MOUVEMENT DE ROTATION

1. Définition :

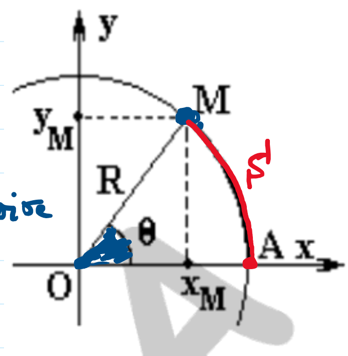
Un mouvement de rotation est tout mouvement qu'effectue un corps autours d'un axe fixe (Δ) selon une trajectoire circulaire de rayon R autour de cet axe.

2. Repérage d'un point du mobile :

Abcisse angulaire θ (rad)

" curviligne s en mètre.

d'où $\boxed{s = R.\theta}$ R: rayon de trajectoire



La vitesse angulaire

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad (rad/s)$$

* La vitesse linéaire $V = R.\dot{\theta}$ (m/s) ou $\dot{\theta} = \frac{V}{R}$

L'accélération angulaire

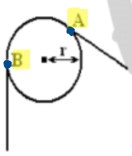
notée par $\ddot{\theta}$ d'où $\ddot{\theta} = \frac{a_c}{R}$ $(rad.s^{-2})$

a_c : L'accélération linéaire $(m.s^{-2})$

3. Les équations mouvements circulaires

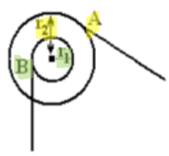
	Mouvement circulaire uniforme	Mouvement circulaire uniformément varié
Accélération angulaire $(rad.s^{-2})$	Nulle $\ddot{\theta} = 0$	Constante $\ddot{\theta} = C^{te} \neq 0$
Vitesse angulaire $(rad.s^{-1})$	Constante $\dot{\theta} = C^{te} \neq 0$	Varie en fonction du temps $\dot{\theta} = \ddot{\theta}.t + \dot{\theta}_0$ Une fonction affine de temps d'où $\ddot{\theta} = \frac{\Delta\dot{\theta}}{\Delta t}$
Abscisse angulaire (rad)	$\theta = \dot{\theta}.t + \theta_0$ Une fonction affine de temps d'où $\dot{\theta} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$	$\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}.t^2 + \dot{\theta}_0.t + \theta_0$

Exemples



Les points A et B :

- Parcours les même distances S, $S_1=S_2$
- Avec la même vitesse, $V_1=V_2$
- Et la même accélération, $a_1=a_2$



Les points A et B :

- Parcours des distances différentes $S_1=r_1.\theta$ et $S_2=r_2.\theta$ d'où $\frac{S_2}{S_1} = \frac{r_2}{r_1}$
- avec des vitesses différentes $V_1 = r_1.\dot{\theta}$ et $V_2 = r_2.\dot{\theta}$ d'où $\frac{V_2}{V_1} = \frac{r_2}{r_1}$
- Et des accélérations différentes $a_1 = r_1.\ddot{\theta}$ et $a_2 = r_2.\ddot{\theta}$ d'où $\frac{a_2}{a_1} = \frac{r_2}{r_1}$

La relation fondamental de la dynamique (RFD)

La relation fondamental de la dynamique (RFD)

$$\sum M_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

Dans un référentiel galiléen, la somme des moments des forces , appliquées à un corps en rotation autour d'un axe fixe (Δ) , est proportionnelle à l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ subie par ce corps

J_Δ : moment d'inertie du mobile par rapport à l'axe de rotation (Δ)

⁎⁎ Comment exploiter la relation fondamentale de la dynamique (RFD)

Pour résoudre un problème de dynamique en utilisant la **RFD**, la méthode est toujours la même :

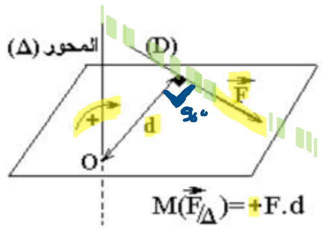
1. Préciser le système à étudier
2. Faire le bilan de toutes les forces qui agissent sur le point matériel étudié (ou le centre d'inertie de l'objet étudié).
   2.1. Forces de contact
   2.2. Forces à distance
3. Faire un schéma précis et suffisamment grand pour pouvoir y représenter (tant que c'est possible) toutes les forces dont les caractéristiques bien connues.
   Exemples : le poids $\vec{P}$ et $\vec{R}$ la réaction de l'axe (Δ)
4. Choisir un sens positif de rotation (Souvent identique au sens de mouvement)
5. Déterminer l'expression du travail de chacune des forces du bilan
6. Appliquer la RFD
7. Répondre !!!

$M_\Delta(\vec{F}) = +F.r$

7. Moment d'une force par rapport à un axe fixe (Δ)

$$M(\vec{F}_{/\Delta}) = \pm F.d$$

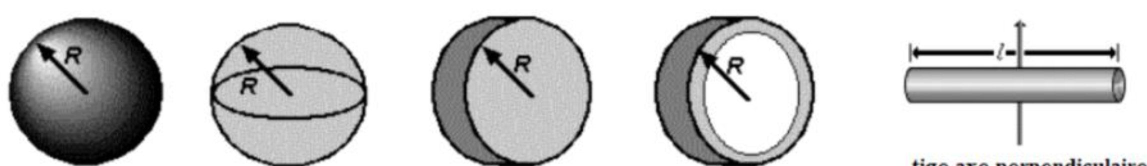
- Préciser l'axe (Δ)
- Choisir un sens positif (Souvent dans le sens de mouvement)
- Prolonger (D) la direction (Droite d'action) de la force $\vec{F}$
- Tracer la perpendiculaire à (D) la direction de la force $\vec{F}$ et passant par l'axe (Δ)
- Déterminer la distance d entre l'axe (Δ) et (D) la direction de la force $\vec{F}$



8. J_Δ : moment d'inertie du mobile par rapport à l'axe de rotation (Δ)

$J_\Delta = \sum m_i.r_i^2$:

- Moment d'inertie du mobile par rapport à l'axe de rotation (Δ)
- S'exprime en $Kg.m^2$
- Exprime la répartition de la matière autour de l'axe (Δ)
- Varie si :
  - On ajoute des masses au système
  - On modifie la position d'au corps du système (modifier la distance r_i)
  - La position de l'axe (Δ) change



sphère pleine — sphère creuse — cylindre plein — anneau mince — tige axe perpendiculaire passant par G

$J= \frac{2}{5} m \cdot R^2$	$J= \frac{2}{3} m \cdot R^2$	$J= \frac{1}{2} m \cdot R^2$	$J= m \cdot R^2$ anneau épais $=\frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$	$J= \frac{1}{12} m \cdot l^2$

1ere loi de Newton

Translation

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

Le centre d'inertie du mobile est au repos (mobile au repos)

Rotation

$$\sum M_\Delta(\vec{F}) = 0$$

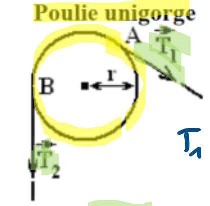
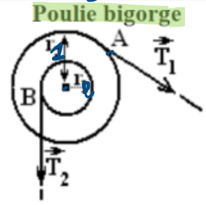
Le mobile est au repos ou en mouvement de rotation

$\sum \vec{F} = \vec{0}$	$\sum M_\Delta(\vec{F}) = 0$
Le centre d'inertie du mobile est au repos (mobile au repos) ou en mouvement rectiligne uniforme	Le mobile est au repos ou en mouvement de rotation uniforme

Cas d'équilibre :

Conditions de l'équilibre

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \sum M_\Delta(\vec{F}) = 0$$

Poulie unigorge	Poulie bigorge
	
$T_1 = T_2$	$T_1.r_1 = T_2.r_2$
Donc on évite d'étudier l'équilibre de la poulie	Obligé d'étudier l'équilibre de la poulie

$T_1 - T_2 = 0$

$T_1 = T_2$

$\sum M(\vec{F}) = 0$

$M_\Delta(\vec{T_1}) + M_\Delta(\vec{T_2}) = 0$

$+T_1 r_1 - T_2 . r_2 = 0$

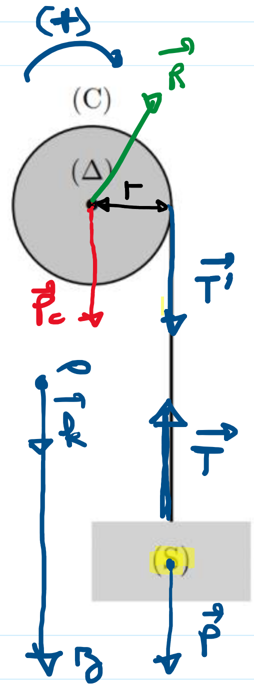
$T_1 r_1 = T_2 . r_2$

&

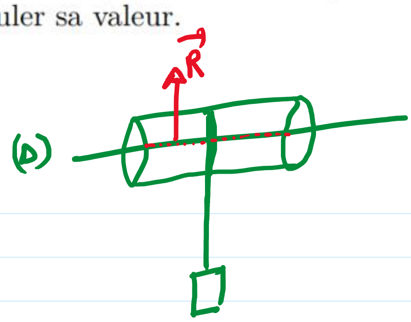
Exercice 1

Considérons une polie P homogène de rayon $r = 10cm$ et de masse $m_p = 0,2kg$ susceptible à tourner autour d'un axe de rotation, horizontal (Δ), et un corps (S) de masse $m = 0,8kg$ relié à la poulie par un fil inextensible de masse négligeable passe par la gorge de la poulie sans glisser au cours du mouvement.
Moment du couple résistant dû au frottement appliqué à l'axe de la poulie : $\mathscr{M}_c = -0,38N.m$.

1. En appliquant la deuxième loi de newton et la relation fondamentale de la dynamique dans le cas de la rotation sur le système (Poulie + S + fil), Déterminer l'accélération du mouvement a_G.calculer sa valeur.



Correction



Étude du mvt du cylindre (C) :

SE : { Le cylindre }

BF : ① $\vec{P_c}$: Poids du cylindre.

② $\vec{R}$: l'action de l'axe (Δ) sur le cylindre

③ $\vec{T'}$: la tension du fil sur le cylindre.

④ M_c : le couple des frottements.

⚠ chaque force se coupe avec l'axe (Δ) son moment est nul

On applique la RFD dans ce cas au cylindre.

$$\underbrace{\cancel{M_\Delta(\vec{P_c})}}_{0} + \underbrace{\cancel{M_\Delta(\vec{R})}}_{0} + M_\Delta(\vec{T'}) + M_c = J_\Delta . \ddot{\theta}$$

(car $\vec{P_c}$ et $\vec{R}$ se coupent avec l'axe (Δ)).

$$+T'.r + M_c = J_\Delta . \ddot{\theta}$$

⚠ chaque force parallèle avec (Δ) son moment est nul.

est nul.

$$+T'.r + M_c = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

$$\boxed{T' = \frac{J_\Delta \ddot{\theta} - M_c}{r}}$$ Avec $J_\Delta = \frac{1}{2} m_p r^2$

Etude du mvt du corps (S').

SE : {le solide (S)}

BF : $\vec{P}$: son poids $\vec{T}$: la tension du fil

Dans un repère lié à la terre supposé galiléen $R(O,\vec{k})$

On applique la 2ème loi de Newton $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_G$$

Projection $P - T = m a_z$ $(a_z = a_G)$

$$P - T = m a_G$$

$$T = P - m a_G$$

$$\boxed{T = mg - m a_G}$$

le fil est inextensible غير قابل للتمدد.

Alors $T' = T$

$$\frac{J_\Delta.\ddot{\theta} - M_c}{r} = mg - m a_G$$

Avec $J_\Delta = \frac{1}{2} m_p . r^2$ et $\ddot{\theta} = \frac{a_G}{r}$

$$\frac{1}{2} m_p . r^{\cancel{2}} . \frac{a_G}{\cancel{r}} - M_c = r(mg - m a_G)$$

$$\frac{1}{2} m_p . r . a_G - M_c = m.rg - m.r.a_G$$

$$\frac{1}{2} m_p \cdot r \cdot a_G - M_c = m.r g - m.r.a_G$$

$$\frac{1}{2} m_p . r . a_G + m.r.a_G = m r.g + M_c$$

$$a_G \left(\frac{1}{2} m_p r + m r \right) = m r g + M_c$$

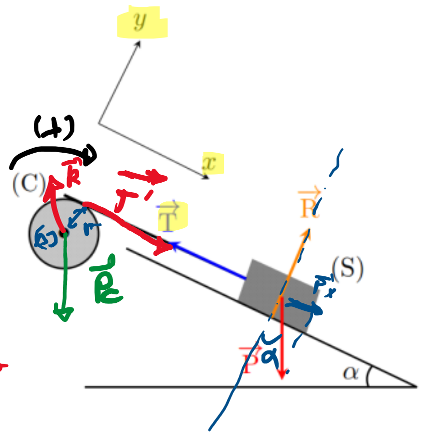
$$\frac{a_G}{2} r \left(m_p + 2m \right) = m r g + M_c$$

$$\boxed{a_G = \frac{2mrg + 2M_c}{r(m_p + 2m)}}$$

Exercice 2

On considère la figure ci-contre constituée :

- D'un corps (S) de masse $m_S = 0,25kg$ capable de glisser sans frottement sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30$ par rapport à la ligne horizontale.
- D'un cylindre plein homogène (C) de rayon $r = 8cm$ et de masse $m_C = 0,1kg$ capable de tourner sans frottement autour d'un axe horizontal et fixe (Δ).
- D'un fil inextensible de masse négligeable enroulé sur le cylindre (C), son extrémité libre reliée au corps (S), on considère que les frottements sont négligeables.



On libère le corps S sans vitesse initiale et il glisse sur le plan incliné provoquant la rotation du cylindre. Exprimer l'accélération du corps (S) a_G en fonction de g , α , m_C et m_S, puis calculer sa valeur.
On donne : $g = 10N.kg^{-1}$

Correction

* Etude du mvt du solide (S)

S.E {le solide (S)}

B.F : $\vec{P}$ son poids , $\vec{R}$: la réaction du plan incliné .
$\vec{T}$: la tension du fil.

Dans le Repère $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ liée à la terre supposé galiléen on applique la 2ème loi de Newton $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a_G}$

Projection sur l'axe $(O, \vec{i})$.

$$P \sin\alpha + 0 - T = m_S a_x \qquad (a_x = a_G)$$

$$m_S g \sin\alpha - T = m_S a_G$$

$$m_s g \sin\alpha - T = m_s a_G$$

$$\boxed{T = m_s . g . \sin\alpha - m_s . a_G} \quad (1)$$

• Etude du mvt de la poulie.

S.E {la poulie (c)}

B.F : $\vec{P_c}$ son poids , $\vec{R'}$ réaction de l'axe (Δ)

$\vec{T'}$: La tension du fil.

Application de la RFD dans le cas de rotation de la poulie

$$\cancel{\mathcal{M}_\Delta(\vec{P_c})}^{\,0} + \cancel{\mathcal{M}_\Delta(\vec{R'})}^{\,0} + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T'}) = J_\Delta . \ddot{\theta}$$

Car les force $\vec{P_c}$ et $\vec{R'}$ se coupent avec (Δ).

$$+ r T' = J_\Delta . \ddot{\theta} \qquad \ddot{\theta} = \frac{a_G}{r}$$

$$\cancel{r} T' = \frac{1}{2} m_c . \cancel{r^2} . \frac{a_G}{\cancel{r}}$$

$$\boxed{T' = \frac{1}{2} m_c . a_G} \quad (2)$$

Le fil est inextensible Alors $T' = T$

$$\frac{1}{2} m_c . a_G = m_s g \sin\alpha - m_s . a_G$$

$$\frac{1}{2} m_c . a_G + m_s a_G = m_s g \sin\alpha$$

$$\frac{m_c + 2 m_s}{2} . a_G = m_s g \sin\alpha$$

$$\boxed{a_G = \frac{2 m_s g \sin\alpha}{m_c + 2 m_s}}$$