}_{SN比1} - \bar{\gamma}\right) + \left(\bar{C}_{SN比1} - \bar{\gamma}\right)$ $= 6.61 + (6.93 - 6.61) + (7.96 - 6.61) + (5.99 - 6.61)$ $= 7.67$
A_1、B_1與C_2	$\bar{\gamma} + \left(\bar{A}_{SN比1} - \bar{\gamma}\right) + \left(\bar{B}_{SN比1} - \bar{\gamma}\right) + \left(\bar{C}_{SN比2} - \bar{\gamma}\right)$ $= 6.61 + (6.93 - 6.61) + (7.96 - 6.61) + (7.22 - 6.61)$ $= 8.90$

平均 $\bar{y}$

A_1、B_2 與 C_1	$\bar{\bar{y}}+\left(\bar{A}_{平均1}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(\bar{B}_{平均2}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(\bar{C}_{平均1}-\bar{\bar{y}}\right)$ $=46.19+(46.48-46.19)+(44.22-46.19)+(42.41-46.19)$ $=40.74$
A_1、B_1 與 C_1	$\bar{\bar{y}}+\left(\bar{A}_{平均1}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(\bar{B}_{平均1}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(\bar{C}_{平均1}-\bar{\bar{y}}\right)$ $=46.19+(46.48-46.19)+(48.15-46.19)+(42.41-46.19)$ $=44.67$
A_1、B_1 與 C_2	$\bar{\bar{y}}+\left(\bar{A}_{平均1}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(\bar{B}_{平均1}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(\bar{C}_{平均2}-\bar{\bar{y}}\right)$ $=46.19+(46.48-46.19)+(48.15-46.19)+(49.96-46.19)$ $=52.22$

「A_1、B_1與C_2」不僅是能使SN比γ最大的組合，也是能使平均值 $\bar{y}$ 最接近50的組合，因此「A_1、B_1與C_2」的條件即為最佳水準的組合。另外，

$$\begin{aligned}&\bar{\bar{y}}+\left(\bar{A}_{平均1}-\bar{\bar{y}}\right)+\left(\bar{B}_{平均1}-\bar{\bar{y}}\right)+\left\{\left(\bar{C}_{平均1}-\bar{\bar{y}}\right)+(x-1)\left(\bar{C}_{平均2}-\bar{C}_{平均1}\right)\right\}\\=\;&46.19+(46.48-46.19)+(48.15-46.19)+\{(42.41-46.19)+(x-1)(49.96-42.41)\}=50\end{aligned}$$

的解為$x=1.71$。也就是說，當控制因子C的水準為$C_{1.71}$的時候，平均值 $\bar{y}$ 將與「讓人覺得最鬆軟的鬆餅硬度（50）」一致[11]。

11 當然，必須在控制因子C為屬量資料而非屬質資料的前提下，這個算式才有意義。

附錄

附錄 1　迴歸分析與複迴歸分析

附錄 2　多重比較

附錄 3　用 Excel 來試試看吧！

附錄1 迴歸分析與複迴歸分析

1. 一因子變異數分析與迴歸分析

若我們將「第4章　一因子變異數分析」的應用例所列舉的資料，令$\begin{cases} A_1 = 100 \\ A_2 = 200 \\ A_3 = 300 \end{cases}$，可以得到下表：

	成型溫度 A	耐壓溫度 y
實驗1	100	8
實驗2	100	10
實驗3	100	6
實驗4	100	9
實驗5	200	9
實驗6	200	5
實驗7	200	5
實驗8	200	6
實驗9	300	13
實驗10	300	14
實驗11	300	10
實驗12	300	10

如果我們進行一因子變異數分析，就可以得知成型溫度是否會顯著影響耐壓強度，且藉由該章的「結果分析」，可得知成型溫度的最佳水準。然而，我們並無法得知某個成型溫度，譬如說170度時的耐壓強度應該是多少。是的，在一因子變異數分析中，我們並沒有辦法預測y的數值。

這時就是該讓「迴歸分析」登場的時機。若進行迴歸分析，可得到以下方程式：

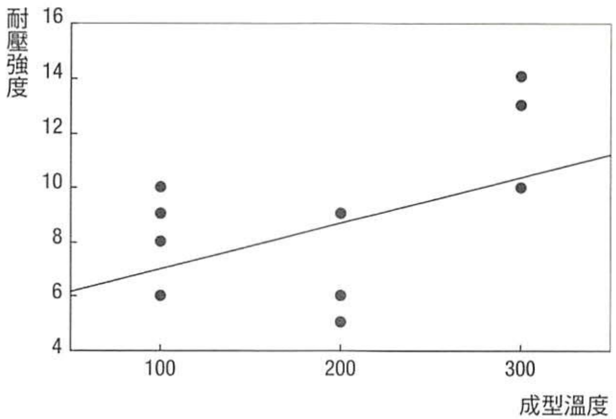
$$y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{耐壓強度}}}{y}$$

$$y = 0.0175x_1 + 5.25$$

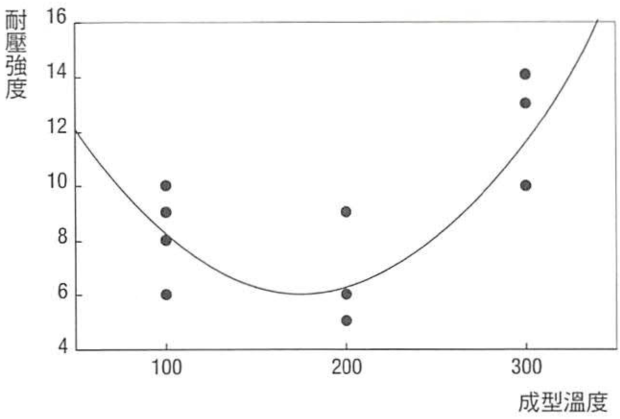
耐壓強度　　成型溫度

不管x_1帶入什麼樣的數值，我們都能夠預測出與之對應的y值。

我們可以進一步將方程式以圖形表示，如下：



由上圖可以知道，在這個應用例中，所求得的直線不太合乎我們的實驗數據。除了直線以外，我們也可以試著求出適當的2次曲線，如次頁的圖。我們可以看出用2次曲線似乎比較符合我們預測y值。



$$y = 0.000375x_1^2 - 0.1325x_1 + 17.75$$

耐壓強度　　成型溫度　　成型溫度

2. 二因子變異數分析與複迴歸分析

若我們將「第5章 二因子變異數分析」的應用例所列舉的資料，令$\begin{cases} A_1 = 100 \\ A_2 = 200 \\ A_3 = 300 \end{cases}$，可以得到下表：

	成型溫度 A	原料製造商 B	耐壓強度 y
實驗1	100	1	9.0
實驗2	100	0	7.5
實驗3	200	1	7.0
實驗4	200	0	5.5
實驗5	300	1	13.5
實驗6	300	0	10.0

「1」代表B_1、「2」代表B_2

如果我們進行「複迴歸分析」，可得到以下方程式：

$$y = 0.0175x_1 + 2.1667x_2 + 4.1667$$

耐壓強度　成型溫度　原料製造商

不管x_1與x_2代入什麼樣的數值，我們都能夠預測出與之對應的y值。

其中，複迴歸分析與迴歸分析的差別，在於因子的個數為複數或是只有一個[1]。

想要進一步了解迴歸分析與複迴歸分析的讀者，可以參考《世界第一簡單統計學【迴歸分析篇】》（世茂出版）一書。

1　說得較為嚴謹一點，兩者的差別在於作為變數的xi是複數或是只有一個。

附錄2 多重比較

1. 多重比較

如同第46頁所述，在假說檢定中，就算檢定統計量之值在拒絕域內，我們也不能斷定「對立假說『絕對』正確」。最多我們只能說：「雖然很想說對立假說『絕對』是正確的……但不幸的是，正確的可能並不是對立假說，而是虛無假說，而虛無假說正確的機率最高為（$\alpha \times 100$）%」。換句話說，在假說檢定中，使用的分析手法如下：

- 若虛無假說所描述的情形是事實，那麼最大有（$\alpha \times 100$）%的機率會得到「對立假說正確」之結論。
- 若虛無假說所描述的情形是事實，那麼最小有（（$1-\alpha$）$\times 100$）%的機率會得到「虛無假說不能說是錯的」之結論。

繼續閱讀以下的內容以前，請先了解上述概念。

如下表所示，我們以A_1、A_2、A_3、A_4等四個母體為對象，進行四個不同的假說檢定[2]。表中的θ_i不管是代表平均值或標準差都無所謂，總之請把它當作「某個能夠描述母體特徵的參數」。

	檢定1	檢定2	檢定3	檢定4
虛無假說	$\theta_1 = \theta_2$	$\theta_1 = \theta_4$	$\theta_2 = \theta_3$	$\theta_3 = \theta_4$
對立假說	$\theta_1 \neq \theta_2$	$\theta_1 \neq \theta_4$	$\theta_2 \neq \theta_3$	$\theta_3 \neq \theta_4$
顯著水準	α_1	α_2	α_3	α_4

如果四個虛無假說所描述的情形都是事實的話，那麼理所當然地，以下的關係將會成立：

（結論為「對立假說中至少有1個正確」之機率）

＋（結論為「不管哪一個虛無假說都不能說是錯的」的機率）＝1

2　為何是這四個，而不是別的假說檢定呢？這和本章的主題無關，請不要拘泥在這個問題上。

也就是說，以下的關係會成立：

（結論為「對立假說中至少有1個正確」之機率）

＝1－（結論為「不管哪一個虛無假說都不能說是錯的」的機率）

如果我們希望能控制個別檢定的α_j，使以下的關係能夠成立：

1－（結論為「不管哪一個虛無假說都不能說是錯的」的機率）≦ α

或者說，若我們設定「整體情形」之顯著水準α為某定值，例如0.05或0.1，那麼控制「個別情形」之顯著水準α_j的方法，就稱作「多重比較」。

2. 多重比較的種類

多重比較為數種分析方法的總稱，並非特定指某種分析方法。「Bonferroni法」為其中一種較常被使用的「多重比較分析法」。拿上一節的例子來說：

	檢定1	檢定2	檢定3	檢定4
虛無假說	$\theta_1 = \theta_2$	$\theta_1 = \theta_4$	$\theta_2 = \theta_3$	$\theta_3 = \theta_4$
對立假說	$\theta_1 \neq \theta_2$	$\theta_1 \neq \theta_4$	$\theta_2 \neq \theta_3$	$\theta_3 \neq \theta_4$
顯著水準	α_1	α_2	α_3	α_4

由Bonferroni法的關係式：

1－（結論為「m個虛無假說中，不管哪一個都不能說是錯的」的機率）≦ $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$

我們可以得到：

1－（結論為「4個虛無假說中，不管哪一個都不能說是錯的」的機率）$\leq \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = \frac{\alpha}{4}+\frac{\alpha}{4}+\frac{\alpha}{4}+\frac{\alpha}{4} = \alpha$

換句話說，利用Bonferroni法，我們可以得到：

$$\alpha_j = \frac{\alpha}{\text{欲進行的假說檢定數目}}$$

此外，還有許多多重比較法是由Bonferroni法發展出來的，如「Holm檢定」等。

除了Bonferroni法之外，我們也可以用「Tukey's檢定」、「Dunnett檢定」、「Williams檢定」來進行多重比較分析。與Bonferroni法不同的是，這些分析方法須假設每個母體的標準差服從同一個常態分配，並各自獨立。這三種方法只能用來比較數個母體的平均值，它們各自的特徵如下表：

	Tukey's檢定	Dunnett檢定	Williams檢定
概要	將每個母體的平均值兩兩比較的方法。	以某個母體的平均值為基準，與其他母體的平均值一一比較的方法。	確認不同母體的平均值間，是否有增加或減少趨勢的方法。
虛無假說	$\begin{cases}\mu_1=\mu_2\\ \mu_1=\mu_3\\ \mu_1=\mu_4\\ \mu_2=\mu_3\\ \mu_2=\mu_4\\ \mu_3=\mu_4\end{cases}$	$\begin{cases}\mu_1=\mu_2\\ \mu_1=\mu_3\\ \mu_1=\mu_4\end{cases}$	$\begin{cases}\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4\\ \mu_1=\mu_2=\mu_3\\ \mu_1=\mu_2\end{cases}$
對立假說	$\begin{cases}\mu_1\neq\mu_2\\ \mu_1\neq\mu_3\\ \mu_1\neq\mu_4\\ \mu_2\neq\mu_3\\ \mu_2\neq\mu_4\\ \mu_3\neq\mu_4\end{cases}$	$\begin{cases}\mu_1\neq\mu_2\\ \mu_1\neq\mu_3\\ \mu_1\neq\mu_4\end{cases}$ 或者是 $\begin{cases}\mu_1<\mu_2\\ \mu_1<\mu_3\\ \mu_1<\mu_4\end{cases}$ 或者是 $\begin{cases}\mu_1>\mu_2\\ \mu_1>\mu_3\\ \mu_1>\mu_4\end{cases}$	$\begin{cases}\mu_1\leq\mu_2\leq\mu_3\leq\mu_4\\ \mu_1\leq\mu_2\leq\mu_3\\ \mu_1\leq\mu_2\end{cases}$ （至少其中一個≦為＜） 或者是 $\begin{cases}\mu_1\geq\mu_2\geq\mu_3\geq\mu_4\\ \mu_1\geq\mu_2\geq\mu_3\\ \mu_1\geq\mu_2\end{cases}$ （至少其中一個≧為＞）

也許有的讀者會覺得，本書正文中所解說的一因子變異數分析與二因子變異數分析，與本章解說的多重比較法看起來好像有點相似，但要說哪裡不一樣也說不太出來。事實上，這兩種方法的用途是完全不同的。一因子變異數分析與二因子變異數分析的目的，是在檢驗一開始所設定的因子，是否就是造成結果差異的原因；而多重比較的目的，是從許多平均值不完全相同的母體中，確認到底是哪個母體與哪個母體的平均值不同。

附錄 3 用Excel來試試看吧！

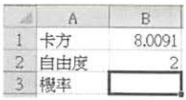
由於Excel版本的不同，以下所列出的操作步驟可能會有所差異，請務必了解這一點。日文原書的解說所使用的Excel版本為日文版Excel 2007，作業系統為Windows Vista Home Edition[譯註1]。

1. 卡方分配的機率

對應 第50頁的資料

STEP1

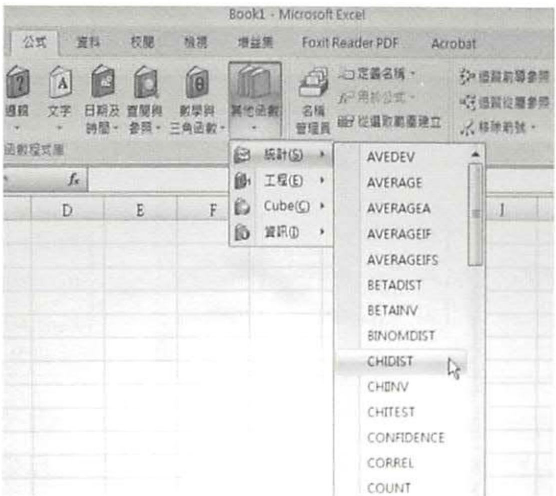
選擇「B3」儲存格



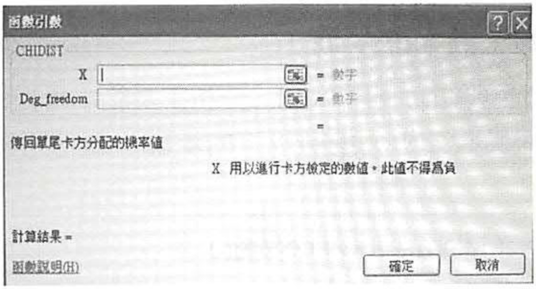
	A	B
1	卡方	8.0091
2	自由度	2
3	機率	

STEP2

選擇工具列中的「公式」頁籤，點選「其他函數」，選擇「統計」，再選擇「CHIDIST」。

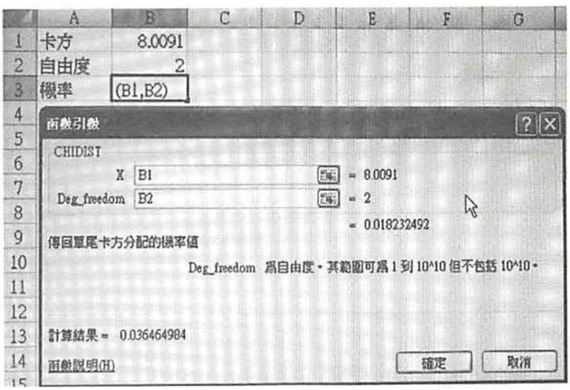


譯註1 本書繁體中文版在此列出的圖像，Excel版本為中文版Excel 2007，作業系統為Windows XP。



STEP3

選擇「B1」儲存格以及「B2」儲存格，再按下「確定」按鈕。



STEP4

計算完成！

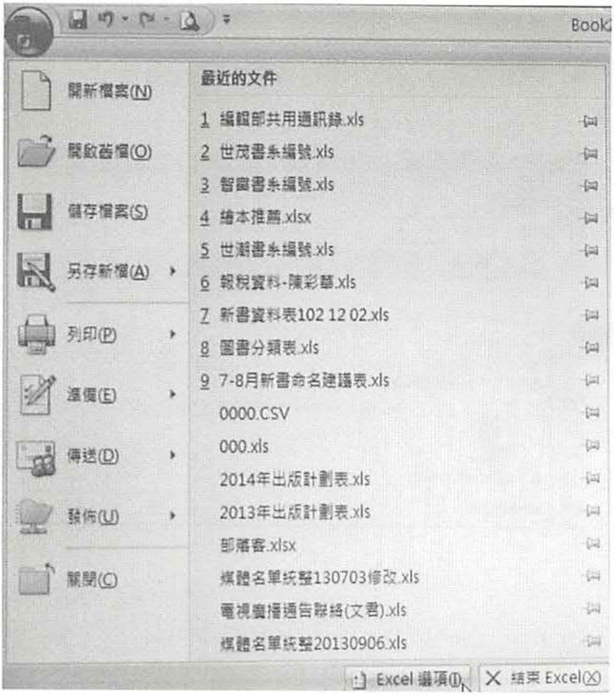
同樣的，t分配的機率可以利用「TDIST」函數求得；而F分配的機率可以利用「FDIST」函數求得。

2. 一因子變異數分析

對應
第63頁的資料

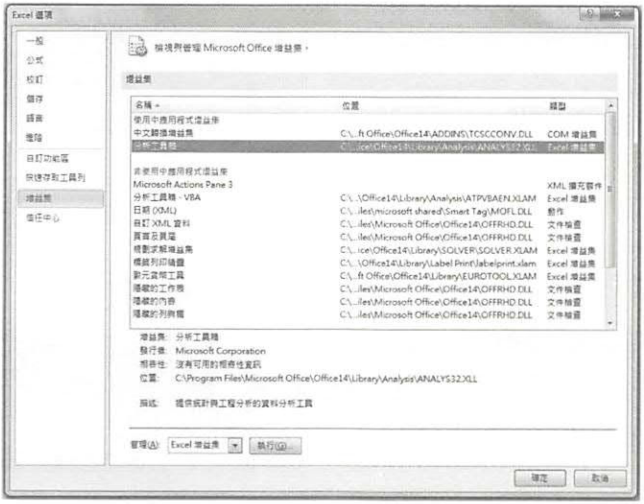
以下將解說要如何利用Excel「分析工具箱」所提供的功能，來進行一因子變異數分析。按照以下的步驟，即可開啟「分析工具箱」的功能。

①按下 （Microsoft Office按鈕）。
②選擇「選項」。



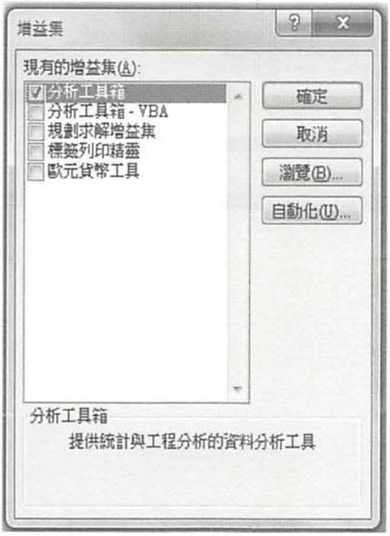
③開啟Excel選項視窗，選擇左欄的「增益集」。

選擇「增益集」中的「分析工具箱」，按下執行。



④將「分析工具箱」選項打勾，再按下「確定」按鈕。

如果出現「目前的電腦沒有安裝這項功能」的訊息，請按下「確定」按鈕以進行安裝。



④讀取完分析工具箱的資料後，我們可以在「資料」頁籤的「分析」中，找到「資料分析」的功能。

STEP1

選擇「資料」頁籤，「分析」中的「資料分析」。

STEP2

選擇「單因子變異數分析」，按下「確定」按鈕。

STEP3

照下圖的方式設定，按下「確定」按鈕。

與本書第4章的內容不同，如果想利用「分析工具箱」的單因子變異數分析功能，必須要按照這樣的方式排列資料。

之後在關於二因子變異數分析的解說中，也要注意資料的排列方式。

STEP4

分析完成！

	A	B	C	D	E	F	G
1	單因子變異數分析						
2							
3	摘要						
4	組	個數	總和	平均	變異數		
5	A1	4	33	8.25	2.916667		
6	A2	4	25	6.25	3.583333		
7	A3	4	47	11.75	4.25		
8							
9							
10	ANOVA						
11	變源	SS	自由度	MS	F	P-值	臨界值
12	組間	62	2	31	8.651163	0.008019	4.256495
13	組內	32.25	9	3.583333			
14							
15	總和	94.25	11				

3. 非重複實驗的二因子變異數分析

對應 第76頁的資料

STEP1

選擇「資料」頁籤，「分析」中的「資料分析」。

STEP2

選擇「雙因子變異數分析：無重複試驗」，按下「確定」按鈕。

STEP3

照下圖的方式設定，按下「確定」按鈕。

STEP4

分析完成！

	A	B	C	D	E	F	G
1	雙因子變異數分析：無重複試驗						
2							
3	摘要	個數	總和	平均	變異數		
4	B1	3	29.5	9.833333	11.08333		
5	B2	3	23	7.666667	5.083333		
6							
7	A1	2	16.5	8.25	1.125		
8	A2	2	12.5	6.25	1.125		
9	A3	2	23.5	11.75	6.125		
10							
11							
12	ANOVA						
13	變源	SS	自由度	MS	F	P-值	臨界值
14	列	7.041667	1	7.041667	10.5625	0.083051	18.51282
15	欄	31	2	15.5	23.25	0.041237	19
16	錯誤	1.333333	2	0.666667			
17							
18	總和	39.375	5				

4. 重複實驗的二因子變異數分析

對應 第84頁的資料

STEP1

選擇「資料」頁籤，「分析」中的「資料分析」。

STEP2

選擇「雙因子變異數分析：重複試驗」，按下「確定」按鈕。

STEP3

照下圖的方式設定，按下「確定」按鈕。

STEP4

分析結束！

	A	B	C	D	E	F	G
1	雙因子變異數分析：重複試驗						
2							
3	摘要	A1	A2	A3	總和		
4	B1						
5	個數	2	2	2	6		
6	總和	18	14	27	59		
7	平均	9	7	13.5	9.833333		
8	變異數	2	8	0.5	10.96667		
9							
10	B2						
11	個數	2	2	2	6		
12	總和	15	11	20	46		
13	平均	7.5	5.5	10	7.666667		
14	變異數	4.5	0.5	0	5.066667		
15							
16	總和						
17	個數	4	4	4			
18	總和	33	25	47			
19	平均	8.25	6.25	11.75			
20	變異數	2.916667	3.583333	4.25			
21							
22							
23	ANOVA						
24	變源	SS	自由度	MS	F	P-值	臨界值
25	樣本	14.08333	1	14.08333	5.451613	0.058251	5.987378
26	欄	62	2	31	12	0.008	5.143253
27	交互作用	2.666667	2	1.333333	0.516129	0.621111	5.143253
28	組內	15.5	6	2.583333			
29							
30	總和	94.25	11				

索　引

數字

羅馬字、英文

1劃

2劃

4劃

5劃

6劃

7 劃

8 劃

9 劃

10 劃

11 劃

12 劃

13 劃

14 劃

15 劃

16 劃

17 劃

18 劃

19 劃

21 劃

23 劃

國家圖書館出版品預行編目資料

世界第一簡單實驗設計 / 高橋信作；陳朕疆譯. -- 初版. -- 新北市：世茂, 2014.04
面； 公分. --（科學視界；169）

ISBN 978-986-5779-24-5（平裝）

1. 實驗計劃法 2. 統計方法 3. 統計推論

511.2 103000880

科學視界 169

世界第一簡單實驗設計

作　　者／高橋 信
審　　訂／洪萬生
譯　　者／陳朕疆
主　　編／陳文君
責任編輯／石文穎
出 版 者／世茂出版有限公司
負 責 人／簡泰雄
地　　址／(231)新北市新店區民生路19號5樓
電　　話／(02)2218-3277
傳　　真／(02)2218-3239（訂書專線）、(02)2218-7539
劃撥帳號／19911841
戶　　名／世茂出版有限公司
單次郵購總金額未滿500元（含），請加50元掛號費
世茂網址／www.coolbooks.com.tw
排版製版／辰皓國際出版製作有限公司
印　　刷／世和印刷事業有限公司
初版一刷／2014年4月
二刷／2017年4月

ＩＳＢＮ／978-986-5779-24-5
定　　價／280元

Original Japanese edition
Yasashii Jikken Keikakuhou
By Shin Takahashi

Published by Ohmsha, Ltd.
This Traditional Chinese Language edition co-published by Ohmsha, Ltd. and ShyMau Publishing Company

黏貼處

請沿虛線剪下裝訂寄回，謝謝！

讀者回函卡

感謝您購買本書，為了提供您更好的服務，歡迎填妥以下資料並寄回，
我們將定期寄給您最新書訊、優惠通知及活動消息。當然您也可以E-mail：
Service@coolbooks.com.tw，提供我們寶貴的建議。

您的資料（請以正楷填寫清楚）

購買書名：________________________

姓名：____________ 生日：______ 年 ____ 月 ____ 日

性別：☐男 ☐女　E-mail：________________

住址：☐☐☐______縣市________鄉鎮市區________路街
______段______巷______弄______號______樓

聯絡電話：________________

職業：☐傳播 ☐資訊 ☐商 ☐工 ☐軍公教 ☐學生 ☐其他：______

學歷：☐碩士以上 ☐大學 ☐專科 ☐高中 ☐國中以下

購買地點：☐書店 ☐網路書店 ☐便利商店 ☐量販店 ☐其他：______

購買此書原因：___ ___ ___ ___ ___ ___（請按優先順序填寫）
1封面設計 2價格 3內容 4親友介紹 5廣告宣傳 6其他：______

本書評價：____ 封面設計 1非常滿意 2滿意 3普通 4應改進
____ 內　容 1非常滿意 2滿意 3普通 4應改進
____ 編　輯 1非常滿意 2滿意 3普通 4應改進
____ 校　對 1非常滿意 2滿意 3普通 4應改進
____ 定　價 1非常滿意 2滿意 3普通 4應改進

給我們的建議：- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

- -

- -

黏貼處

電話：(02) 22183277
傳真：(02) 22187539

231新北市新店區民生路19號5樓

世茂
世潮 出版有限公司 收
智富

發現問題之後，會形成假設，此時必須設計實驗加以證明。實驗設計可以改善製造程序，設計及開發新製程與產品，比較不同因子對實驗結果的影響，使結果分析更有效率，可以幫助達成目標。

本書以詳細的計算過程，為讀者解說如何分析資料，設計參數，即使實驗設計的初學者，或不擅長統計學的讀者，都可以跟著作者的步伐，循序漸進地學習實驗設計。

破解難懂的參數設計，創造理想的實驗步驟，本書是實驗設計的入門首選！

建議分類：統計、實驗設計

ISBN 978-986-5779-24-5

9 789865 779245

NT$280　00933370

Ohmsha

世茂 出版集團

精彩好書推薦

世界第一簡單虛數・複數

相知 政司◎著　定價◎280
國立師範大學前數學系教授兼主任
洪萬生◎審訂

為什麼竟有數字平方為負數？加入複數i之後，數學變得好複雜！日本千葉大學工學院教授，發現學生無法掌握虛數和複數，特地與漫畫家合作寫成這本《世界第一簡單虛數・複數》，將所有理工科學生的煩惱，一次解決！

世界第一簡單線性代數

高橋信◎著　定價◎320
國立師範大學前數學系教授兼主任
洪萬生◎推薦

還在煩惱聽不懂線性代數嗎？基礎練習比什麼都重要，計算困難這一點全是誤解！用「這道菜是炸豬排」談必要條件與充分條件；透過北海道、東京都，地名談集合；咖哩飯、烏龍麵，菜單談映射；依「問題→思考→解答」來解釋組合與排列；以高爾夫推桿解釋矩陣……盡在本書！

世界第一簡單統計學【因素分析篇】

高橋信◎著　定價◎280
國立師範大學前數學系教授兼主任
洪萬生◎審訂

曾被統計搞得欲哭無淚的人有福了！ 降雨機率、失業率、投資報酬率、離婚率……生活中統計無所不在，高普考、商學院研究所考試也需要準備統計，研究生撰寫論文、上班族整理業務報告、行銷人員進行市場調查更用得上統計，本書以漫畫→圖解→解說，幫助你輕鬆了解主成分分析與因素分析的概念與實際用途。

世界第一簡單統計學【迴歸分析篇】

高橋信◎著　定價◎280
國立師範大學前數學系教授兼主任
洪萬生◎審訂

學會迴歸分析能了解數字的語言，接收數字的暗示。本書讓你靠迴歸分析，從「最高氣溫」預測「冰紅茶的銷售量」；進行複迴歸分析，從「和同業競爭對手的距離」、「半徑500公尺內的住宅數目」和「宣傳費用」，預測「業績」；學會Logistic迴歸分析，利用Excel計算，從「吸菸量」和「飲酒量」求出「罹患癌症的機率」！

作者簡介

高橋信（たかはし　しん）

一九七二年生於日本新潟。九州藝術工科大學（現為九州大學）大學院藝術公學研究科資訊傳達系畢業，之後從事數據分析和研習講師的工作，現在以寫作為業。

著有《世界第一簡單統計學》、《世界第一簡單線性代數》、《世界第一簡單統計學【迴歸分析篇】》（以上世茂）、《靠EXCEL學對應分析》(Ohmsha公司)、《社會組也看得懂的多變量分析》（合著，東京圖書）、《AHP和聯合分析》（合著，現代數學社）。

譯者簡介

陳朕疆

自由譯者。清華大學生命科學系畢業，曾在京都大學農學部交換留學一年，畢業後在中研院生醫所做過研究助理，現在則想再念一個財金學位而自修相關知識。在日本時有感於日本出版業的蓬勃，希望能夠把好書介紹給更多人認識，而有了成為譯者的想法，歡迎批評指教。

Facebook:

https://www.facebook.com/Chen.Zhenjiang

審訂者簡介

洪萬生

紐約城市大學（CUNY）科學史博士，國立台灣師範大學數學系學士、碩士。國立台灣師範大學數學系教授兼主任（2007/8/1-2009/7/31）、台灣數學教育學會理事長（2007-2009）、國際科學史學院通訊會員、Historia Mathematica（國際數學史雜誌）編輯委員、《HPM通訊》發行人、台灣數學（虛擬）博物館創始人之一。

通俗的生活的
科學視界
169

世界第一簡單實驗設計

國立師範大學前數學系教授兼主任
高橋 信◎著
洪萬生◎審訂
陳朕疆◎翻譯

世茂