série 1

Ex1 :

pose : $z_1 = 2i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$ et $z_3 = \sqrt{2}(1+i)$

1) a) Écrire les nombres complexes z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

b) Vérifier que : $z_1^{12} = z_2^{12}$.

2) a) Écrire le nombre complexe $\frac{z_1}{z_2}$ sous la forme algébrique puis trigonométrique.

b) En déduire : $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.

a) Montrer que le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

b) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$.

EX2

On considère les nombres complexes : $a = 1 - i$,

$$b = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2} \text{ et } c = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

1) a) Montrer que : $\frac{b}{a} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

b) Déterminer un argument du nombre $\frac{b}{a}$ et en déduire un argument du nombre b.

c) Vérifier que : $c = b - a$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c.

a) Montrer que le triangle ABC est isocèle en B.

b) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})$.

Ex3 :

Soit z un nombre complexe différent de i. On pose :

$$z = x + iy \text{ avec } (x;y) \in \mathbb{R}^2$$

Soit le nombre complexe : $Z = \frac{z+2}{z-i}$

1) Montrer que : $\mathrm{Re}(Z) = \frac{x^2+y^2+2x-y}{x^2+(y-1)^2}$

et : $\mathrm{Im}(Z) = \frac{x-2y+2}{x^2+(y-1)^2}$.

2) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que Z est réel.

3) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que Z est imaginaire pur.

4) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que : $|Z| = 1$.

Ex4

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = -2i \quad ; \quad b = -1 + i\sqrt{3} \quad ; \quad c = \sqrt{3} + i$$

1) a) Vérifier que le point O est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

b) Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

Déterminer l'affixe g du point G.

2) Soit H le point d'affixe : $h = (\sqrt{3}-1)(1+i)$

a) Calculer $\arg\left(\frac{c-b}{h-a}\right)$ et $\arg\left(\frac{c-a}{h-b}\right)$.

b) En déduire que H est l'orthocentre de ABC.

3) Montrer que les points O, G et H sont alignés.

Ex5

1) Calculer les parties réelle et imaginaire des nombres complexes suivants :

$z_1=(3+2i)^2(2-i)$; $z_2=(3+i)(2-3i)(4+5i)$; $z_3=(1+i)^{10}$; $z_4=(2-$

$z_5=(4-i)^3+(1+5i)(2+3i)^3$; $z_6=\dfrac{(3+2i)(1+i)}{1-i}$; $z_7=\dfrac{(5-i)(2-3i)}{(1+i)(1-2i)}$

2) Soit les nombres complexes suivants : $z=1+i$; $z'=1+i\sqrt{3}$; $z''=z.z'$.

Déterminer le module et un argument des nombres complexes z , z' et z''.

En déduire les valeurs exactes de : $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

3) Calculer le module et un argument de chacun des nombres suivants : $\left(\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\right.$ et $n\in\mathbb{N}$)

a) $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$; b) $1+i\tan\theta$; c) $(1+i)^n$; d) $1+\cos\theta+i\sin\theta$

4) Mettre les nombres suivants sous forme algébrique : $A=\left(1+i\sqrt{3}\right)^9$ et $B=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{125}$

Ex6

0.75	1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2-\sqrt{2}z+1=0$
	2) On pose $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$
0.75	a) Ecrire a sous forme trigonométrique et en déduire que a^{2020} est un nombre réel
0.5	b) Soit le nombre complexe $b=\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}$. Prouver que $b^2=a$
	3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives a, b et c tel que $c=1$. La rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{8}$ transforme le point M d'affixe z au point M' d'affixe z'.
0.25	a) Vérifier que $z'=bz$
0.5	b) Déterminer l'image de C par la rotation R et montrer que A est l'image de B par R.
0.75	4) a) Montrer que $\lvert a-b\rvert=\lvert b-c\rvert$ et en déduire la nature du triangle ABC
0.5	b) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BC})$
	5) Soit T la translation de vecteur $\vec{u}$ et D l'image de A par T
0.25	a) Vérifier que l'affixe de D est b^2+1
0.75	b) Montrer que $\dfrac{b^2+1}{b}=b+\overline{b}$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés

Ex7

0.75 1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B C et D d'affixes respectives $a = 1 - i\sqrt{3}$, $b = 2 + 2i$, $c = \sqrt{3} + i$ et $d = -2 + 2\sqrt{3}$

0.5 a) Vérifier que $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$

0.25 b) En déduire que les points A , C et D sont alignés .

3) On considère z l'affixe d'un point M et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{-\pi}{3}$

0.5 Vérifier que $z' = \dfrac{1}{2}az$

4) Soient H l'image du point B par la rotation R , h son affixe et P le point d'affixe p tel que $p = a - c$

0.5 a) Vérifier que $h = ip$

0.5 b) Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O

Ex8

0.75 1) a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - 3z + 3 = 0$

0.5 b) On pose $a = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, écrire a sous forme trigonométrique .

0.5 2) On considère le nombre complexe $b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$, vérifier que $b^2 = i$

0.5 3) On pose $h = \cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}$, montrer que $h^4 + 1 = a$

4) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point B d'affixe b et R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

0.5 a) Soit c l'affixe du point C image du point B par la rotation R . Montrer que $c = ib$

0.25 b) En déduire la nature du triangle OBC

Ex9

0.75 1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $2z^2+2z+5=0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

0.25 a) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $d=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

0.5 b) On considère le point A d'affixe $a=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ et le point B image du point A par la rotation R. Soit b l'affixe du point B, montrer que $b=d.a$

3) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ et C l'image de B par la translation t et c l'affixe de C

0.75 a) Vérifier que $c=b+a$ et en déduire que $c=a\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ *(on pourra utiliser la question 2)b))*

0.75 b) Déterminer $\arg\left(\frac{c}{a}\right)$ puis en déduire que le triangle OAC est équilatéral .

Ex10

On considère les nombres complexes a et b tels que $a=\sqrt{3}+i$ et $b=\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)i$

0.25 1) a) Vérifier que $b=(1+i)a$

0.5 b) En déduire que $|b|=2\sqrt{2}$ et que $\arg b\equiv\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

0.5 c) Déduire de ce qui précède que $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

On considère les points A et B d'affixes respectives a et b et le point C d'affixe c telle que $c=-1+i\sqrt{3}$

0.75 a) Vérifier que $c=ia$ et en déduire que $OA=OC$ et que $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

0.5 b) Montrer que le point B est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$

0.5 c) En déduire que le quadrilatère $OABC$ est un carré.