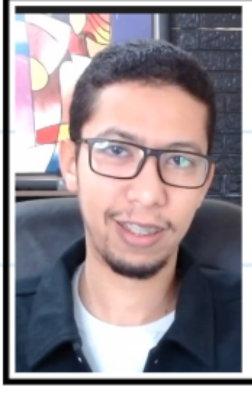
ZAKARIA Bouicha
WtSp: 0617074062

La logique.

1 bac sciences expérimentales

Ajitfham Academy
zakaria bouicha

Ex 1 :

Écrire les propositions suivantes à l'aide des quantificateurs et connecteurs logiques puis déterminer la négation de chacune d'elles :

P_1 : « Le carré d'un réel quelconque est supérieur ou égal à -1 ».

P_2 : « L'équation $x^2-2x-3=0$ admet au moins une racine réelle ».

P_3 : « Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré ».

P_4 : « Aucun entier naturel n'est supérieur à tous les autres ».

P_5 : « Étant donné trois réels, il y en a au moins deux de même signe »

P_6 : « Tout réel inférieur ou égal à -1 est négatif »

Ex 2 :

Donner la négation de chacune des propositions suivantes :

1) $(\forall x\in\mathbb{R})\ \left(x^2-|x|+1\geq 0 \text{ et } -1\leq x\leq 1\right)$.

2) $(\exists x\in\mathbb{R});\left(x\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\in\mathbb{Q}\right)$.

3) $\left(\exists(a;b;c)\in\mathbb{R}^3\right);\ a+b+c\leq 9 \text{ et } a\leq b\leq c$

4) $(\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha>0);\ \left|x-\dfrac{\pi}{2}\right|\leq\alpha\Rightarrow|\cos x|\leq\varepsilon$.

Ex 3 :

Donner la négation des propositions suivantes :

$P_1:-\sqrt{3}\in\mathbb{Z}$; $P_2:\sqrt{2}\leq 1$; $P_3:\sqrt{2^2+3^2}=5$

$P_4:\exists n\in\mathbb{N};\left(\sqrt{n}\in\mathbb{N} \text{ et } \sqrt{n}>1\right)$

$P_5:\forall x\in\mathbb{R};\left(|x|=x \text{ ou } x^2\geq 0\right)$

$P_6:\left(\forall(x;y)\in\mathbb{R}\right)\ x+y>0$

$P_7:(\forall x\in\mathbb{R})(\exists n\in\mathbb{N})\ x\geq n$

$P_8:(\forall x\in\mathbb{R})\ \left(x>0\Rightarrow x+\dfrac{1}{x}\geq 2\right)$

Ex 4 :

1) On considère la proposition :

P : « $(\forall x\in\mathbb{R});\ |x|>0$ »

a) Déterminer la négation de la proposition P

b) Montrer que la proposition P est fausse.

2) On considère la proposition :

Q : « $(\forall x\in\mathbb{R})\ \sqrt{1+x^2}\geq|x|$ »

a) Déterminer la négation de la proposition Q

b) Montrer que la proposition Q est vraie.

3) On considère la proposition :

R : « $(\forall n\in\mathbb{N})\ (\exists x\in\mathbb{N})\ ;\ x<n$ »

a) Déterminer la négation de la proposition R.

b) Montrer que la proposition R est fausse.

4) On considère la proposition :

S : « $(\forall x\in\mathbb{R})\ (x\geq 0 \text{ ou } x<0)$ »

a) Montrer que la proposition S est vraie.

b) Donner la négation de la proposition S.

5) On considère la proposition :

T : « $(\exists x\in\mathbb{R}^+);\ \left(x^2\leq x \text{ et } \sqrt{x}\geq x\right)$ »

a) Déterminer la valeur de vérité de la proposi[tion]

b) Donner la négation de la proposition T

Ex 5 : (Contre-exemple)

1) Montrer que : « $(\forall x\in\mathbb{R})$; $2x-4>0$ » est une proposition fausse.

2) Montrer que : « $(\forall x\in\mathbb{R})$; $\sqrt{x}\in\mathbb{N}$ » est une proposition fausse.

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2+|x-1|$$

a) Montrer que f n'est ni paire ni impaire.

b) Montrer que f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que la proposition suivante est fausse

« $(\forall x\in\mathbb{R})\ (\exists y\in\mathbb{R})\ ;\ x^2-xy+y^2=0$ »

Ex 6 :

1) Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$\left(x>2 \text{ et } y\geq\frac{1}{3}\right)\Rightarrow 0<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{7}{2}$$

2) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\quad x+1\geq 2\sqrt{x}$

3) Montrer que pour tout $(a;b)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2$:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$$

3) Montrer que pour tout $(a;b)\in\mathbb{R}^2$:

$$a^2+b^2=1\Rightarrow |a+b|\leq\sqrt{2}$$

Ex 7 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$x^2-3|x-2|-4=0$; $\sqrt{x+4}=x+2$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$|x-1|+|x|\geq 3$; $\sqrt{3-x}+x<0$;

$\sqrt{x-1}\geq x-4$; $\sqrt{x^2+2x-3}>x+2$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases}2|x-1|-y=4\\ x+2y=-2\end{cases} \quad ; \quad \begin{cases}3|x-2|-2y=7\\ x-2|y-1|=-5\end{cases}$$

Ex 8 :

En utilisant un raisonnement par disjonction des cas,
Montrer que :

1) $(\forall x\in\mathbb{R})\ \sqrt{x^2+1}+x>0$.

2) $(\forall x\in\mathbb{R})\ \sqrt{2x^2-3x+3}-x+1>0$.

3) le nombre $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

4) $(\forall n\in\mathbb{Z})\ \dfrac{n(n^2+5)}{3}\in\mathbb{Z}$.

Ex 9 :

Soit x un réel positif.

1) Montrer que: $\sqrt{2x+2}-\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1$

2) Montrer que: $\sqrt{2x+2}=1+\sqrt{x}\Leftrightarrow x=1$.

3) Montrer que: $0\leq\dfrac{x}{x^2+x+1}\leq\dfrac{1}{3}$.

4) Montrer que: $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-x+1}\leq\dfrac{4}{3}\sqrt{x}$.

5) Établir les inégalités suivantes pour tout $(x;y$

a) $\dfrac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$; b) $\dfrac{x+y}{2}\leq\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$

c) $x^2+xy+y^2\geq 0$

6) Montrer que pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}^{+2}$:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<\sqrt{x+1}-\sqrt{y}\Leftrightarrow x\geq y.$$

Ex 10 :

Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$. À l'aide d'un raisonnement par contraposée, établir les implications suivantes :

1) $(x\neq 1 \text{ et } y\neq 1)\Rightarrow 1+xy\neq x+y$

2) $x\neq\sqrt{3}\, et\, x\neq\sqrt{3}\Rightarrow\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}\neq 1$.

2) $(x\neq y \text{ et } x+y\neq -1)\Rightarrow x^2+x\neq y^2+y$.

3) $x\neq y\Rightarrow(x-1)(y+1)\neq(x+1)(y-1)$.

4) $y\neq-\dfrac{3}{4}x\Rightarrow\dfrac{x-y}{x+y}\neq 7$.

5) $(x\neq y \text{ et } xy\neq 1)\Rightarrow\dfrac{x}{x^2+x+1}\neq\dfrac{y}{y^2+y+1}$.

6) $(x\neq 0 \text{ ou } y\neq 0)\Rightarrow x^2+y^2\neq 0$.

Ex 11 :

1) Montrer par l'absurde que :

$$\sqrt{6}\notin\mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \sqrt{3}-\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$$

2) Montrer que si $x\in\mathbb{Q}^*$ et $y\notin\mathbb{Q}$ alors :

$$xy\notin\mathbb{Q} \quad \text{et} \quad x+y\notin\mathbb{Q}$$

Ex 12 :

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$1+5+9...+(4n+1)=(n+1)(2n+1)$$

2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$1-2^2+....+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}(1+2+\dots+n)$$

3) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$1\times 2+2\times 3+...+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

4) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+....+\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1\right)$$

Ex 13 :

1) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$3^{2n}-5^n$ est divisible par 4

2) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

10^n-1 est divisible par 9