



<http://istiarto.staff.ugm.ac.id>

AKAR PERSAMAAN

Roots of Equations

Akar Persamaan

2

<http://istiarto.staff.ugm.ac.id>

❑ Acuan

- ❑ Chapra, S.C., Canale R.P., 1990, *Numerical Methods for Engineers*, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Co., New York.
 - Chapter 4 dan 5, hlm. 117-170.

Persamaan Aljabar vs Transendental

❑ Persamaan aljabar (*algebraic equations*)

- ❑ fungsi $y = f(x)$ dinamakan fungsi aljabar apabila fungsi tsb dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$f_n y^n + f_{n-1} y^{n-1} + \dots + f_1 y + f_0 = 0$$

- ❑ f_i adalah polinomial orde i dalam x
- ❑ polinomial merupakan fungsi aljabar yang umumnya dituliskan sbb.

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

- ❑ koefisien a_i adalah konstanta

Persamaan Aljabar vs Transendental

- ❑ Contoh persamaan aljabar

$$f(x) = 1 - 2.37x + 7.5x^2$$

$$f(x) = 5x^2 - x^3 + 7x^6$$

- ❑ Fungsi transendental adalah fungsi yang bukan fungsi aljabar

$$f(x) = e^{-x} - x$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \ln x^2 - 1$$

Akar Persamaan

5

<http://istiarto.staff.ugm.ac.id>

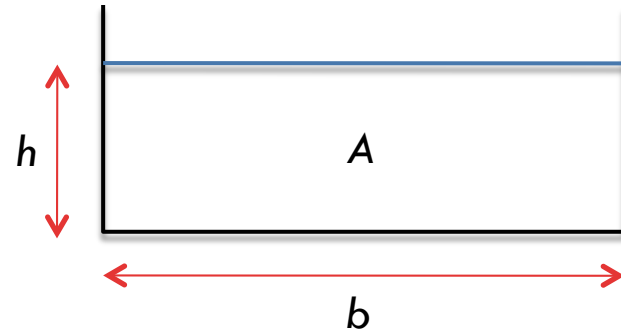
□ Contoh

- Ingin diketahui kedalaman aliran (h) pada saluran bertampang persegi pada suatu debit tertentu (Q)
- Persamaan

$$Q = AV$$

$$A = bh$$

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S_o^{1/2}$$



A: luas tampang aliran = $b h$

R: radius hidraulik = A/P

P: keliling tampang aliran = $b+2h$

n : koefisien kekasaran saluran Manning

S_o : kemiringan memanjang saluran

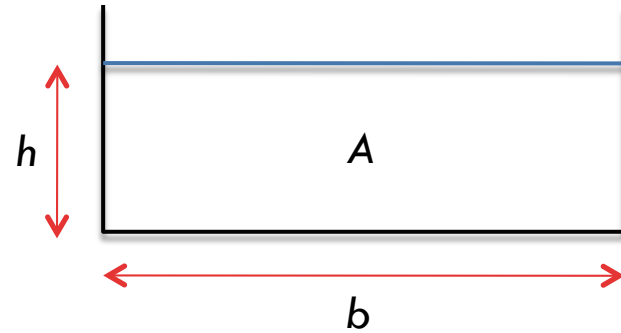
Akar Persamaan

6

<http://istiarto.staff.ugm.ac.id>

❑ Penyelesaian

- ❑ variabel yang sudah diketahui diubah menjadi konstanta (Q , n , S_e)
- ❑ A , R , dan V dituliskan sebagai fungsi h dan konstanta
- ❑ sehingga persamaan dalam h saja



A : luas tampang aliran = $b h$

R : radius hidraulik = A/P

P : keliling tampang aliran = $b+2h$

n : koefisien kekasaran saluran Manning

S_e : kemiringan garis energi

Akar Persamaan

❑ Prosedur

- ❑ Suku-suku persamaan dikelompokkan sehingga sedapat mungkin konstanta dipisahkan dari variabel
- ❑ Jika $Q = 50 \text{ m}^3/\text{s}$, $b = 20 \text{ m}$, $n = 0.03$, dan $S_o = 0.001$
- ❑ Persamaan diselesaikan untuk mendapatkan kedalaman aliran h
- ❑ Bagaimanakah caranya?

$$Q = b h \frac{1}{n} \frac{(b h)^{2/3}}{(b + 2h)^{2/3}} S_o^{1/2}$$

$$Q = \frac{S_o^{1/2}}{n} \frac{(b h)^{5/3}}{(b + 2h)^{2/3}}$$

$$\frac{Q n}{S_o^{1/2}} = \frac{(b h)^{5/3}}{(b + 2h)^{2/3}}$$

$$47.434 = \frac{(20 h)^{5/3}}{(20 + 2h)^{2/3}}$$

Akar Persamaan

- ❑ Metode “coba-dan-ralat” (*trial and error*)
 - ❑ Mencoba suatu nilai $h = h_1$
 - ❑ Mengontrol apakah nilai h tersebut memenuhi persamaan
 - ❑ Jika tidak, mencoba nilai lain $h = h_2$
 - ❑ Dst.
- ❑ Cara tersebut sangat sederhana dan tidak efisien
- ❑ Perlu cara yang lebih sistematis

Akar Persamaan

9

<http://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- ❑ Metode Pendekatan Berurutan
- ❑ Metode Bisection
- ❑ Metode Newton-Raphson
- ❑ Metode Secant

Metode Pendekatan Berurutan

10

<http://istiarto.staff.ugm.ac.id>

❑ Prosedur

- ❑ Bentuk persamaan diubah menjadi $h = f(h)$
- ❑ Dicoba nilai h awal untuk dimasukkan ke dalam fungsi tsb.
- ❑ Nilai h yang diperoleh dimasukkan ke dalam fungsi lagi
- ❑ Langkah kedua dan ketiga tsb diulang-ulang sampai perubahan h kecil

$$47.434 = \frac{(20h)^{5/3}}{(20 + 2h)^{2/3}}$$

$$(20h)^{5/3} = 47.434(20 + 2h)^{2/3}$$

$$h = \frac{1}{20} \left[47.434(20 + 2h)^{2/3} \right]^{3/5}$$

Metode Pendekatan Berurutan

11

<http://istiarto.staff.ugm.ac.id>

$$h = \frac{1}{b} \left[\frac{Qn}{S_o^{1/2}} (20 + 2h)^{2/3} \right]^{3/5}$$

- ❑ Iterasi dilakukan dengan nilai awal $h_0 = 2$ m
- ❑ Metode ini belum tentu berhasil menemukan akar persamaan

iterasi (i)	h_i	h_{i+1}	Δh
0	2	1.805965	-0.19404
1	1.805965	1.794227	-0.01174
2	1.794227	1.793513	-0.00071
3	1.793513	1.79347	-4.3E-05
4	1.79347	1.793467	-2.6E-06
5	1.793467	1.793467	-1.6E-07

Metode Bisection

12

<http://istiarto.staff.ugm.ac.id>

❑ Prosedur

- ❑ Persamaan dibentuk menjadi $f(h) = 0$
- ❑ Dicoba dua h awal (h_0 dan h_1) yang memberikan $f(h)$ berlawanan tanda (+ dan -)
- ❑ Diambil h_2 di tengah-tengah kedua h tsb.
- ❑ Dicari $f(h_2)$
- ❑ Jika kesalahan masih besar, ulangi langkah di atas untuk h_2 dan salah satu dari h sebelumnya yang memberikan $f(h)$ berlawanan tanda
- ❑ Hentikan hitungan jika perubahan h sudah kecil

$$47.434 = \frac{(20h)^{5/3}}{(20+2h)^{2/3}}$$
$$\frac{(20h)^{5/3}}{(20+2h)^{2/3}} - 47.434 = 0$$

Metode Bisection

13

<http://istiarto.staff.ugm.ac.id>

$$\underbrace{\frac{(20h)^{5/3}}{(20+2h)^{2/3}} - \frac{Qn}{S_o^{1/2}}}_{f(h)} = 0$$

□ Nilai awal:

$h_0 = 1$ m dan $h_1 = 2$ m

□ h_{i-1} dan h_i dalam $(h_{i-1} + h_i)/2$ dipilih dari $f(h_{i-1})$ dan $f(h_i)$ yang berbeda tanda (positif dan negatif)

iterasi, i	h_i	$f(h_i)$	$(h_{i-1} + h_i)/2$	Δh
0	1	-28.6654		
1	2	8.794679	1.5	-0.5
2	1.5	-11.6204	1.75	0.25
3	1.75	-1.78829	1.875	0.125
4	1.875	3.414127	1.8125	-0.0625
5	1.8125	0.790084	1.78125	-0.03125
6	1.78125	-0.50489	1.796875	0.015625
7	1.796875	0.141163	1.789063	-0.00781
8	1.789063	-0.18222	1.792969	0.003906
9	1.792969	-0.02062	1.794922	0.001953
10	1.794922	0.060249	1.793945	-0.00098
11	1.793945	0.019809	1.793457	-0.00049
12	1.793457	-0.00041	1.793701	0.000244

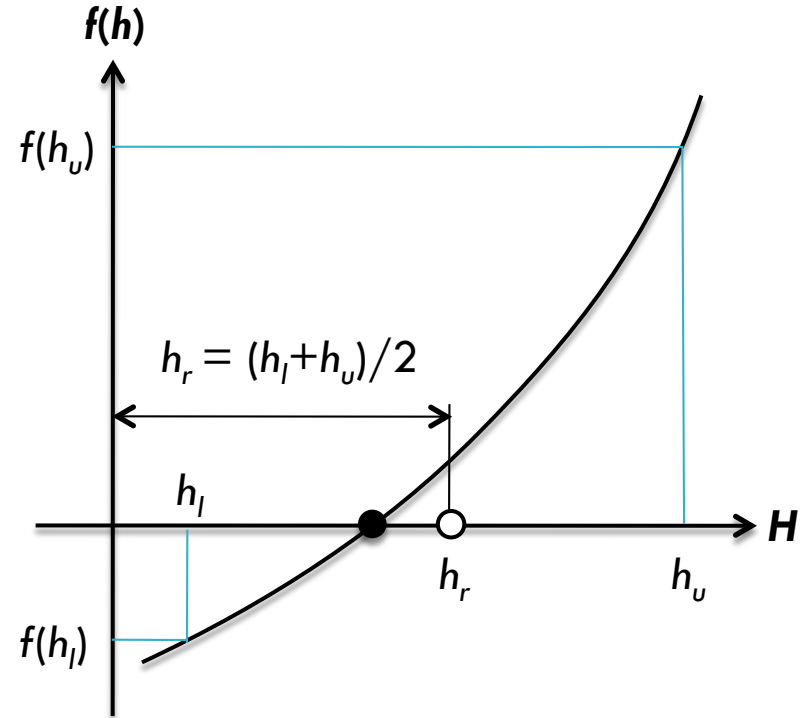
Metode Bisection

14

<http://istiarto.staff.ugm.ac.id>

❑ Kelemahan

- ❑ misal h_l dan h_u masing-masing adalah nilai h yang berurutan sedemikian hingga $f(h_l) \cdot f(h_u) < 0$ dan $h_l < h_u$
- ❑ dalam memilih h baru (h_r) yang merupakan jumlah separuh h_l dan h_u , nilai $f(h_l)$ maupun $f(h_u)$ tidak dipertimbangkan
- ❑ jika $f(h_l)$ lebih dekat ke nol daripada $f(h_u)$, akar persamaan mestinya lebih dekat ke h_l daripada ke h_u



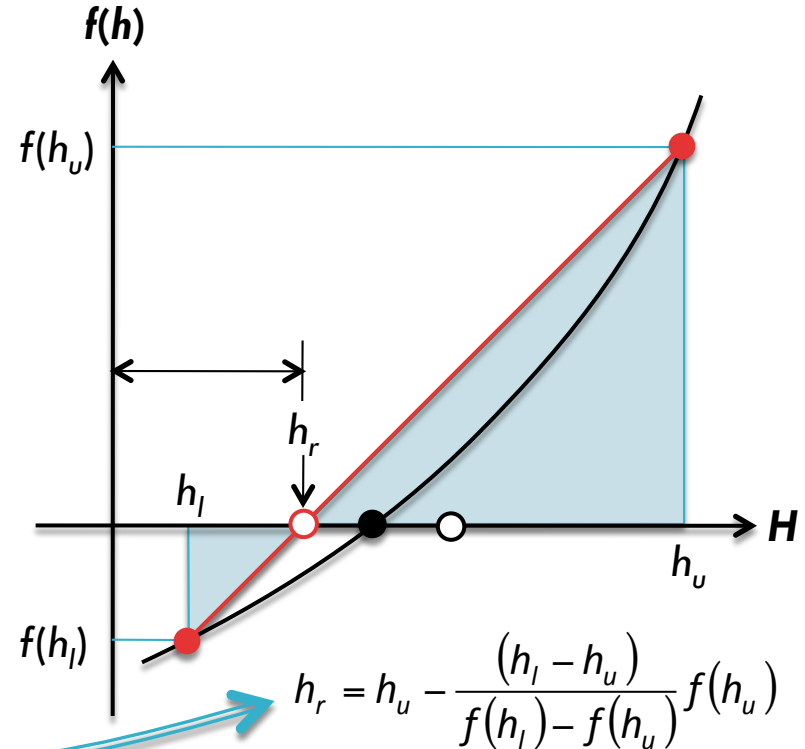
Metode Bisection

15

<http://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- ❑ Metode bisection dapat diperbaiki
 - ❑ pemilihan h_r pada suatu langkah iterasi tidak selalu berada di tengah antara h_l dan h_u namun dengan pemberian bobot
 - ❑ cara perbaikan memanfaatkan metode grafis, yaitu dengan menarik garis lurus antara h_l dan h_u
 - ❑ h_r adalah titik potong garis lurus tsb dengan sumbu H

$$\frac{f(h_l)}{h_r - h_l} = \frac{f(h_u)}{h_r - h_u}$$

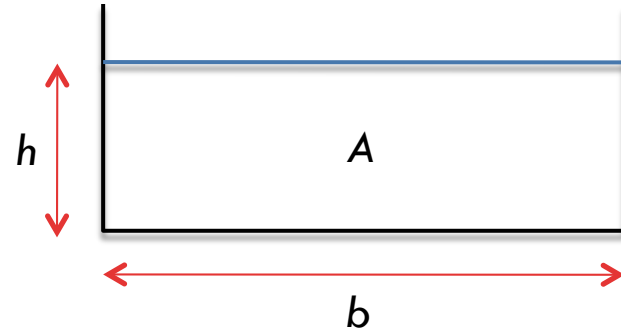


Metode Bisection

16

<http://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- ❑ Metode bisection yang diperbaiki dg cara ini dikenal sbg *the false-position method*
- ❑ PR
 - ❑ Ulangi hitungan metode bisection pada kasus mencari kedalaman aliran di saluran tsb dengan memakai metode bisection yang diperbaiki



A: luas tampang aliran = $b h$

R: radius hidraulik = A/P

P: keliling tampang aliran = $b+2h$

n: koefisien kekasaran saluran Manning

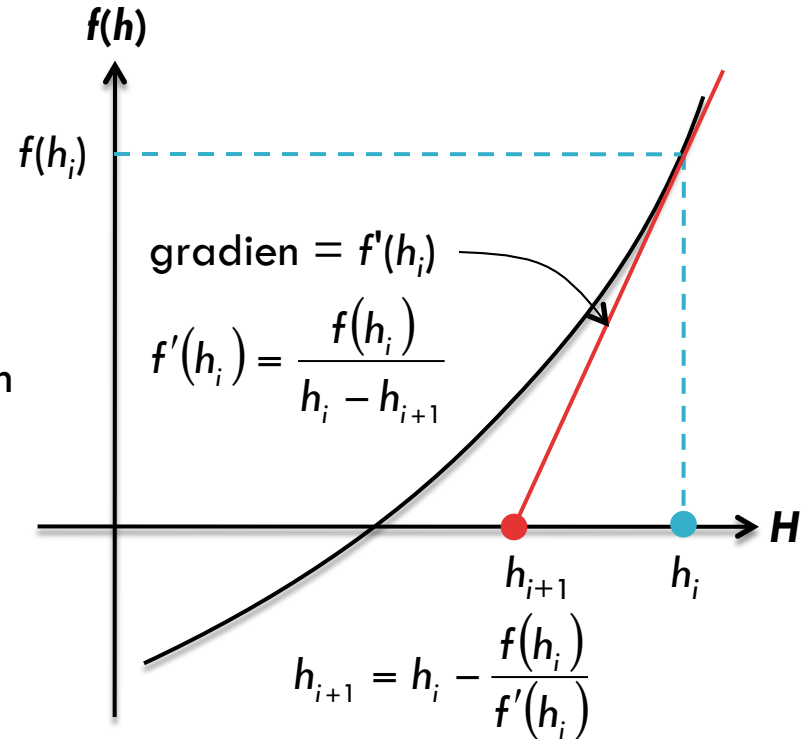
S_o : kemiringan memanjang saluran

Metode Newton-Raphson

17

<http://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- ❑ Jika h_i adalah h awal, maka
 - ❑ perpanjang garis singgung pada kurva melalui titik $[h_i, f(h_i)]$
 - ❑ titik potong garis singgu tsb dengan absis merupakan nilai h_{i+1} sebagai pendekatan akar persamaan yang lebih baik daripada h_i
 - ❑ Kemungkinan ditemui $f(h)$ tidak dapat di-diferensial-kan



Metode Newton-Raphson

18

<http://istiarto.staff.ugm.ac.id>

❑ Prosedur

- ❑ Persamaan dibentuk menjadi $f(h) = 0$
- ❑ Dicari diferensial $f(h)$, yaitu $f'(h)$
- ❑ Dicoba h_i
- ❑ Dicari h_{i+1} dengan persamaan:

$$h_{i+1} = h_i - f(h_i)/f'(h_i)$$

- ❑ Hitungan dihentikan jika perubahan h kecil atau tidak berarti
- ❑ Hitungan mungkin divergen

$$\underbrace{\frac{(20h)^{5/3}}{(20+2h)^{2/3}} - 47.434}_{f(h)} = 0$$

$$f'(h) = \frac{5}{3}(20) \frac{(20h)^{2/3}}{(20+2h)^{2/3}} - \frac{2}{3}(2) \frac{(20h)^{5/3}}{(20+2h)^{5/3}}$$

Metode Newton-Raphson

iterasi, i	h_i	$f(h_i)$	$f'(h_i)$	h_{i+1}	Δh
0	1	-28.6654	30.14372	1.950959	0.950959
1	1.950959	6.663065	43.19649	1.796709	-0.15425
2	1.796709	0.134273	41.4373	1.793468	-0.00324
3	1.793468	6.18E-05	41.39915	1.793467	-1.5E-06
4	1.793467	1.31E-11	41.39913	1.793467	-3.2E-13
5	1.793467	0	41.39913	1.793467	0

Metode Secant

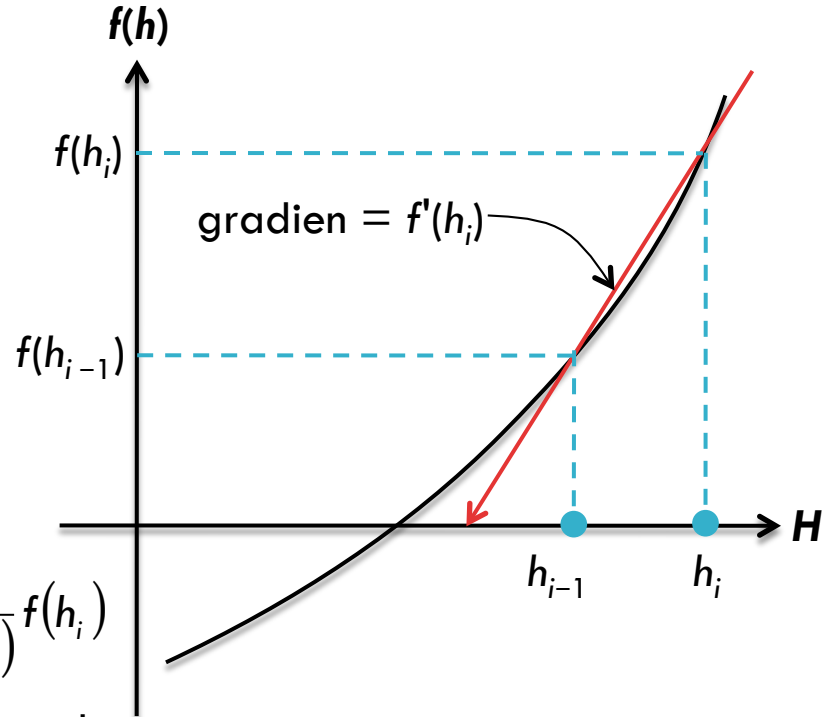
20

<http://istiarto.staff.ugm.ac.id>

- ❑ Kelemahan Metode Newton-Raphson
 - ❑ Kemungkinan $f'(h)$ tidak ada atau sulit diperoleh
- ❑ Metode secant
 - ❑ Gradien, $f'(h)$, dihitung dengan pendekatan, yaitu kemiringan garis yang menghubungkan dua titik

$$f'(h_i) = \frac{f(h_{i-1}) - f(h_i)}{h_{i-1} - h_i} \quad \Rightarrow \quad h_{i+1} = h_i - \frac{h_{i-1} - h_i}{f(h_{i-1}) - f(h_i)} f(h_i)$$

Diperlukan 2 buah h awal



Metode Secant

- Nilai awal:

$$h_0 = 1 \text{ m dan } h_1 = 2 \text{ m}$$

iterasi, i	h_i	$f(h_i)$	$f'(h_i)$	h_{i+1}	Δh
0	1	-28.6654			
1	2	8.794679	37.46011	1.765226	-0.23477
2	1.765226	-1.16445	42.41998	1.792676	0.027451
3	1.792676	-0.03274	41.22745	1.79347	0.000794
4	1.79347	0.000133	41.39449	1.793467	-3.2E-06
5	1.793467	-1.5E-08	41.39915	1.793467	3.61E-10

Akar Persamaan

❑ Latihan 1:

- ❑ Cari kedalaman air pada aliran di dalam saluran trapesium dengan kemiringan talud 1:1, lebar dasar saluran $b = 20$ m, kemiringan memanjang 0.001, koefisien kekasaran $n = 0.025$, dan debit $Q = 50 \text{ m}^3/\text{s}$.

Akar Persamaan

23

<http://istiarto.staff.ugm.ac.id>

❑ Latihan 2:

- ❑ Cari lokasi sumur pengambilan jika diketahui terjadi penurunan muka air pada dua sumur, yaitu $z_1 = 2.0$ m dan $z_2 = 1.8$ m, permeabilitas tanah, $p = 0.0005$ m/s
- ❑ dari data hasil pencatatan data lain: tebal akuifer $Y = 20$ m, debit pemompaan pada sumur lain yg dipompa $Q = 22.3$ liter/detik, jarak antara 2 sumur yg diukur $L = 10$ m. Sumur yg dipompa sebaris dengan sumur yg diukur.
- ❑ Persamaan:

$$Q = \frac{\pi p (d_2^2 - d_1^2)}{\ln(r_2/r_1)}$$

$$d_i = Y - z_i$$

r jarak ke sumur yang dipompa

Sekian