
**prof zakaria bouicha**

**les nombres complexes**
**arithmétiques dans z**
**structures algébriques**

# les nombres complexes

## Équation du 2ème degrée

$$aZ^2 + bZ + C = 0 \qquad (a,b,c) \in \mathbb{C}$$

- on calcul $\Delta = b^2 - 4ac < 0$
- On écrit $\Delta = \delta^2$
- les solutions sont : $Z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $Z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$= \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad = \frac{-b+\delta}{2a}$$

## Forme trigonométrique - Forme exponentielle.

Si $Z = x + iy$

$|Z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\cos(x) - i\sin(x) = \cos(-x) + i\sin(-x)$$
$$-\cos(x) + i\sin(x) = \cos(\pi - x) + i\sin(\pi - x)$$
$$-\cos(x) - i\sin(x) = \cos(\pi + x) + i\sin(\pi + x)$$

La forme trigonométrique est $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

où $r = |Z| > 0$ et $\theta \equiv \arg(Z)\ [2\pi]$ où $\theta \in [-\pi, \pi[$

La forme exponentielle : est $Z = re^{i\theta}$

## Formule de Moivre :

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

# Formules d'Euler

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$$

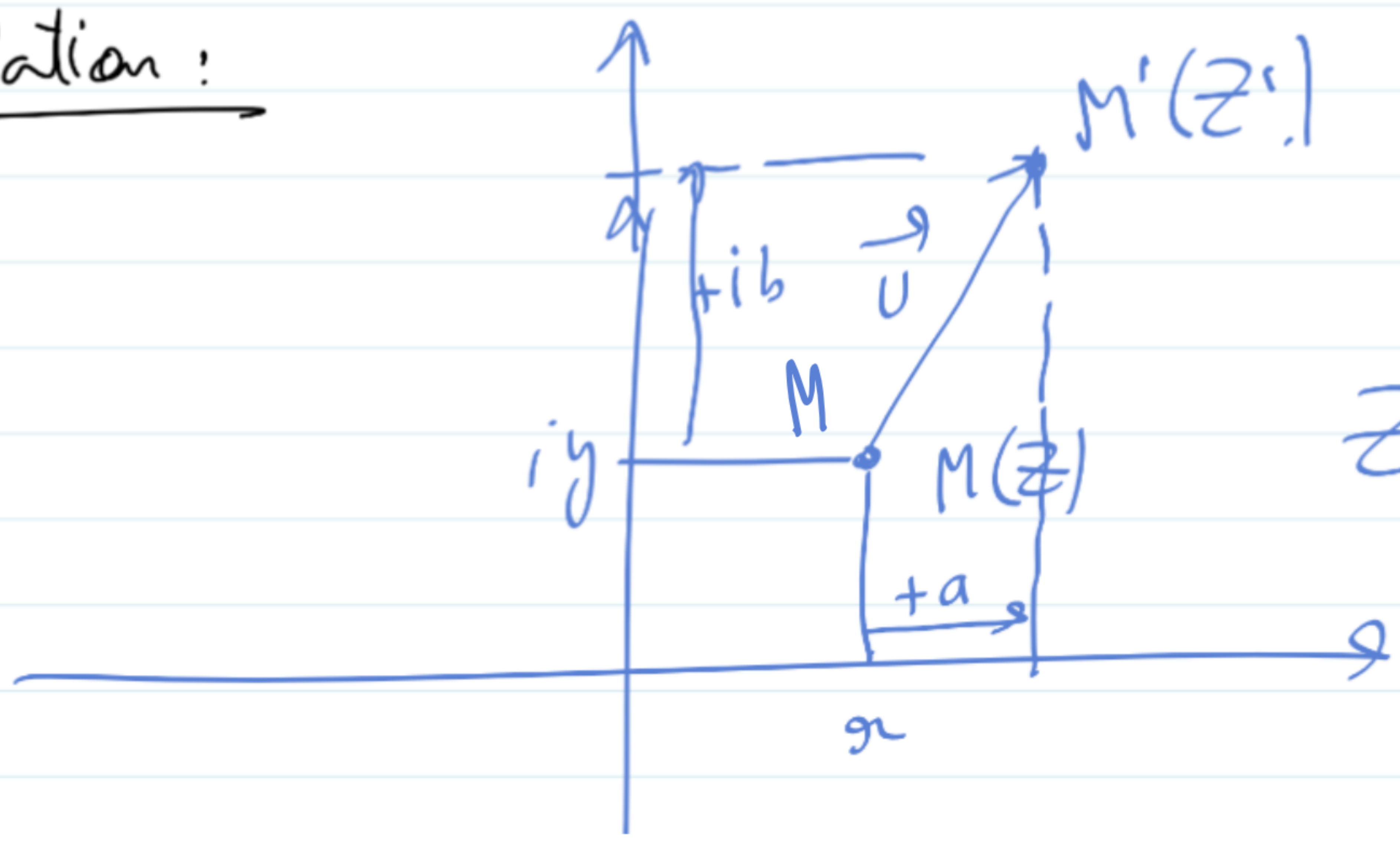
$$\boxed{\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

$$\boxed{e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = 2\cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)}}$$

$$\boxed{e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2} = 2i\sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)}}$$

## Les Transformations dans le plan :

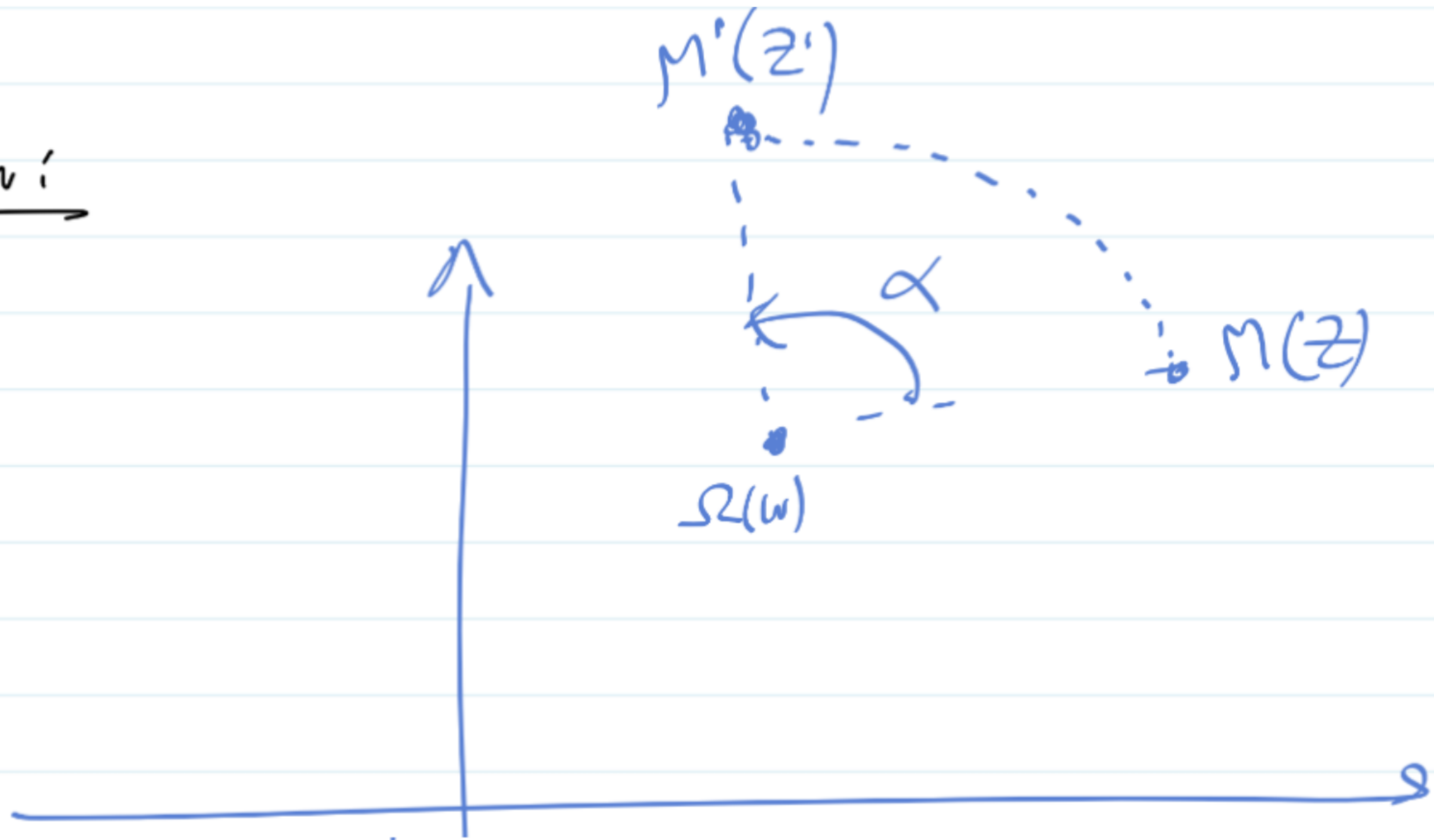
translation :




$$z' = z + z_{\vec{u}}$$

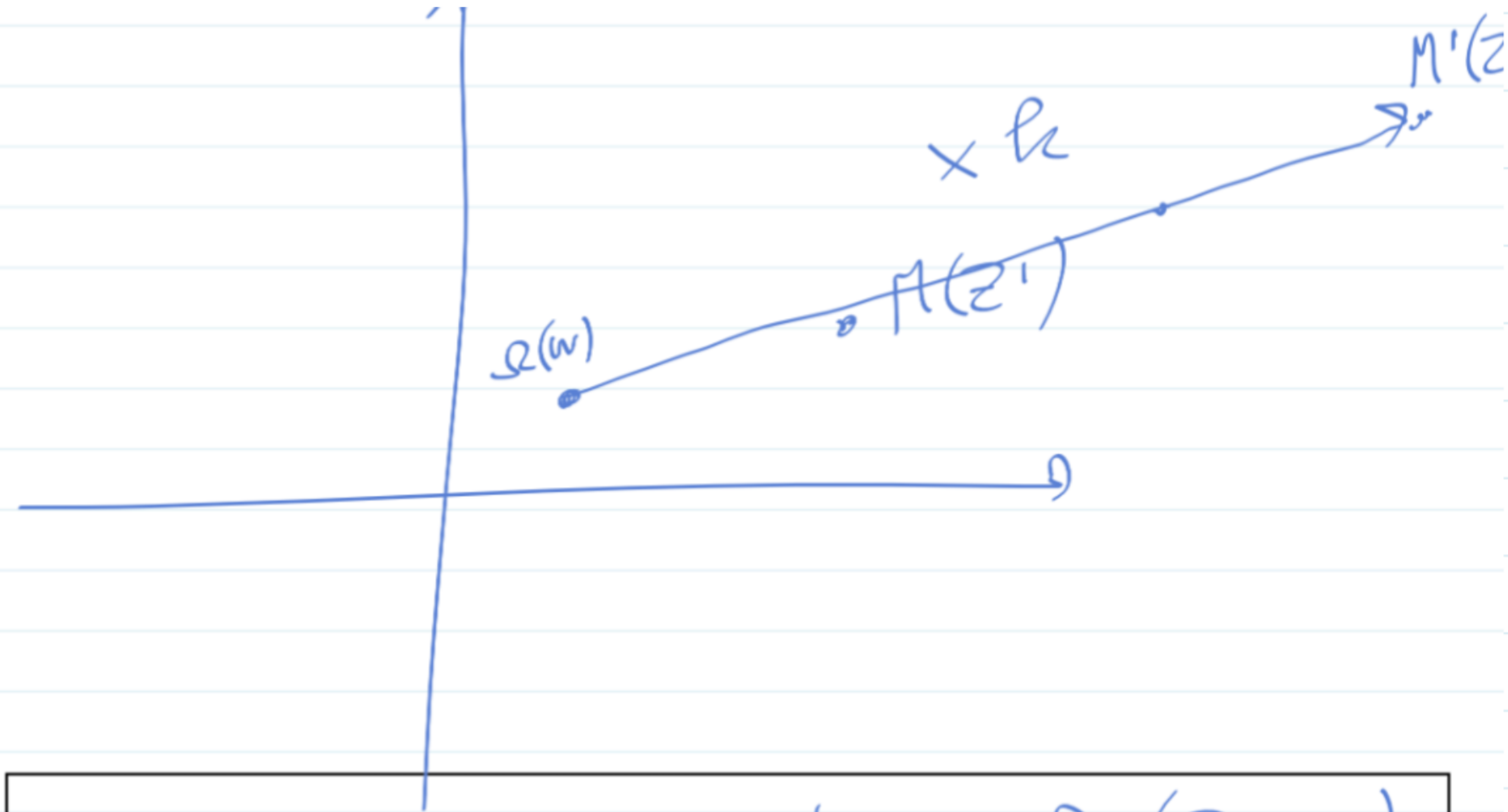
$$\boxed{t(M) = M' \iff z' = z + z_{\vec{u}}}$$

Rotation :




$$\boxed{R(M) = M' \iff z' - w = e^{i\alpha}(z - w)}$$

# Homothétie




$$\boxed{h(M)=M' \iff z'-w = k(z-w)}$$

<u>En général :</u> une transformation dans le plan s'écrit : $f(z) = az+b$ $\quad (z' = az+b)$

- Si $a=1$ alors $f$ est une translation.
- Si $a=e^{i\alpha}$ alors $f$ est une rotation.
- Si $a=k\in\mathbb{R}$, alors $f$ est une homothétie.
- Si $a=ke^{i\alpha}$, alors $f$ est une composée d'une rotation et d'une homothétie.

| Le concept géométrique | L'interprétation complexe |
|---|---|
| Les points $A$ $B$ $et$ $C$ sont alignés | $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$ |
| Les points $A$ $B$ $et$ $C$ sont non alignés | $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \notin \mathbb{R}$ |
| Le triangle $ABC$ est isocèle en $A$ | $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1;\theta]$ $avec$ $\theta \not\equiv 0[\pi]$ |
| Le triangle $ABC$ est rectangle en $A$ | $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r;\pm\frac{\pi}{2}\right] \in i\mathbb{R}$ |
| Le triangle $ABC$ est rectangle isocèle en $A$ | $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1;\pm\frac{\pi}{2}\right] = \pm i$ |
| Le triangle $ABC$ est équilatéral | $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1;\pm\frac{\pi}{3}\right] = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ |
| Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme | $z_B - z_A = z_C - z_D$ |
| Le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle | $z_B - z_A = z_C - z_D$ $et$ $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$ |
| Le quadrilatère $ABCD$ est un losange | $z_B - z_A = z_C - z_D$ $et$ $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}$ |
| Le quadrilatère $ABCD$ est un carré | $z_B - z_A = z_C - z_D$ $et$ $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$ |
| $(AB) \parallel (CD)$ | $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$ |
| $(AB) \perp (CD)$ | $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$ |
| Mesure d'un angle | $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$ |

Rappel: A, B, C et D sont cocycliques.

$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} \notin \mathbb{R} \text{ et } \frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} \times \frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} \in \mathbb{R}$$

# arithmétiques dans z

## Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

- $a | b \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad b = ka$
- $a | n$ et $a | m$ alors $a$ est un diviseur commun de $a$ et $b$
- $a | m$ et $b | m$ alors $m$ est un multiple commun de $a$ et $b$.

## Les propriétés de divisibilité

$a \in \mathbb{Z}$ ; $b \in \mathbb{Z}$ ; $c \in \mathbb{Z}$

1) $1|a$ et $-1|a$ et $a|a$ et $a|-a$
2) $b|a \Rightarrow |b| \leq |a|$
3) $a / b \Rightarrow a / b \times c$
4) $a / b \Rightarrow |a| \leq |b|$
5) $b|1 \Rightarrow b \in \{-1,1\}$
6) $a|b$ et $b|a \Rightarrow |a| = |b|$
7) $a|b$ et $c|d \Rightarrow ac|bd$
8) $a|b$ et $b|c \Rightarrow a|c$
9) $a|b \Rightarrow a|bc$
10) $a|b$ et $b|c \Rightarrow a|c$
11) $a|b \Rightarrow a|bc$
12) $a|m$ et $a|n \Rightarrow a|m+n$
13) $a|m$ et $a|n \Rightarrow a|m-n$
14) $a|m$ et $a|n \Rightarrow a|\alpha m + \beta n$ où $\alpha$ et $\beta$ sont des entiers relatifs quelconques.
15) $a / b \Rightarrow a^n / b^n \quad n \in \mathbb{N}$

## La division euclidienne :

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$, $\exists! (q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $\quad a = bq + r$

avec : $0 \leq r < |b|$

## Les nombres premiers الأعداد الأولية

- Un nombre premier p admet exactement deux diviseurs positifs 1 et |p|.

c)si ***a*** un entier naturel non nul différent de 1 et non premier, le plus petit diviseur de ***a*** diffèrent de 1 est un nombre premier

Soit $n$ un entier composé supérieur ou égal à $2$. Alors :

1) Le plus petit diviseur positif de $n$ différent de $1$ est un nombre premier.

2) $n$ est un produit de nombres premiers. En particulier, $n$ possède au moins un diviseur premier.

3) $n$ possède un facteur premier $p$ tel que $p^2 \le n$.

preuve :

(1)

1) Puisque $n$ n'est pas premier, alors il admet un diviseur propre (c'est-à-dire différent de $1$ et $n$). Notons $p$ le plus petit diviseur propre positif de $n$ et montrons que $p$ est premier.

Par l'absurde, si $p$ n'était pas premier, alors il admet un diviseur propre positif, que l'on le note $d$. Comme $d / p$ et $p / n$ alors $d / n$ et $1 < d < p$, et cela contredit le fait que $p$ est le plus petit diviseur propre positif de $n$. Par suite, l'entier $p$ est premier.

2) d'après 1) si $n$ est un entier composé $\geq 2$, alors :

le plus petit diviseur positif de $n$ est premier noté $p$.

$\Rightarrow \quad p \mid n$

$\Rightarrow \quad \exists n_1 \in \mathbb{Z} \quad n = p n_1$

Si $n_1$ est premier, le résultat est prouvé.

Si $n_1$ n'est pas premier, d'après 1) $\exists p_1$ premier t.q $p_1 \mid n_1$

$n_1 = p_1 n_2$

$\Rightarrow \quad n = p p_1 n_2$

En recommençant cette opération un nombre fini de fois :

on obtient ; $n = p_1 p_2 \cdots p_r \quad r \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

3) Puisque $n \notin \mathbb{P}$, il s'écrit $n = ab$, où $a, b$ sont deux entiers strictement supérieurs à $1$, on peut supposer que $a \le b$. Soit $p$ un facteur premier de $a$. Alors $p / n$, et $p^2 \le ap \le ab = n$.

$p$ facteur premier de $a \Rightarrow p \leqslant a \Rightarrow p^2 \leqslant ap \leqslant ab = n$

car : $p \leqslant a \leqslant b \Rightarrow p \leqslant b \Rightarrow ap \leqslant ab = n$

donc $p^2 \leqslant n$

# PGCD et ppcm

Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs non nuls.

- Le plus grand commun diviseur de $a$ et $b$, noté $a \wedge b$ ou $PGCD(a,b)$, est le plus grand des diviseurs positifs communs à $a$ et $b$.
- Le plus petit commun multiple de $a$ et $b$, noté $a \vee b$ ou $PPCM(a,b)$, est le plus petit des multiples strictement positifs communs à $a$ et $b$.
- On convient que : $a \wedge 0 = |a|$ et $a \vee 0 = 0$

## Exemples

$\begin{cases} 5 \wedge 15 = 5 \\ 5 \vee 15 = 15 \end{cases}$ ; $\begin{cases} (-7) \wedge 16 = 1 \\ (-7) \vee 16 = 112 \end{cases}$ ; $\begin{cases} 6 \wedge 9 = 3 \\ 6 \vee 9 = 18 \end{cases}$ ; $\begin{cases} 27 \wedge 41 = 1 \\ 27 \vee 41 = 1107 \end{cases}$ ; $\begin{cases} (-12) \wedge (-30) = 6 \\ (-12) \vee (-30) = 60 \end{cases}$

## Remarques

Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs non nuls. Si $d = a \wedge b$ et $m = a \vee b$ alors :

- $d \geq 1$ et $d / a$ et $d / b$
- $m \geq 1$ et $a / m$ et $b / m$
- Pour tout $c \in \mathbb{N}^*$ : $[(c / a \text{ et } c / b) \Rightarrow c / d]$ et $[(a / c \text{ et } b / c) \Rightarrow m / c]$
- Pour tout $c \in \mathbb{N}^*$ : $[(c / a \text{ et } c / b) \Rightarrow c \leq d]$ et $[(a / c \text{ et } b / c) \Rightarrow m \leq c]$
- $|a| \wedge |b| = d$ et $a \wedge 1 = 1$ et $a \wedge a = a \wedge 0 = |a|$.
- $|a| \vee |b| = m$ et $a \vee 1 = |a|$ et $a \vee a = |a|$.

Soit $a$, $b$ et $c$ des entiers relatifs non nuls et $n$ un entier naturel. Alors :

1) $a \wedge b = b \wedge a$ ; 2) $a \vee b = b \vee a$ ; 3) $a / b \Leftrightarrow a \wedge b = |a| \Leftrightarrow a \vee b = |b|$

4) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ ; 5) $(ca) \wedge (cb) = |c|(a \wedge b)$ ; 6) $\begin{cases} c / a \\ c / b \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right) \wedge \left(\frac{b}{c}\right) = \frac{a \wedge b}{|c|}$

7) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ ; 8) $(ca) \vee (cb) = |c|(a \vee b)$ ; 9) $\begin{cases} c / a \\ c / b \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right) \vee \left(\frac{b}{c}\right) = \frac{a \vee b}{|c|}$

10) $a^n \wedge b^n = (a \wedge b)^n$ ; 11) $a^n \vee b^n = (a \vee b)^n$ ; 12) $(a \wedge b).(a \vee b) = |ab|$

- Division Euclidienne

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ , $\exists! (q,r) \in \mathbb{Z}^2$

$$a = bq + r \quad \text{avec } 0 \leq r < |b|$$

## Algorithme d'Euclide

$137$
$2 \quad 1$
$74$

Exemple: déterminons $137 \wedge 275$

(1) $275 = 137 \times 2 + 1$

$137 = 1 \times 137 + 0$

alors $137 \wedge 275 = 1$

(2) $6468 \wedge 1547$

$6468 = 1547 \times 4 + 280$

$1547 = 280 \times 5 + 147$

$280 = 147 \times 1 + 133$

$147 = 133 \times 1 + 14$

$133 = 14 \times 9 + \boxed{7}$

$14 = 7 \times 2 + 0$

donc $6468 \wedge 1547 = 7$

### 1.3. NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX

**Définition 2**

Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs non nuls.

On dit que $a$ et $b$ sont premiers entre eux si le seul diviseur positif commun à $a$ et $b$ est 1, c'est-à-dire si :

$$a \wedge b = 1$$

## Théorème 1

$d = a \wedge b \iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \quad \alpha a + \beta b = d$ et $\alpha \wedge \beta = 1$

## Théorème 2

$d = a \wedge b \implies \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \quad \alpha a + \beta b = d$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Théorème de Bézout :}\\ a \wedge b = 1 \iff \exists (U, V) \in \mathbb{Z}^2 \quad aU + bV = 1\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Théorème de Gauss :}\\ \begin{cases} a \mid bc \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \implies a \mid c\end{array}}$$

## Propriétés importantes

1. $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \implies a \wedge (bc) = 1$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a \wedge b = 1 \iff a \wedge b^n = 1$

3. $a \wedge b = 1 \iff a^n \wedge b^m = 1$

## Équation diophantienne :

$$ax + by = c \qquad (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

- Si $a \wedge b \mid c$ alors l'équation admet des solutions.
- Voir la vidéo pour comprendre comment résoudre l'équation.

**EXERCICE3** : (4 points)

**Partie I** : On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E)$ : $47x-43y=1$

0.25 1- Vérifier que le couple $(11,12)$ est une solution particulière de l'équation $(E)$

$$47 = 43\times 1 + 4$$
$$43 = 4\times 10 + 3$$
$$4 = 3\times 1 + 1$$

alors $1 = 4 - 3\times 1 = 4-(43-4\times 10)$

$$= 4\times 11 - 43$$
$$= (47-43\times 1)\times 11 - 43$$
$$1 = 47\times 11 - 43\times 12$$

alors: $(11,12)$ est une solution particulière de $(E)$

**Partie I** : On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E)$ : $47x-43y=1$

0.25 1- Vérifier que le couple $(11,12)$ est une solution particulière de l'équation $(E)$

0.75 2- Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E)$

Soit $(x,y)$ une solution de $(E)$ $\left((x,y)\in S_E\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 47x-43y=1 & (1) \\ 47\times 11-43\times 12 = 1 & (2) \end{cases}$$

$(1)-(2) \rightarrow 47(x-11)-43(y-12)=0$

$\Rightarrow 47(x-11) = 43(y-12)$ $(*)$

$\rightarrow 43 \mid 47(x-11)$

et puisque $43\wedge 47=1$, d'après le Théorème de Gauss

$43 \mid x-11$.

alors $\exists k\in\mathbb{Z}$ $x-11=43k$

$\rightarrow x = 11+43k$

$(*) \rightarrow 47\times \cancel{43}k = \cancel{43}(y-12)$

$\rightarrow y-12 = 47k$

$\rightarrow y = 12+47k$

$(x,y)\in\{(11+43k\,;\,12+47k) \,/\, k\in\mathbb{Z}\}$

donc $S_E \subset \{(11+43k\,;\,12+47k)\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$

d'autre part, $47(11+43k)-43(12+47k)$

$= 47\times11-43\times12 = 1$

Donc $\{(11+43k\,;\,12+47k)\ /\ k\in\mathbb{Z}\}\subset S_E$

Donc $S_E = \{(11+43k\,;\,12+47k)\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$.

## CONGRUENCE MODULO $n$

$$n \mid a-b \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad a-b=kn$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad a=b+kn$$
$$\iff a \equiv b \ [n]$$

Exemple :

1) On a $247 \equiv 7 \ [15]$ car $15 / 247-7$. De même : $163 \equiv -2 \ [15]$ car $15 / 163+2$.

2) Si $n \in \mathbb{Z}$ alors : $n(n+1) \equiv 0 \ [2]$ et $(2n+1)^2 \equiv 1 \ [4]$

### Proposition 4

Soit $n$ un entier naturel non nul.

La relation « de congruence» est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire :

1) Elle est réflexive : $(\forall a \in \mathbb{Z}) \quad a \equiv a \ [n]$.

2) Elle est symétrique : $(\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2) \ (a \equiv b \ [n] \Rightarrow b \equiv a \ [n])$.

3) Elle est transitive : $(\forall (a;b;c) \in \mathbb{Z}^3) \ (a \equiv b \ [n] \text{ et } b \equiv c \ [n]) \Rightarrow a \equiv c \ [n]$

### Proposition 5

Soit $n$ un entier naturel non nul et $(a;b;c;d) \in \mathbb{Z}^4$. Alors :

1) $a \equiv b \ [n] \Leftrightarrow$ (Les restes respectifs des divisions euclidiennes de $a$ et de $b$ par $n$ sont égaux).

2) Si $a \equiv b \ [n]$ et $c \equiv d \ [n]$, alors : $a+c \equiv b+d \ [n]$ et $ac \equiv bd \ [n]$.

3) Si $a \equiv b \ [n]$ et $k \in \mathbb{Z}$, alors : $ka \equiv kb \ [n]$.

4) Si $a \equiv b \ [n]$ et $p \in \mathbb{N}$, alors : $a^p \equiv b^p \ [n]$.

# Théorème de Fermat :

Soit $a \in \mathbb{Z}^*$ et $p$ un nombre premier

Alors : $a^p \equiv a \, [p]$

$a \in \mathbb{Z}^*$ et $p$ premier t.q : $a \wedge p = 1$, alors :

$$a^{p-1} \equiv 1 \, [p].$$

# L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

introduction :

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0} ; \bar{1}\}$$

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\bar{0} ; \bar{1} ; \bar{2}\}$$

En général : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots\ldots, \overline{n-1}\}$

## 3.1. CLASSES D'ÉQUIVALENCE

**Définition 7**

Soit $n$ un élément de $\mathbb{N}^*$.

- L'ensemble des entiers relatifs qui ont le même reste $r$ de la division euclidienne par $n$ est appelé la classe d'équivalence de $r$, et on la note $\bar{r}$. C'est la classe d'équivalence de $r$ modulo $n$ dans $\mathbb{Z}$.
- Généralisation : Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

La classe d'équivalence de $a$ modulo $n$ est l'ensemble défini par :

$$\bar{a} = \{x \in \mathbb{Z} / x \equiv a\ [n]\} = \{a + kn / k \in \mathbb{Z}\}$$

**Exemples**

1) Si $n = 2$ alors : $\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} / x \equiv 0\ [2]\} = \{2k / k \in \mathbb{Z}\}$ et $\bar{1} = \{x \in \mathbb{Z} / x \equiv 1\ [2]\} = \{2k + 1 / k \in \mathbb{Z}\}$

On voit bien que $\bar{0}$ est l'ensemble des nombres pairs, tandis que $\bar{1}$ est l'ensemble des nombres impairs.

Remarquons enfin que pour $n = 2$ : $\mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1}$

2) Si $n = 3$ alors : $\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} / x \equiv 0\ [3]\} = \{3k / k \in \mathbb{Z}\}$ et $\bar{1} = \{x \in \mathbb{Z} / x \equiv 1\ [3]\} = \{3k + 1 / k \in \mathbb{Z}\}$

et $\bar{2} = \{x \in \mathbb{Z} / x \equiv 2\ [3]\} = \{3k + 2 / k \in \mathbb{Z}\}$. De plus, on a pour : $\mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2}$.

**Définition 8**

Soit $n$ un élément de $\mathbb{N}^*$.

- On définit l'addition dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme suit : Pour tous $\bar{x}$ et $\bar{y}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$.
- On définit la multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme suit : Pour tous $\bar{x}$ et $\bar{y}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\bar{x} \times \bar{y} = \overline{x \times y}$.

Exemples : $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

1

$$\bar{4} + \bar{2} = \overline{4+2} = \bar{6} = \bar{0}$$

$$\bar{5} \times \bar{4} = \overline{5 \times 4} = \overline{20} = \bar{2}$$

$$\bar{5}^2 = \overline{25} = \bar{1}$$

② Résoudre $\bar{2}x = \bar{1}$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6}\}$.

| $x$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{2}x$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{6}$ | $\bar{1}$ | $\bar{3}$ | $\bar{5}$ |

$\overline{8} = \overline{7+1} = \bar{7} + \bar{1} = \bar{0} + \bar{1} = \bar{1}$

$\overline{10} = \bar{3}$

$\overline{12} = \bar{5}$

l'ensemble des solutions est $S = \{\bar{4}\}$.

## 4.4. CRITÈRES DE DIVISIBILITÉ SUR LES NOMBRES 3 ; 4 ; 5 ; 9 ; 11 ; 25 DANS LE SYSTÈME DÉCIMAL

**Proposition 9**

Soit $x \in \mathbb{N}$ tel que $x = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}_{(10)} = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0$ avec :

$$a_n \neq 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq a_i < 10 \text{ pour tout } i \in \{0;1;\dots;n\}$$

On a alors les équivalences suivantes :

1) $x \equiv 0\,[5] \Leftrightarrow (a_0 = 0 \text{ ou } a_0 = 5)$ ; 4) $x \equiv 0\,[3] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0\,[3]$

2) $x \equiv 0\,[25] \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0}_{(10)} \equiv 0\,[25]$ ; 5) $x \equiv 0\,[9] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0\,[9]$

3) $x \equiv 0\,[4] \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0}_{(10)} \equiv 0\,[4]$ ; 6) $x \equiv 0\,[11] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i \equiv 0\,[11]$