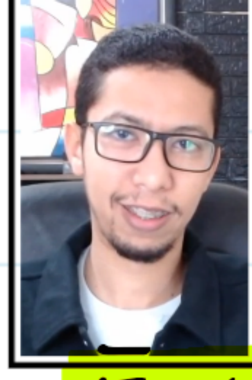

ZAKARIA Bouicha
WtSp: 0617074062

Les limites

1 Bac Sm (Série 1)

Ajitfham Academy
zakaria bouicha

EX1

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to+\infty}\left(x^3+x\right)$; $\lim_{x\to-\infty}\left(2-x+x^3\right)$; $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-x\right)$

$\lim_{x\to-\infty}\left(\pi x+2020\right)$; $\lim_{x\to-\infty}\left(2x^3+\left(x^2-1\right)(1-3x)\right)$

$\lim_{x\to-\infty}\left(-2x^4-x^2+x+1\right)$; $\lim_{x\to+\infty}\left(1-2x^2\right)(1+3x)$

$\lim_{x\to+\infty}\left(4x^2-(2x-1)(2x+1)\right)$; $\lim_{x\to-\infty}x^3(1-2x)^5$

$\lim_{x\to-\infty}\left(x^6+x^5+x^4-x\right)\left(x^3-x^2+x+1\right)$

Ex2

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^5+x^4+2}{x^2-1}$; $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1-3x}{4x+7}$; $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x^2+x+5}$

$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-4x^3+5x+9}{7x^3-6}$; $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{(x+1)^2(2x-7)^2}{4x^3+x+5}$

$\lim_{|x|\to+\infty}\dfrac{3x-x^4+x\left(1-5x^2\right)}{\left(x^2+1\right)\left(2-3x^3\right)}$; $\lim_{|x|\to+\infty}\dfrac{\sqrt{5}\,x^3\left(2-x^2\right)^3}{\left(x^4-1\right)^2}$

Ex3

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^2-2x-3}$; $\lim_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}$

$\lim_{x\to2}\dfrac{4x^3-5x-22}{x^2-x-2}$; $\lim_{x\to2}\dfrac{2x^3-7x^2+4x+4}{x^3-x^2-8x+12}$

$\lim_{x\to-\sqrt{3}}\dfrac{x+\sqrt{3}}{3-x^2}$; $\lim_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$

$\lim_{x\to3}\dfrac{x^4+3x^3-7x^2-27x-18}{x^4-3x^3-7x^2+27x-18}$; $\lim_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$

Ex4

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x+9}$; $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)$; $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{3-x}$

$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{4x^2+1}\right)$

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+3x-1}}{x+5}$; $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$; $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$

$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{x+5}{2x-4}}$; $\lim_{x\to-\infty}x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

EX5

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}+4x^2-x+5\right)$; $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x+5}$

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x-3}$; $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+1}}$; $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2}$; $\lim_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-2x}$; $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{x^3+1}{2x+3}}$

$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x}+2x-5\right)$; $\lim_{x\to-\infty}\left(x+7+\sqrt{4-2x}\right)$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+x+4}-2x+1\right)$; $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2-7x}{3x+5}\sqrt{1-2x}$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+4x}-3x+8\right)$; $\lim_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+12}-\sqrt{x}-2}$

Ex6

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to2}\left|5x^3-7x^2-2\right|$; $\lim_{x\to\frac{1}{3}}\left|\dfrac{x^2-6x}{3x-1}\right|$; $\lim_{x\to0}\dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$

$\lim_{x\to-\frac{3}{2}}\dfrac{3|x-5|+2}{\left|4x^2-9\right|}$; $\lim_{x\to-\infty}\left|\dfrac{5x^2-7x^5+2x-6}{x^5+3x^4-8x^2+9}\right|$

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3}{|-5x+7|}$; $\lim_{x\to-4}\dfrac{x+5}{\left|x^2+4x\right|}$; $\lim_{x\to4}\dfrac{\left|x^2-2x\right|-8}{x^2-5x+4}$

Ex7

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to4^-}\dfrac{x}{x-4}$; $\lim_{x\to2^+}\dfrac{2-3x}{2-x}$; $\lim_{x\to3^-}\dfrac{2x^2-x+1}{(3-x)(-1-x)}$

$\lim_{x\to3^+}\dfrac{-7}{\sqrt{x-3}}$; $\lim_{x\to0^+}\left(x\sqrt{x}+2\right)$; $\lim_{x\to2^+}\dfrac{x^3-8}{x^2-4x+4}$

$\lim_{x\to1^-}\dfrac{(x-1)^2}{\left(x^2-1\right)^5}$; $\lim_{x\to-2^+}\dfrac{4x^2-x+5}{x^2-4}$; $\lim_{x\to0^+}\dfrac{x^3-1}{x^2-x}$

$\lim_{x\to1^+}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x^3-1}\right)$; $\lim_{x\to3^+}\dfrac{\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x-3}}$

$\lim_{x\to1^+}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; $\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}\dfrac{3x^2-x-1}{4x^2-1}$; $\lim_{x\to-3^-}\dfrac{x^3}{\left|x^2-9\right|}$

$\lim_{x\to0^+}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x}-\sqrt{2x^2}}$; $\lim_{x\to0^+}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$; $\lim_{x\to1}\dfrac{-2}{\left|\sqrt{x}-1\right|}$

Ex 8

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\pi x)}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{\sin(5x)}{\tan(3x)} \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos(2x)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(7x)}{\sin x} \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{3x^2} \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)-2\sin x}{x^3} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin x} \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{\tan(5x)}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(4x)}{\tan(2x)\sin x} \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$$

Ex 9

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x^2+x+1 \ ; \ x\geq1 \\ f(x)=4x-1 \ ; \ x<1 \end{cases}$$

Calculer : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$.

La fonction f admet-elle une limite en 1 ? Justifier.

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par :

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{3x+1}{x^2-1} \ ; \ x<1 \\ g(x)=\dfrac{-x}{x^3-1} \ ; \ x>1 \end{cases}$$

Calculer : $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} g(x)$.

La fonction g admet-elle une limite en 1 ? Justifier.

Ex 10

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{x-2} \ ; \ x\geq1 \\ f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1} \ ; \ x<1 \end{cases}$$

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to1^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to2^+} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to2^-} f(x)$$

Ex 11

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x>\frac{\pi}{2}}}\frac{1+\sin x}{\cos} \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}\tan x \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to-\frac{\pi}{2}\\ x>-\frac{\pi}{2}}}\tan x$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1} \quad ; \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi} \quad ; \quad \lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-2\sin\frac{x}{2}}{x^3} \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^3\cos x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^6 x}{x\sin(2x)} \quad ; \quad \lim_{x\to1}\frac{2\sin(x-1)}{x^2-x} \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\tan^2 x \quad ; \quad \lim_{x\to1}(x-1)\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$\lim_{x\to-1}(x+1)\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad ; \quad \lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{\cos(2x)-\cos(3x)}}{x}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sin(x^2-2x)}{x-2} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right)$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{\tan x}-\sqrt{\tan(2x)}}{\sqrt{\tan(3x)}-\sqrt{\tan(4x)}}$$

Ex 12

1) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=\frac{2+\sin\frac{1}{x}}{x^2}$$

a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ f(x)\geq\dfrac{1}{x^2}$.

b) Déterminer la limite : $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

2) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x)=\frac{\cos x}{x}$$

a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ |g(x)|\leq\dfrac{1}{x}$.

b) Déterminer la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

3) Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$h(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ |h(x)|\leq x^2$.

b) Déterminer la limite : $\lim\limits_{x\to0} h(x)$.

4) Soit k la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(x)=x^2-3\sin x$$

a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ k(x)\geq x^2-3$.

b) En déduire les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x)$

Ex 13

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=E(x)+\sin x$$

où $E(x)$ désigne la partie entière du nombre x.

1) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad x-2<f(x)\leq x+1$.

2) En déduire les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\ ;\ \lim_{x\to-\infty} f(x)\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\ ;\ \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

3) Étudier la limite de la fonction f en 0.

Devoir 1

I

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{\sqrt{\cos x}-1+\sin x}{\cos x-\cos(3x)}\quad ;\quad \lim_{x\to+\infty}\left(x^2+2x\sin x\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1-\sqrt{2}\cos x}\quad ;\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2x)}{1-\sin x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(3x)}{\sin^2(5x)}\quad ;\quad \lim_{x\to0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-\cos x}{\sin(2x)\tan(3x)}\quad ;\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\frac{\sin x}{1+\cos x}}-1}{x-\frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{6x-\pi}\quad ;\quad \lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$$

II

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{2\sin x-\sqrt{2}}\times\frac{2\cos^2 x-1}{\sqrt{\tan x}+\tan x-2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x+\cos x-\sin x-1}{\cos(2x)+\sin(2x)-1}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x\sqrt{\tan x}-\sin x\sqrt{\sin x}}{x^3\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan^3 x+\tan^3(2x)+\tan^3(3x)}{\tan^3(4x)+\tan^3(5x)+\tan^3(6x)}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^3 x+\sin^3(2x)+\sin^3(3x)}{\sin^4 x+\sin^4(2x)+\sin^4(3x)}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x.\cos(2x).\cos(3x).\cos(4x)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x-\pi}\left(\sqrt{\frac{4\cos^2 x}{2+\cos x}}-2\right)$$

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-\sin(x-3)-3}{(x-3)\cos(x-3)}$$

III

Déterminer les limites suivantes : $\left(a\in\mathbb{R}^*\right)$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-ax}{x^2-a^2}\quad ;\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^5+x^4+x^3+x^2+1}{x^4-1}-ax\right)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{\cos x-\cos a}\quad ;\quad \lim_{x\to a}(a-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-ax\right)\quad ;\quad \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-ax\right)$$

IV

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};+\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\cos x}{\sqrt{x}(2x-\pi)}\ ;\ x>0\\ f(0)=0\\ f(x)=\dfrac{\sin x-\tan x}{x\sqrt{1-\cos x}}\ ;\ -\dfrac{\pi}{2}<x<0\end{cases}$$

1) Montrer que : $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^-} f(x)=f(0)$.

Que peut-on conclure ?

2) Étudier la limite de la fonction f en $\frac{\pi}{2}$.

3) Déterminer la limite : $\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x)$

4) Montrer que : $\left(\forall x\in\left]1+\frac{\pi}{2};+\infty\right[\right)\ |f(x)|\leq\frac{3}{\sqrt{x}}$

et en déduire la limite : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.