المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2019
- الموضوع -

NS25

المادة	الرياضيات	مدة الانجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية : (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	المعامل	9

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 4 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'exercice1 se rapporte aux structures algébriques ....(3.5 pts)
- L'exercice2 se rapporte aux nombres complexes ....(3.5 pts)
- L'exercice3 se rapporte à l'arithmétique ....(3 pts)
- L'exercice4 se rapporte à l'analyse ....(10 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE1 : (3.5 points)

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Soit $*$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\left(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2\right)\quad ;\quad (x+yi)*(a+bi)=xa+\left(x^2b+a^2y\right)i$$

0.25 1-a) Montrer que la loi $*$ est commutative sur $\mathbb{C}$

0.5 b) Montrer que la loi $*$ est associative sur $\mathbb{C}$

0.25 c) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre e que l'on déterminera.

0.25 d) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$. Montrer que le nombre complexe $x+yi$ admet le nombre complexe $\frac{1}{x}-\frac{y}{x^4}i$ comme symétrique pour la loi $*$

2-On considère le sous-ensemble E de $\mathbb{C}$ défini par : $E=\left\{x+yi \;/\; x\in\mathbb{R}_+^* \;;\; y\in\mathbb{R}\right\}$

0.25 a) Montrer que E est stable pour la loi $*$ dans $\mathbb{C}$

0.5 b) Montrer que $(E,*)$ est un groupe commutatif.

0.5 3-On considère le sous-ensemble G de E défini par : $G=\left\{1+yi \;/\; y\in\mathbb{R}\right\}$

Montrer que G est un sous-groupe de $(E,*)$

4-On considère l'ensemble $F=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix} / x\in\mathbb{R}_+^* \;;\; y\in\mathbb{R}\right\}$

0.25 a) Montrer que F est stable pour la loi $\times$ dans $M_2(\mathbb{R})$

0.5 b) Soit φ l'application de E vers F qui à tout nombre complexe $x+yi$ de E fait correspondre la matrice $M(x^2,y)=\begin{pmatrix}x^2&y\\0&x^2\end{pmatrix}$ de F

Montrer que φ est un isomorphisme de $(E,*)$ vers $(F,\times)$

0.25 c) En déduire que $(F,\times)$ est un groupe commutatif.

EXERCICE2 :(3.5 points)

Soit m un nombre complexe non réel ($m \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$)

I- On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z définie par :

$$(E) \ : \ z^2 - (1+i)(1+m)z + 2im = 0$$

0.25 1-a) Montrer que le discriminant de l'équation (E) est non nul.

0.5 b) Déterminer z_1 et z_2 , les deux solutions de l'équation (E)

2- On suppose dans cette question que $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$

0.5 a) Déterminer le module et un argument de $z_1 + z_2$

0.25 b) Montrer que si $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ alors $z_1 + z_2 = 2i$

II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

On considère les points suivants :

A le point d'affixe $a = 1+i$, B le point d'affixe $b = (1+i)m$, C le point d'affixe $c = 1-i$, D l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et Ω le milieu du segment $[CD]$.

0.5 1- a) Montrer que l'affixe du point Ω est $\omega = \dfrac{(1-i)(1-m)}{2}$

0.25 b) Calculer $\dfrac{b-a}{\omega}$

0.5 c) En déduire que $(O\Omega) \perp (AB)$ et que $AB = 2O\Omega$

2- La droite $(O\Omega)$ coupe la droite (AB) au point H d'affixe h

0.5 a) Montrer que $\dfrac{h-a}{b-a}$ est un réel et que $\dfrac{h}{b-a}$ est un imaginaire pur.

0.25 b) En déduire h en fonction de m

EXERCICE3 : (3 points)

On admet que 2969 (l'année amazighe actuelle) est un nombre premier.

Soient n et m deux entiers naturels vérifiant : $n^8 + m^8 \equiv 0 \ [2969]$

1- On suppose dans cette question que 2969 ne divise pas n

0.5 a) En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que : $(\exists u \in \mathbb{Z})$; $u \times n \equiv 1\ [2969]$

0.5 b) En déduire que : $(u \times m)^8 \equiv -1\ [2969]$ et que $(u \times m)^{2968} \equiv -1\ [2969]$

(On remarque que : $2968 = 8 \times 371$)

0.5 c) Montrer que 2969 ne divise pas $u \times m$

0.5 d) En déduire qu'on a aussi $(u \times m)^{2968} \equiv 1\ [2969]$

0.5 2-a) En utilisant les résultats précédents, montrer que 2969 divise n

0.5 b) Montrer que : $n^8 + m^8 \equiv 0\ [2969] \iff n \equiv 0\ [2969]$ et $m \equiv 0\ [2969]$

EXERCICE4 : (10 points)

PARTIE I : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x\left(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1\right)$

et on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

0.5 1- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

0.5 2- a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = 4\left(e^{-x} - 1\right)\left(1 - x\right)$

0.75 b) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, puis donner son tableau de variations.

0.5 c) Montrer qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $\left]\frac{3}{2}, 2\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$

(On prendra $e^{\frac{3}{2}} = 4,5$)

0.25 d) Vérifier que : $e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}$

0.5 3-a) En appliquant le théorème de ROLLE à la fonction f', montrer qu'il existe un réel x_0 de l'intervalle $]0,1[$ tel que : $f''(x_0) = 0$

0.5 b) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f'', montrer que, pour tout réel x différent de x_0 de l'intervalle $[0,1]$, on a : $\frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$

0.25 c) En déduire que $I(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe (C)

0.5 4-a) Etudier les branches infinies de la courbe (C)

0.5 b) Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

(On prendra : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$, $f(1)=-0.5$ et il n'est pas demandé de représenter le point I)

0.25 5-a) Vérifier que : $(\forall x\in]-\infty,\alpha])$; $f(x)\leq 0$

0.75 b) Montrer que : $\int_0^{\alpha} f(x)dx=\frac{2}{3}\alpha\left(\alpha^2-3\right)$, en déduire que : $\frac{3}{2}<\alpha\leq\sqrt{3}$

0.5 c) Calculer en fonction de α , en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $y=0$, $x=0$ et $x=\alpha$

PARTIE II : On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0<\alpha \quad \text{et} \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \quad ; \quad u_{n+1}=f(u_n)+u_n$$

0.5 1-a) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n<\alpha$ (utiliser la question 5-a) de la PARTIE I)

0.25 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2- On suppose que $0\leq u_0$ et on pose $(\forall x\in\mathbb{R})$; $g(x)=e^{-x}+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$

0.5 a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $g(x)>0$ (On prendra $\ln 2=0.69$)

0.5 b) En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $0\leq u_n$

(On remarque que : $f(x)+x=xg(x)$)

0.25 c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

0.5 d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3- On suppose que $u_0<0$

0.5 a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_{n+1}-u_n\leq f(u_0)$

0.5 b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n\leq u_0+nf(u_0)$

0.25 c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

FIN

Correction proposée :
examen national 2.SM - 2019

Ex1 (structure algébrique).

on définie sur $\mathbb{C}$ la loi de composition interne * par : $x, y, a, b \in \mathbb{R}$.

$(x+iy)*(a+ib) = xa + i(x^2b + a^2y)$

[1]

[1-a] : Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ tq : $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$
$z' = a+ib$, $a, b \in \mathbb{R}$

on a :
$z*z' = xa + i(x^2b + a^2y)$
$= ax + i(ya^2 + bx^2)$
$= z'*z$

$\boxed{\text{c/c : la loi * est commutative sur } \mathbb{C}}$

[1-b] Soit $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ tq : $z = x+iy$
$z' = a+ib$
$z'' = m+in$

tq : $x, y, a, b, m, n \in \mathbb{R}$.

il suffit de calculer $z*z'$ et $z'*z''$ on vérifier que :

$(z*z')*z'' = z*(z'*z'')$

c/c : $\boxed{\text{la loi * est associative sur } \mathbb{C}}$

1-c :
comme * est commutative.
il suffit de résoudre équation $z*e = z$ d'inconnue $\boxed{e = a+ib}$
et $\forall z \in \mathbb{C}$.

Soit : $z * \mathbb{C}^*$ tq : $z = x+iy$

$z*e = z \iff xa + i(x^2b + a^2y) = x+iy$
$\iff xa = x,\ x^2b + a^2y = y$
$\iff a = 1\ ;\ x^2b = 0$
$\iff a = 1\ ,\ b = 0$
$\iff \boxed{e = 1}$

pour $z = 0$ on a : $0 \times 1 = 0$

$\boxed{\text{d'où : * admet } \boxed{e = 1} \text{ comme l'élément neutre.}}$

[d] : Soit : $z = x+iy$ avec : $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$
$z' = a+ib$ $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

on a : $z*z' = e = 1$

$\iff xa = 1$ et $x^2b + a^2y = 0$

$\iff a = 1/x$ et $b = \frac{-y}{x^4}$

comme : * commutative

$\boxed{\text{alors : le symétrie de } z \text{ est } z' \text{ avec : } z' = 1/x - i\, y/x^4}$

[2] $E = \{x+iy \,/\, x>0,\ y \in \mathbb{R}\}$

[a]

Soit $z, z' \in E$, $z = x+iy$, $x>0$
$z' = a+ib$, $a>0$

on a :
$z*z' = xa + i(x^2b + a^2y) \in E$

car : $x, a > 0 \Rightarrow x.a > 0$

$\boxed{\text{c/c : E est stable par *}}$

[2-b]

on a : • * est associative
• toute élément de E est symétrisable de sy $z' = \frac{1}{x} - i\frac{y}{x^4}$
(car : $x>0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$).
• * est commutative

$\boxed{\text{alors : } (E,*) \text{ est un groupe abélien}}$

[3] : $G = \{1 + iy \,/\, y \in \mathbb{R}\}$.

on a : $G \subset E$ car : $1>0$

Soit : $z, z' \in G$ tq : $z = 1+iy$
$z' = 1+ib$

on a $z * \mathrm{Sym}(z') = z*(1 - ib)$
$= 1 + i(-b+y) \in G$

d'où $\boxed{G \text{ est un sous grp de } (E,*)}$

1

$\boxed{2}$. $F = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, x>0, y \in \mathbb{R} \right\}$

$\boxed{a}$ Soit : $M(x,y), M(a,b) \in F$ on a :

$$M(x,y) \times M(a,b) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xa & xb+ya \\ 0 & xa \end{pmatrix} \in F$$

car : $xa > 0$ et $xb+ya \in \mathbb{R}$

de même, $M(a,b) \times M(x,y) = \begin{pmatrix} xa & xb+ya \\ 0 & xa \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{d'où : } F \text{ est stable par } \times \text{ dans } M_2(\mathbb{R})}$

$\boxed{b}$: $\varphi : E \longrightarrow F$

$x+iy \longrightarrow M(x^2, y)$

Soit : $z = x+iy$, $z' = a+ib \in E$

On a :

$$\varphi(z * z') = M((xa)^2, x^2b + a^2y)$$

et on a :

$$\varphi(z) \times \varphi(z') = M(x^2, y) \times M(a^2, b) \in F$$

$$= \begin{pmatrix} (xa)^2 & x^2b+a^2y \\ 0 & (xa)^2 \end{pmatrix} \text{(question a)}$$

$$= M((xa)^2, x^2b + a^2y)$$

d'où :

$$\boxed{\varphi(z * z') = \varphi(z) \times \varphi(z')} \ (i)$$

Soit : $M(a,b) \in F$, $a>0, b \in \mathbb{R}$.

$z \in E$

$$\varphi(z) = M(a,b) \Leftrightarrow M(x^2, y) = M(a,b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2 & y \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$(a > x > 0) \Leftrightarrow x = \sqrt{a}, \ y = b$

alors :

$\boxed{\varphi \text{ est bij de } E \longrightarrow F} \ (ii)$

$\boxed{(i), (ii) \Rightarrow \varphi \text{ est un isomorphisme de } (E,*) \text{ vers } (F,\times)}$

$\boxed{c}$: comme.

- $(E,*)$ est un grp commutatif
- $\varphi : (E,*) \to (F,\times)$ est un iso

alors :

$\boxed{(F,\times) \text{ est un groupe commutatif}}$

Fin structure.

Exercice II : les nombres complexes.

Soit $m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

$$(E) : z^2 - (1+i)(m+1)z + 2im = 0$$

$\boxed{1-a}$. $\Delta = (1+i)^2(m+1)^2 - 8im$

$\boxed{(1+i)^2 = 2i}$

$$= (1+i)^2\left[(m+1)^2 - 4m\right]$$

$$\boxed{= (1+i)^2(m-1)^2}$$

si $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 1$ or $m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

Absurde.

d'où : $\boxed{\Delta \neq 0, \ \forall m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}$

$\boxed{1-b}$ Comme : $\Delta = (m-1)^2(1+i)^2$

d'où : $z_1 = \dfrac{(m+1)(1+i) + (m-1)(1+i)}{2} = m \times (1+i)$

$$z_2 = \frac{(m+1)(1+i) - (m-1)(1+i)}{2} = 1+i$$

$\boxed{\text{d'où : les solutions de } (E) \text{ sont. } z_1 = (1+i) \cdot m, \ z_2 = 1+i}$

$\boxed{2}$. Soit $m = e^{i\theta}$ avec : $0 < \theta < \pi$

2-a : comme z_1, z_2 sont les sol. de (E)

d'où : $(E) \iff (z - z_1)(z - z_2) = 0$

$$\iff z^2 - z(z_1+z_2) + z_1 z_2 = 0$$

$$\boxed{\text{alors : } \begin{cases} z_1+z_2 = (1+i)(1+m) \\ z_1 \cdot z_2 = -2im \end{cases} \quad (*)}$$

on a : $1+e^{i\alpha} = e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{-i\frac{\alpha}{2}} + e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)$

$$= 2.e^{i\frac{\alpha}{2}}.\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

(d'après la formule d'Euler).

alors :

$$z_1+z_2 = \left(1+e^{i\frac{\pi}{2}}\right).\left(1+e^{i\theta}\right)$$

$$= 4.e^{i\frac{\pi}{4}}.e^{i\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\sqrt{2}.e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\cos\frac{\theta}{2}$$

comme : $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} > 0$

d'où : $z_1+z_2 = 2\sqrt{2}.\cos\frac{\theta}{2}.\ e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$

conclusion :

$$\boxed{\begin{aligned} |z_1+z_2| &= 2\sqrt{2}.\cos\frac{\theta}{2} \\ \arg(z_1+z_2) &\equiv \frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\ [2\pi] \end{aligned}}$$

$\boxed{2-b}$:

$z_1 z_2 = -2im$. (d'après $*$).

si $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow -2im \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow m \in i\mathbb{R}$

d'où : $\exists\, x \in \mathbb{R}$ tq : $\boxed{m = ix}$

$m = e^{i\theta} \Rightarrow |m| = 1 = |x| \Rightarrow x = \pm 1$

or : $\theta \in \,]0,\pi[$ d'où : $x > 0$

conclusion : $z_1 z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow m = i$

$$\boxed{\text{d'où : } z_1+z_2 = (1+i)^2 = 2i}$$

$\boxed{\text{II}}$:

on a : $\Omega(\omega)$ est le milieu du $[CD]$

d'où : $\omega = \frac{c+d}{2}$

or : $D(d)$ est l'image du $B(b)$ par rotation de centre $O(0)$ et d'angle $\theta = \pi/2$

d'où : $d - z_0 = e^{i\theta}(b - z_0)$

$\iff d = ib = i(1+i)\times m$

$\iff \boxed{d = (i-1)\cdot m}$

d'où : $\omega = \frac{c+d}{2} = \frac{(1-i)+(i-1)m}{2}$

donc : $\boxed{\omega = \frac{(1-i)(1-m)}{2}}$

$\boxed{1-b}$: $\frac{b-a}{\omega} = \frac{(1+i).m-(1+i)}{(1-i)(1-m)}\times 2$

$$= \frac{(1+i)(m-1)}{(1-i)(1-m)}\times 2 \qquad \boxed{m \neq 1 \text{ car } m \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}$$

$$= \frac{1+i}{i-1}\times 2$$

$$= \frac{(1+i)(1+i)}{-\cancel{2}}\times\cancel{2} = -(1+i)^2$$

$$\boxed{\frac{b-a}{\omega - z_0} = -2i}, \quad z_0 = 0$$

$\boxed{1-c}$: $\frac{b-a}{\omega - z_0} = -2i \Rightarrow \begin{cases} \left(\overrightarrow{O\Omega}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ AB = 2.O\Omega \end{cases}$

$$\boxed{\text{alors : } (O\Omega) \perp (AB) \text{ et } AB = 2\,O\Omega}$$

(3

II-2: $(O\Omega)\cap(AB)=\{H(h)\}$.

2-a: ona: $H\in(AB)$ d'où:

les pts A, B, H sont des pts droits. (Alignés), d'où $\arg\left(\frac{z_H-z_A}{z_B-z_A}\right)\equiv\pi[\pi]$

$\arg\left(\frac{z_H-z_A}{z_B-z_A}\right)=(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AB})\equiv\pi[2\pi]$

d'où: $\boxed{\frac{h-a}{b-a}\in\mathbb{R}}$ $(e^{i\pi}=-1)$

ona: $(OH)\perp(AB)$

d'où: $\arg\left(\frac{z_H-z_O}{z_B-z_A}\right)\equiv\frac{\pi}{2}(\pi)$.

alors: $\boxed{\frac{h}{b-a}\in i\mathbb{R}}$ $(e^{i\frac{\pi}{2}}=i)$

b) $\frac{h-a}{b-a}\in\mathbb{R}\Rightarrow\exists x\in\mathbb{R}:\frac{h-a}{b-a}=x$

$\frac{h}{b-a}\in i\mathbb{R}\Rightarrow\exists y\in\mathbb{R}:\frac{h}{b-a}=iy$

$\frac{h-a}{b-a}=x\iff\frac{h}{b-a}=x+\frac{a}{b-a}$

$\iff\boxed{iy=x+\frac{1}{m-1}}$

d'où:

$$\begin{cases} iy=x+\frac{1}{m-1}\\ -iy=x+\frac{1}{\bar{m}-1}\end{cases}$$

$\Rightarrow 2iy=\frac{1}{m-1}-\frac{1}{\bar{m}-1}$

$iy=\frac{\bar{m}-m}{2(m-1)(\bar{m}-1)}$

d'où: $h=(b-a)\cdot iy$

$$\boxed{h=\frac{(1+i)}{2}\cdot\frac{\bar{m}-m}{\bar{m}-1}}$$

Rq: $m,\bar{m}$ sont $\neq 1$ car $m\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

Conclusion

$$\boxed{h=\frac{1+i}{2}\cdot\frac{\bar{m}-m}{\bar{m}-1}}$$

Fin complexe.

Exercice III: Arith.

on admet que: 2969 est premier

1: on suppose que: $2969\nmid n$.

comme: 2969 est premier. $\}$ $2969\nmid n$.

alors: $2969\wedge n=1$

d'après: le Théorème de Bezout.

$\exists(u,v)\in\mathbb{Z}^2: 2969v+n.u=1$

$\iff\boxed{nu\equiv 1[2969]}$

1-b: ona: $n^8+m^8\equiv 0[2969]$

d'où: $(u.m)^8\equiv-(n.u)^8[2969]$

on: $(n.u)^8\equiv 1[2969]$

d'où: $\boxed{(u.m)^8\equiv -1[2969]}$

alors: $(u.m)^{8\times 371}\equiv(-1)^{371}[2969]$

c/c: $\boxed{(u.m)^{2968}\equiv -1[2969]}$

car: $2968=8\times 371$

1-c :

on a : $(u.m)^{2968} \equiv -1 \ [2969]$

d'où : $\exists k \in \mathbb{Z} : (u.m)^{2968} = -1 + 2969k$

$\iff \exists u', v' \in \mathbb{Z} : (um)u' + 2969.v' = 1$

$(u' = -(u.m)^{2967}$ et $v' = k)$.

d'après : le Théorème de Bezout

on a : $2969 \wedge u.m = 1$

d'où $\boxed{2969 \nmid u.m}$.

1-d : $\begin{cases} 2969 \wedge u.m = 1 \\ 2969 \text{ premier} \end{cases}$

d'après : le Théorème de Fermat, on a

$(u.m)^{2969-1} \equiv 1 \ [2969]$

d'où $\boxed{(u.m)^{2968} \equiv 1 \ [2969]}$

2-a : on a :

$\begin{cases} (u.m)^{2968} \equiv -1 \ [2969] . \ (1\text{-}b) \\ (u.m)^{2968} \equiv 1 \ [2969] . \ (1\text{-}d) \end{cases}$

Absurde.

d'où : l'hypothèse dans la question 1 est fausse.

$\boxed{\text{alors : } 2969 \mid n}$

2-b :

$\boxed{\Leftarrow}$: $\begin{cases} n \equiv 0 \ [2969] \\ m \equiv 0 \ [2969] \end{cases}$

$\Rightarrow n^8 + m^8 \equiv [2969]$.

$\boxed{\Rightarrow}$: on a : $2969 \mid n$

d'où : $n \equiv 0 \ [2969]$

~~d'où n^8 ≡ 0 [2969]~~

~~n^8~~

Comme dans l'égalité :

$n^8 + m^8 \equiv 0 \ [2969]$

m, n jouent des rôles symétriques

alors : si on suppose que

$2969 \nmid m$.

on utilisant la même démarche de la question 1, on va trouver l'Absurde, $(1 = -1)$

conclusion : $2969 \mid m$

d'où :

$\boxed{n^8 + m^8 \equiv 0 \ [2969] \iff n \equiv 0 \ [2969] \text{ et } m \equiv 0 \ [2969]}$

CQFD.

Proposés par : SAÏD IBNJAA

Xymath

Partie Analyse :

Exercice 4 : (10pts) :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 4x.\left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1\right)$

$\boxed{1}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 4x\left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1\right)$

d'où $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty}$ car : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} 4.\frac{x}{e^{x}}\left(1 + \frac{xe^{x}}{2} - e^{x}\right)$

$\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$ car : $\lim\limits_{-\infty} e^{x} = 0$

car : $\lim\limits_{-\infty} xe^{x} = 0$ et $\lim\limits_{-\infty} \frac{x}{e^{x}} = -\infty$

2-a : la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de fncts dérivables sur $\mathbb{R}$

Et on a ; $\forall x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 4\left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1\right) + 4x\left(-e^{-x} + \frac{1}{2}\right)$

$= 4\left(e^{-x} - xe^{-x} + x - 1\right)$

$\boxed{f'(x) = 4(x-1)(1-e^{-x})}$

$\boxed{2-b}$: Soit $x \in \mathbb{R}$

on a : $f'(x) = 4(e^{-x} - 1)(1 - x)$.

Si $x < 0$; on a : $\begin{cases} e^{-x} > 1. \\ 1 - x > 0 \end{cases}$

d'où : $\forall x < 0,\ f'(x) > 0$.

Si $x > 0$, on a : $e^{-x} < 1$.

$x \to 1 - x$ change le signe en $x = 1$

d'où : $\forall x \in [0;1] : f'(x) \leq 0$

$\forall x \in [1;+\infty[: f'(x) \geq 0$

conclusion :

f str croissante sur $]-\infty, 0]$ et $[1;+\infty[$

f str décroissante sur $[0,1]$

et on a : le Tableau de variation

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{2-c}$

on a : f continue, strictement croissante sur $]3/2, 2[$.

alors, f est bijection de $]3/2, 2[$ vers.

$f(]3/2; 2[) =]6\times\left(e^{-3/2} + \frac{3}{4} - 1\right); 8\left(e^{-2}\right)[$.

comme. $e^{3/2} \simeq 4,5. > 4$

d'où : $6\left(\frac{1}{e^{3/2}} - \frac{1}{4}\right). < 0$

alors : $0 \in]f(3/2), f(2)[$.

d'où : 0 admet un seul antécédent on le note $\alpha \in]3/2, 2[$

c/c : $\boxed{\exists!\ \alpha \in]3/2, 2[: f(\alpha) = 0}$

$\boxed{2-d}$ $f(\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow 4\alpha\left(e^{-\alpha} + \frac{\alpha}{2} - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}$

$\Leftrightarrow \boxed{e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}}$ car : $\alpha > \frac{3}{2}$

3-a :

on a : f' continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ (produit de fct)

et $f'(0) = f'(1) = 0$

alors : d'après le Théorème de ROLL

$$\boxed{\exists x_0 \in]0,1[: f''(x_0) = 0}$$

3-b : Soit $x \neq x_0 \in [0,1]$

on a : f'' est continue, dérivable sur l'intervalle I d'extrémité x et x_0

d'après : T.A.F

$\exists c \in I$ tq : $f^{(3)}(c) = \dfrac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0}$

$= \dfrac{f''(x) - 0}{x - x_0}$

On : $f^{(3)}(x) = (3-x)e^{-x}$ (calcule)

d'où : $f^{(3)}(c) = (3-c)e^{-c} > 0$

car c dans l'intervalle I d'ext x et x_0, $I \subset [0,1]$.

$$\boxed{\text{Conclusion : } \forall x \in [0,1],\ x \neq x_0 ;\ \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0}$$

3-c :

on a : $\begin{cases} f''(x_0) = 0 \\ \dfrac{f''(x)}{x - x_0} > 0 \end{cases}$

d'où : f'' s'annulle en $x = x_0$ avec changement de signe

alors : $I(x_0, f(x_0))$ est un pt d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$

4-a les branches infinies

on a : • $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$

• $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$.

$D_f = \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} e^{-x} + \dfrac{x}{2} - 1$

$= +\infty$ car : $\lim\limits_{+\infty} e^{-x} = 0$

alors : $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction (oy), au voisinage de $+\infty$

$\lim\limits_{-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{-\infty} e^{-x} + \dfrac{x}{2} - 1$

$= \cancel{\infty}$ ~~cas~~ $\lim\limits_{-\infty} e^{-x}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x}\left(1 + \dfrac{x e^{x}}{2} - e^{x}\right)$

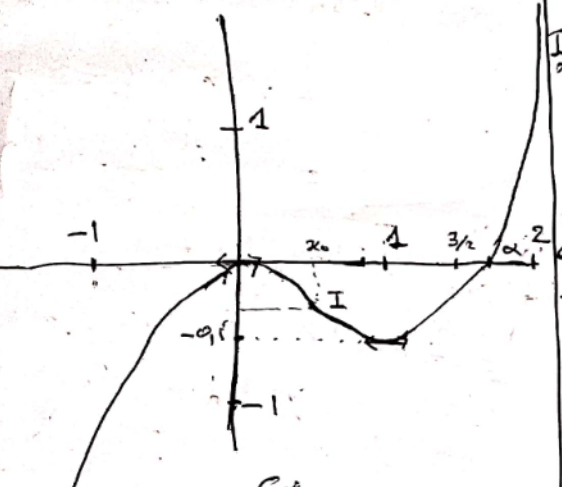
$= +\infty$

car, $\lim\limits_{-\infty} e^{x} = 0$, $\lim\limits_{-\infty} x e^{x} = 0$

d'où :

$(\mathcal{C}_f)$ admet 1 branche parabolique de direction (oy) au vois de $\pm\infty$

4-b : représentation graphique.



— C_f

- $f(0) = f(\alpha) = 0$, $\alpha \in]\frac{3}{2}, 2[$
- $f'(0) = f'(1) = 0$, $f(1) = -\frac{1}{2}$

5-a :

d'après le Tableau de variation on a

- $\forall x \in]-\infty, 0] : f(x) \leq 0.$
- $\forall x \in [0, \alpha[: f(x) \leq 0$

$\boxed{\text{d'où } \forall x \in]-\alpha, \alpha] : f(x) \leq 0}$

5-b :

$$I_\alpha = \int_0^\alpha f(x)\,dx = \int_0^\alpha 4x\left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1\right) dx$$

$$= \int_0^\alpha 4xe^{-x} + 2x^2 - 4x \, dx$$

on a :

$$\int_0^\alpha 4xe^{-x}\,dx = \left[4xe^{-x}\right]_\alpha^0 + \int_0^\alpha 4e^{-x}$$

$$= -4\alpha e^{-\alpha} + \left[4 \cdot e^{-x}\right]_\alpha^0$$

$$= 4 - 4\alpha e^{-\alpha} - 4e^{-\alpha}$$

$$= 4 - 4e^{-\alpha}(\alpha+1)$$

d'où :

$$I_\alpha = \int_0^\alpha f(x)\,dx$$

$$= 4 - 4e^{-\alpha}(\alpha+1) + 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\alpha - 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\alpha$$

$$= 4 - 4e^{-\alpha}(\alpha+1) + \frac{2}{3}\alpha^3 - 2\alpha^2$$

On : $e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}(2 - \alpha)$,

conclusion : (calcule)

$$\boxed{I_\alpha = \int_0^\alpha f(x)\,dx = \frac{2}{3}\alpha(\alpha^2 - 3)}$$

déduction :

comme : $\forall x \in [0, \alpha] : f(x) \leq 0$

d'où $\int_0^\alpha f(x)\,dx \leq 0$

$\Longleftrightarrow \frac{2}{3}\alpha(\alpha^2 - 3) \leq 0$

$\Longleftrightarrow \alpha^2 < 3$

$\Longleftrightarrow |\alpha| < \sqrt{3}$

on : $\alpha > 2$

$\boxed{\text{d'où : } \alpha \in]2, \sqrt{3}[}$

5-d

$l'\text{aire} = \int_0^\alpha |f(x)|\,dx$ u.a

$= -\int_0^\alpha f(x)\,dx$. u.a

$\boxed{l'\text{aire} = \frac{2}{3}\alpha(3 - \alpha^2) \cdot cm^2}$

Partie II : on définit

$u_{n+1} = f(u_n) + u_n$, $u_0 < \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$

1-a :

pour $n=0$, $u_0<\alpha$.

Supposons que : $u_n<\alpha$, Montrons que $u_{n+1}<\alpha$

Soit $n\in\mathbb{N}$.

On a : $u_{n+1} = f(u_n)+u_n$.

$u_n<\alpha \Rightarrow f(u_n)\le 0$ (I-5-a) (H.R)

$\Rightarrow f(u_n)+u_n \le u_n \le \alpha$

$\Rightarrow f(u_n)+u_n\le\alpha$

$\Rightarrow u_{n+1}\le\alpha$ CQFD

$\boxed{c/c : \forall n\in\mathbb{N} : u_n\le\alpha}$

1-b :

On a : $u_{n+1}-u_n = f(u_n)$

Or : $\forall n\in\mathbb{N}: u_n\le\alpha$.

d'après : I-5-a : $f(u_n)\le 0$

conclusion : $u_{n+1}-u_n\le 0$

$\boxed{c/c : (u_n) \text{ est décroissante}}$

(9)

2-a : Supp que $0<u_0<\alpha$.

$g(x) = e^{-x}+\frac{x}{2}-\frac{3}{4}$.

g est dérivable sur IR, comme somme de fct dérivables

alors : $g'(x) = -e^{-x}+1/2$

$g'(x)=0 \iff e^{-x}=1/2$

$\iff x=\ln 2>0$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	$g(\ln 2)$	$\nearrow$

On a : $\forall x\in\mathbb{R} : g(x)\ge g(\ln 2)$

Or $g(\ln 2) = e^{-\ln 2}+\frac{\ln 2}{2}-\frac{3}{4}$

$= \frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$

$= \frac{\ln 2}{2}-1/4>0$.

Car $\ln 2 = 0,69 > 1/2$.

Conclusion $\boxed{\forall x\in\mathbb{R} : g(x)>0}$

2-b :

On a : $f(x)+x = 4x(e^{-x}+\frac{x}{2}-1)+x$

$= \cancel{x(4e^{-x}+\frac{4x}{2}-\frac{3}{4})}$

$=4x(e^{-x}+\frac{x}{2}-1+\frac{1}{4})$

$\boxed{f(x)+x = 4\cdot x\, g(x)}$

Rq : dans l'énoncé il y'a 1 faute

$f(x)+x = x\,g(x)$ doit remplacer par : $f(x)+x=4x\,g(x)$ ⚠

c/c : $\boxed{f(x)+x = 4x\,g(x)}$

On a : $u_0\ge 0$.

Pour $n=0$, $u_0\ge0$

Supp que : $u_n\ge0$, Montrons que $u_{n+1}\ge0$

Soit $n\in\mathbb{N}$.

On a : $u_{n+1} = f(u_n)+u_n = 4u_n\, g(u_n)$

comme : $\forall x \in\mathbb{R}$ $g(x)>0$

alors : (H.R) $\Rightarrow u_{n+1}=4u_n\, g(u_n)\ge 0$

d'où : $u_{n+1}\ge 0$

conclusion. $\boxed{\forall n\in\mathbb{N} : u_n\ge 0}$

2-c ;

on a : • $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq 0$

• (u_n) décroissante

alors : (u_n) décroissante, minorée par 0

$\boxed{\text{d'où : } (u_n) \text{ est convergente}}$

2-d

on a : $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$.

$= h(u_n)$

avec : $h(x) = f(x) + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

et on a : $0 \leq u_n \leq u_0 < \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$.

$x \to h(x)$ est continue sur $[0, \alpha]$.

alors : $\lim u_{n+1} = \lim h(u_n)$

$= \lim f(u_n) + u_n$.

$\Leftrightarrow \quad \ell = f(\ell) + \ell$

$\Rightarrow \quad f(\ell) = 0$

or d'après l'étude et la representation de f

on a : $\ell = 0$ ou $\ell = \alpha$

or : $u_n \leq u_0 < \alpha$

$\Rightarrow \lim u_n = \ell \leq u_0 < \alpha$

conclusion ;

$\boxed{\lim u_n = 0}$

3 : on suppose que : $u_0 < 0$

3-a ; on a :

$u_{n+1} - u_n = f(u_n)$.

comme : (u_n) est decroissante

alors : $u_n \leq u_0 < 0$

et f croissante sur $]-\infty, 0]$

d'où : $f(u_n) \leq f(u_0)$

$\boxed{\text{c/c : } u_{n+1} - u_n \leq f(u_0)}$

$\forall n \in \mathbb{N}$

3-b

Pour $n = 0$; $u_0 \leq u_0$

Supp que : $u_n \leq u_0 + n f(u_0)$

Montrons que : $u_{n+1} \leq u_0 + (n+1) f(u_0)$

Soit $n \in \mathbb{N}$

on a : $u_{n+1} \leq u_n + f(u_0) \quad (3\text{-a})$

$\overset{(H.R)}{\leq} u_0 + n f(u_0) + f(u_0)$

$\leq u_0 + (n+1) f(u_0)$

$\boxed{\text{d'où : } \forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq u_0 + n f(u_0)}$

3-c : $u_0 < 0 \Rightarrow f(u_0) < f(0) = 0$

$\Rightarrow f(u_0) < 0$

d'où : $\lim u_0 + n f(u_0) = -\infty$

conclusion

$\boxed{\lim u_n = -\infty}$

Fin

SAID IBN JAA ~~xymaths~~

10/10