wtsp 0617074062

série 3 : les limites et la continuité
2 bac sm

prof : zakaria bouicha

Ajitfham Academy
zakaria bouicha

Ex 1

EXERCICE 65

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et k un réel tel que :

$$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2) : \ |f(x)-f(y)|\leq k|x-y|$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Ex 2 :

EXERCICE 82

Soit f une fonction numérique continue sur $[0;1]$ telle que $f(0)=f(1)$.

Pour tout entier $n\geq 2$, on considère la fonction f_n définie sur $\left[0;1-\frac{1}{n}\right]$ par : $f_n(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)$

1) Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} f_n\left(\frac{k}{n}\right)$.

2) Montrer que : $(\exists x_0\in]0;1[)\ f(x_0)=f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)$

Ex 3 :

EXERCICE 88

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3}-\sqrt[3]{x^2+3}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{1-x^3}-\sqrt[4]{x^4-1}$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt[4]{x-1}-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt{x-1}}$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[4]{x-1}-\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt{x-1}}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x+63}-4}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x+3}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}\times\sqrt[4]{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[15]{x^5}}{2\sqrt[9]{(x-1)^3}-\sqrt[3]{x}}$

Ex 4

EXERCICE 93

Discuter suivant les valeurs des paramètres réels a, b, c et m l'existence et la valeur des limites :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+ax^2+bx+c}+mx\sqrt{x+2}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+mx\right)$$

Ex 5

DEVOIR 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x\text{Arctan}\left(\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right) & \text{si } x\neq0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) Étudier la continuité de f en 0.

2) Étudier la parité de la fonction f.

3)a)- Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}x-\frac{x}{2}\text{Arc}\tan x$$

(On pourra poser $x=\tan\alpha$ avec $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$)

b)- En déduire une expression simple de $f(x)$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

4) On considère dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation suivante :

$$(E) : \ \text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}{x}\right)=\frac{5\pi}{12}$$

a)- Montrer que : $(E)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x}\right)=\frac{5\pi}{12}\sqrt{x}$

b)- En déduire les solutions de l'équation (E).

Ex 6

DEVOIR 9

I) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^-$:

$$f(x)=5-\left(\frac{1}{1+\sqrt{-x}}-1\right)^3$$

1) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^-$.

2) Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

3) En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^-$ sur un intervalle J à déterminer.

4) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

II) On considère la fonction g définie sur l'intervalle

$$I=\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\text{ par : } \quad g(x)=\sqrt[4]{1+\frac{15}{\tan^3 x}}-2$$

Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer puis calculer $g^{-1}(x)$ pour $x\in J$.

EX7

EXERCICE 54

1) Simplifier les expressions suivantes :

$$A=\operatorname{Arctan}2+\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}$$

$$B=\operatorname{Arctan}\left(1-\sqrt{2}\right)-\operatorname{Arctan}\left(1+\sqrt{2}\right)$$

2) Établir les égalités suivantes :

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

$$4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}-\operatorname{Arctan}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$$

3) On pose : $\alpha=2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)-\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right)$

a) Vérifier que $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$

b) Calculer $\tan\alpha$ puis en déduire la valeur de α.

وفقكم
الله لمايحبه
ويرضاه

Zakaria Bouicha

WtSp 06 17 07 40 62

EX8

EXERCICE 51

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}-x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt{x}}$

2) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{5}{2}}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x^3-x}-\sqrt[3]{x^3+2x}}{x}$; 6) $\lim\limits_{\substack{x\to8\\x<8}}\dfrac{(4-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}{x-8}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+x-3}}{5x}$; 8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+x-3}}{x}$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x+2}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x+1}}$; 10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}.\sqrt[12]{x}$

DEVOIR 6

I) On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$(E): x^3+3x-4=0$$

1) Montrer que l'équation (E) admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

2) On pose : $\alpha=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

Établir que α est une solution de (E) puis en déduire que $\alpha=1$.

II) On considère la fonction numérique g définie par :

$$g(x)=\frac{2}{3}.\frac{\operatorname{Arctan}\left(\sqrt[4]{x}-1\right)}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}$$

1) Déterminer D_g, le domaine de définition de g.

2) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

3) Montrer que g admet un prolongement par continuité en 1 qu'on déterminera.

III) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=(x-1)E\left(\dfrac{1}{x-1}\right) & \text{si } x\neq0 \\ f(1)=1 \end{cases}$$

1) Étudier la continuité de f en 1.

2) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$