Le barycentre (1 bac)

1 BARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDÉRÉS

1.1. POINT PONDÉRÉ

Définition

Soit A un point du plan et α un nombre réel.

- Le couple $(A;\alpha)$ s'appelle un point pondéré ou massif. Le réel α s'appelle le poids ou la masse d

  On dit aussi que le point A est affecté du coefficient α ou de la masse algébrique α.
- Un système de points pondérés est une collection de points pondérés.

exemples :

1) $(A;5)$; $(B;-2)$; $(C;\sqrt{3})$; $\left(D;\frac{2}{3}\right)$ sont des points pondérés.

2) $\{(A;2);(B;-1)\}$; $\{(A;3);(B;1);(C;-5)\}$ sont des systèmes de points pondérés.

1.2. BARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDÉRÉS

Définition

Soit $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ deux points pondérés du plan tels que : $\alpha+\beta\neq 0$.

Il existe un unique point G vérifiant l'égalité : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

Le point G est appelé le barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$. On dit aussi que G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$.

Exercice :

Soit G le barycentre du système pondéré $\{(A;3);(B;1)\}$
et H le barycentre du système pondéré $\{(A;-3);(B;4)\}$

. Déterminer G et H.

$3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

$3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

$4\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

$\overrightarrow{GA}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

$$\boxed{\{(A,\alpha);(B,\beta)\} \quad \overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}}$$

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3+1}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

$$\{(A;-3);(B;4)\}$$

$$\overrightarrow{AH} = \frac{4}{-3+4}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AH} = 4\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

- Si G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha)\ ;\ (B;\beta)\}$, alors G est le point de la droite (AB) tel que : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG} = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$.

1.3. HOMOGÉNÉITÉ DU BARYCENTRE

Proposition

Si G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha)\ ;\ (B;\beta)\}$, alors G est aussi le barycentre du système pondéré $\{(A;k\alpha)\ ;\ (B;k\beta)\}$ pour tout réel k non nul. En d'autres termes :

le barycentre de deux points pondérés ne change pas si on multiplie ou on divise ses coefficients par un même nombre réel non nul. Cette propriété s'appelle « homogénéité du barycentre »

Exemples

1) Les points $(A;100)$ et $(B;500)$ ont le même barycentre que les points $(A;1)$ et $(B;5)$ car :

$$100\times\frac{1}{100}=1 \quad \text{et} \quad 500\times\frac{1}{100}=5 \ .$$

2) Les points $\left(A;\dfrac{-1}{8}\right)$ et $\left(B;\dfrac{3}{16}\right)$ ont le même barycentre que les points $(A;-2)$ et $(B;3)$ car :

$$16\times\frac{-1}{8}=-2 \quad \text{et} \quad 16\times\frac{3}{16}=3$$

1.5. PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DU BARYCENTRE

Proposition

Soit $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ deux points pondérés du plan tels que $\alpha+\beta\neq 0$.

Le point G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha)\ ;\ (B;\beta)\}$ si, et seulement si, pour tout point M du plan P :

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$$

C'est-à-dire :

$$\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MB}$$

preuve :

G est le barycentre de $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$,

$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \alpha(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA})+\beta(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MB})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{GM}+\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$

1.6. COORDONNÉES DU BARYCENTRE

Proposition

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan.

Si G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ où $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$.

Alors le couple de coordonnées de G est : $G\left(\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta};\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\right)$

Exemples

Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan, on considère les points $A(2;1)$ et $B(7;6)$ et soit G le barycentre du système pondéré $\{(A;3);(B;2)\}$. Le couple de coordonnées du point G est donné par :

$\begin{cases} x_G=\dfrac{3x_A+2x_B}{3+2} \\ y_G=\dfrac{3y_A+2y_B}{3+2}\end{cases}$, ce qui donne : $\begin{cases} x_G=\dfrac{20}{5}=4 \\ y_G=\dfrac{15}{5}=3\end{cases}$. Par suite : $G(4;3)$.

2 BARYCENTRE DE TROIS POINTS PONDÉRÉS

2.1. BARYCENTRE DE TROIS POINTS PONDÉRÉS

Définition

Soit $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$ et $(C;\gamma)$ trois points pondérés du plan tels que : $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

Il existe un unique point G vérifiant l'égalité : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Le point G est appelé le barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$ et $(C;\alpha)$. On dit aussi que G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$.

2.2. HOMOGÉNÉITÉ DU BARYCENTRE

Proposition

Si G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$ alors G est aussi le barycentre du système pondéré $\{(A;k\alpha);(B;k\beta);(C;k\gamma)\}$ pour tout réel k non nul. En d'autres termes : le barycentre de trois points pondérés ne change pas si on multiplie ou on divise ses coefficients par un même nombre réel non nul. Cette propriété s'appelle « homogénéité du barycentre ».

2.3. PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DU BARYCENTRE

Proposition

Soit $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$ et $(C;\gamma)$ trois points pondérés du plan tels que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

Le point G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$ si, et seulement si, pour tout point M du plan P :

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

C'est-à-dire :

$$\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MC}$$

Ce résultat traduit : « la propriété caractéristique du barycentre

Remarques

- En considérant $M=A$, on trouve : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$.

2.4. ASSOCIATIVITÉ DU BARYCENTRE

Proposition

Soit $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$ et $(C;\gamma)$ trois points pondérés du plan tels que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ et $\alpha+\beta\neq 0$.

Si G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$, alors G est aussi le barycentre du système pondéré $\{(H;\alpha+\beta);(C;\gamma)\}$ où H est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$.

En d'autres termes : Le barycentre de trois points pondérés ne change pas si on remplace deux d'entre eux par leur barycentre partiel (s'il existe) affecté de la somme des deux poids.

2.5. COORDONNÉES DU BARYCENTRE

Proposition

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan.

Si G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$ où $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$, alors le couple de coordonnées de G est : $G\left(\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma};\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$