Le pendule pesant est un système mécanique en mouvement de rotation oscillatoire autour d'un axe horizontal, sa période dépond généralement de l'amplitude du mouvement .
L'objectif de cet exercice est d'étudier un oscillateur formé d'un pendule pesant et d'un fil de torsion et comment le transformer à un oscillateur de période indépendante de l'amplitude du mouvement .

On fixe au milieu d'un fil tendu horizontalement, de constante de torsion C , une tige de longueur $AB = 2\ell$ et de masse négligeable . A l'extrémité inférieur A de la tige est fixé un corps ponctuel (S_1) de masse $m_1 = m$.

La tige porte sur sa partie supérieure en un point M situé à une distance d du point O un solide ponctuel (S_2) de masse $m_2 = 2m$ .La position de (S_2) sur la tige peut être réglée .
Lorsque le fil de torsion n'est pas tordu , la tige prend une position verticale .
On désigne par J_Δ le moment d'inertie du système constitué par la tige AB et les solides(S_1) et (S_2) par rapport à l'axe de rotation (Δ) qui est confondu avec le fil de torsion .

On écarte la tige AB de sa position d'équilibre verticale d'un angle θ_m dans le sens positif puis on la libère sans vitesse initiale , elle effectue alors des oscillations dans un plan vertical .
On repère à chaque instant la position de la tige AB par l'angle θ qu'elle forme avec la verticale passant par O ,comme indique la figure (1).

On néglige tous les frottements .
L'expression de l'énergie potentielle de torsion dans le cas étudié est $E_{pt} = 2C\theta^2 + cte$.

On choisit comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur le plan horizontal contenant le point O, et comme état de référence pour l'énergie potentielle de torsion la position dans laquelle le fil n'est pas tordu ($\theta=0$).

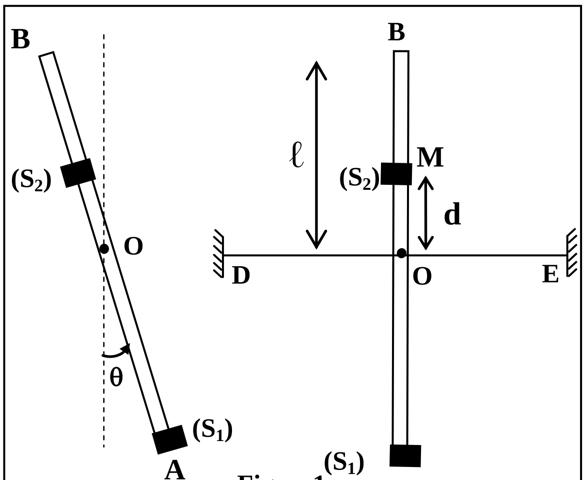

Figure1

1 **1-** Montrer que l'expression de l'énergie mécanique E_m de l'oscillateur s'écrit sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2}J_\Delta.\dot{\theta}^2 + 2mg(d-\frac{\ell}{2})\cos\theta + 2C\theta^2$$

2- On considère le cas de faibles oscillations dont $0 < \theta < \frac{\pi}{18}$ (rad) et $\cos\theta \approx 1-\frac{\theta^2_{(rad)}}{2}$.

1 **2.1-** Etablir l'expression de l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ .

0,75 **2.2-** Trouver l'expression littérale de la période propre T_0 de l'oscillateur pour que la solution de l'équation différentielle soit : $\theta(t) = \theta_m\cos(\frac{2\pi t}{T_0} + \varphi)$.

0,75 **3-** On règle la position de (S_2) sur la tige à la distance d_0 du point O, puis on écarte de nouveau la tige de sa position d'équilibre verticale d'un angle θ_m et on la libère sans vitesse initiale .
Déterminer la distance d_0 en fonction de ℓ pour que le mouvement de l'oscillateur soit un mouvement de rotation sinusoïdale, quel que soit la valeur de θ_m appartenant à l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.