Concours Commun d'accès en 1ère année ENSAM

Session du 02 Août 2022

Epreuve de : **Mathématiques**	**Durée : 2h15mn**
Importants : 1. Les calculatrices sont strictement interdites. 2. Aucune question n'est permise pendant l'épreuve.	

Partie I : Questions à choix multiples

Pour chaque question qui suit, cocher la bonne réponse dans la partie correspondante de la feuille des réponses

(Une réponse correcte → 2pts, aucune réponse, plus d'une réponse ou une réponse fausse → 0pts)

	Questions
Question 1	Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$. A l'aide d'un encadrement de S_n, choisir la bonne réponse.
Question 2	Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1\ cm$, on considère le point $A(1, -2, -1)$ et la droite (D) d'équation cartésienne $\frac{x-1}{2} = y + 1 = z$. La distance d du point A à la droite (D) est égale à :
Question 3	Pour $z \in \mathbb{C}$, on note par $M(z)$ le point du plan complexe d'affixe z. L'ensemble $A = \{M(z) : (Z - 3i)(\bar{z} + 3i) = 2\}$ **est :**
Question 4	Soit f une fonction dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. La limite $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)f(2x)\cdots f(nx)}{x^n}$ est égale à :
Question 5	Soit $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} - \frac{xe^x}{1+e^x}$. La courbe représentative C_f de f admet en $+\infty$:
Question 6	Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x}{1-e^{\frac{1}{x}}}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$, et soit $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g. **Choisir la bonne réponse.**
Question 7	Soit $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{16}, \ \forall n \geq 0. \end{cases}$ Sachant que la suite $(u_n)_n$ est décroissante, choisir la bonne réponse :
Question 8	Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{-nx} dx$. Choisir la bonne réponse.
Question 9	Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ est :
Question 10	Dans $\mathbb{R}^+$, l'équation $e^{-\sqrt{2}x} - \sqrt{2}\,x + \sqrt{3} = 0$ admet :
Question 11	Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(2021x + 2022) \leq 2021x \leq f(2021x) + 2022$. Choisir la bonne réponse.
Question 12	L'inéquation $\sin(x) + 2\sin(y) + 3 \leq 0$ admet dans $]-\pi, \pi]^2$:
Question 13	Dans $\mathbb{N}^2$, l'équation $x^2 - y^2 - 21 = 0$ admet :
Question 14	Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $a^3 + b^3 + c^3$ est divisible par 3, et soit $S = a + b + c$. Sachant que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le nombre 3 divise $n^3 - n$, choisir la bonne réponse.
Question 15	Le nombre entier naturel $1^{2021} + 2^{2021} + \cdots + 4^{2021}$ est :

Partie II : Questions à réponses précises

Pour chaque question qui suit, écrire la réponse dans la partie correspondante de la feuille des réponses

(Chaque réponse est notée sur 2pts)

	Questions
Question 16	La porte d'un parking est munie d'une serrure à digicode portant les touches : les lettres du mot ENSAM et les chiffres non nuls. La porte s'ouvre lorsqu'on frappe dans l'ordre trois lettres et quatre chiffres qui forment un code. Les chiffres sont nécessairement distincts deux à deux, les lettres non. Quel est le nombre N des codes possibles qui portent exactement deux lettres identiques ?
Question 17	Le tiers d'une population a été vacciné contre une maladie. Au cours d'une épidémie, on constate que 20 % de la population est victime de l'épidémie et que, sur 15 malades, il y a deux personnes vaccinées. Calculer la probabilité P d'avoir une personne victime de la maladie sachant quelle a été vaccinée ?
Question 18	Soit les nombres complexes $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{5}}$, $a = \alpha + \alpha^4$ et $b = \alpha^2 + \alpha^3$. Sachant que α est une racine du polynôme $P(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$, calculer $a + b$ et ab, et en déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.
Question 19	Calculer la limite $\lim_{x \to 0^+} f(x)$; où $f(x) = \frac{e^x - \cos(\sqrt{x})}{x}$.
Question 20	En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2(x)} dx$.
Question 21	Soit f la fonction définie sur $[0, \sqrt{2}]$ par $f(x) = \frac{\ln(x+\sqrt{2})}{\sqrt{x+\sqrt{2}}}$ et soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$. Calculer le volume V du solide engendré par la rotation de C_f autour de l'axe des abscisses.
Question 22	Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectivement $a = -\sqrt{3} + i$ et $b = i\bar{a}$. Soit C l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et soit c l'affixe du point C. Donner la forme trigonométrique du nombre complexe $Z = \frac{b}{c}$ et déduire la nature du triangle OBC.
Question 23	Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(\sqrt{2}, -1, 2)$, $B(3, -\sqrt{3}, 1)$, $C(1, -2, -1)$ et la sphère $\mathcal{S}$ d'équation cartésienne : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z + 1 = 0$. Déterminer l'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et le plan (ABC).
Question 24	On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - 4y' + 4y = (x-2)e^x$. Sachant que la fonction $x \mapsto xe^x$ est une solution de (E), déterminer la solution particulière y_0 de (E) telle sa courbe représentative passe par le point $A(0, -2)$ et ayant une tangente en A parallèle à l'axe des abscisses.
Question 25	On considère un demi-cercle $\mathcal{C}$ de diamètre 2 cm. Déterminer la valeur maximale S_m de la surface d'un rectangle inscrit dans le demi-cercle $\mathcal{C}$.