: Etude du mouvement d'un pendule élastique

Le pendule élastique étudié est constitué d'un solide (S), de masse m et de centre d'inertie G, attaché à l'extrémité d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable, de longueur à vide ℓ_0

et de raideur K. L'autre extrémité du ressort est fixée à un support fixe au point P.

Le solide peut glisser sans frottement sur une tige (T) inclinée d'un angle α par rapport à la verticale et solidaire au point P (figure2).

On étudie le mouvement du centre d'inertie dans le repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j})$ lié à un référentiel terrestre considéré comme galiléen. On repère la position de à un instant t par l'abscisse x sur l'axe $(O,\vec{i})$.

A l'équilibre, est confondu avec l'origine O du repère $(x_G = 0)$ (figure2).

On prendra : $\pi^2 = 10$.

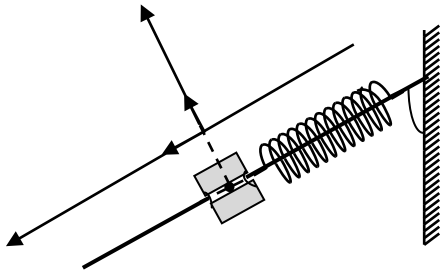

Figure 2

0,25 **1-** Exprimer ℓ_e, la longueur du ressort à l'équilibre, en fonction de , m, K, α et g l'intensité de la pesanteur.

2-On déplace de sa position d'équilibre d'une distance x_m, dans le sens positif, et on le lâche à l'instant de date t=0 sans vitesse initiale.

La courbe de la figure 3 représente la variation de l'accélération a_x du centre d'inertie G en fonction de l'abscisse x avec $-x_m \le x \le x_m$.

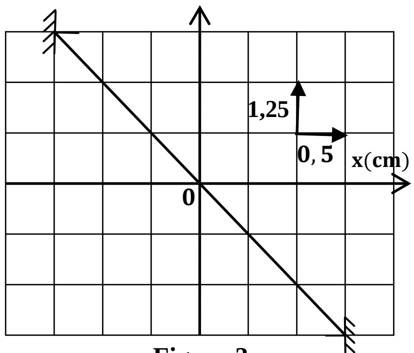

Figure 3

0,5 **2-1-** Etablir, en appliquant la deuxième loi de Newton, l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse $x(t)$.

0,5 **2-2-** La solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right).$$

Trouver l'expression numérique de $x(t)$.

3- On choisit comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur $(E_{pp}(O) = 0)$ le plan horizontal auquel appartient à l'équilibre et comme référence de l'énergie potentielle élastique $(E_{pe}(O) = 0)$ l'état où le ressort est allongé à l'équilibre.

0,5 **3-1-**Trouver, à un instant t, l'expression de l'énergie potentielle $E_p = E_{pp} + E_{pe}$ de l'oscillateur en fonction de x et de K.

0,5 **3-2-** La courbe de la figure 4 représente les variations de l'énergie cinétique de l'oscillateur en fonction de x.
En se basant sur la conservation de l'énergie mécanique, déterminer la valeur de la raideur K. Déduire la valeur de la masse m.

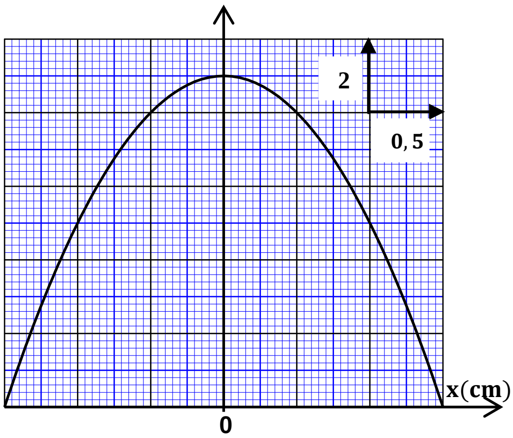

Figure 4