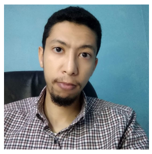
série 2BSM	Pr Zakaria Bouicha	2-BAC SM
Arithmétiques dans z	Page facebook	
	Chaine Youtube	
2BACSM	Whatsapp : 0617074062	
	plateforme	

Exercice 1

I Soit l'équation : (E) : $35u - 96v = 1$; $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$.

1 Vérifier que $(11,4)$ est une solution particulière de l'équation (E).

2 En déduire la solution générale de l'équation (E).

II Soit l'équation : (F) : $x^{35} \equiv 2\,[97]$; $x \in \mathbb{Z}$.

1 a Montrer que 97 est un nombre premier.

Puis Montrer l'implication : $x \in solutions(F) \Rightarrow x \wedge 97 = 1$.

b Montrer l'implication : $x \in solutions(F) \Rightarrow x^{96} \equiv 1\,[97]$.

c Montrer l'implication : $x \in solutions(F) \Rightarrow x \equiv 2^{11}\,[97]$.

2 Montrer l'implication : $x \equiv 2^{11}\,[97] \Rightarrow x \in solutions(F)$.

3 Montrer que l'ensemble des solutions de (F) s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{S} = \{ (11 + 97k) \in \mathbb{N} \ ; \ k \in \mathbb{N} \}$$

Exercice 2

Soient p et q deux nombres premiers vérifiant :

$$9^{p+q-1} \equiv 1\,[pq] \quad et \quad p < q$$

1 a Montrer que p et 9 sont premiers entre eux.

b En déduire que : $9^{p-1} \equiv 1[p]$ et $9^{q} \equiv 1[p]$.

2 a Montrer que $(p-1)$ et q sont premiers entre eux.

b En utilisant le théorème de Bézout, Montrer que : $p = 2$.

c En utilisant le théorème de Fermat, Montrer que : $9^{q-1} \equiv 1[q]$.

d En déduire que $q = 5$.

série 2BSM	Pr Zakaria Bouicha	2-BAC SM
Arithmétiques dans z 2BACSM	Page facebook	
	Chaine Youtube	
	Whatsapp : 0617074062	
	plateforme	

Exercice 3

partie I : (Les questions de cette partie sont indépendantes)

① Déterminer les entiers positifs a et b sachant que $a < 4000$ et que la division euclidienne de a par b donne un quotient de 82 et un reste de 47.

② Déterminer les quotient et le reste de la division euclidienne de $2^{2013} + 562$ par 4.

3) • Démontrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ on a :

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$$

• En déduire que $609 \mid 5^{4n} - 2^{4n}$

Déterminer les entiers relatifs n tels que. $n-4$ divise $3n-17$

Montrer que $\forall n \geq 1$ $40^n . n! \mid (5n)!$

Exercice 4

partie 1 :

① Déterminer, suivant les puissances de $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de 2^n par 5.

② Quel est le reste de la division euclidienne par 5 de 1357^{2013}

partie 2 :

Démontrer que la somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9. (c-à-d: $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ est divisible par 9)

partie 3 :

① Déterminer les entiers naturels tels que : $5^n \equiv -1 \ [13]$

② Déterminer les entiers naturels n tels que 13 divise $5^{2n}+5^n$

partie 4 :

Démontrer que 13 divise $3^{126}+5^{126}$

Exercice 5

On considère l'équation : $(E) : 23x - 40y = 1$ $\quad (x,y) \in \mathbb{Z}^2$

① Justifier que l'équation (E) admet au moins un couple solution

② Déterminer une solution particulière de l'équation (E).

③ Résoudre l'équation (E).

④ En déduire qu'il existe un unique entier d vérifiant

$0 < d < 40$ et $23d \equiv 1 \ [40]$.

Exercice 6

Soit l'équation : (D) : $7x^3 - 13y = 5$; $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

1 Soit (x,y) une solution de (D).

a Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.

b En déduire que $x^{12} \equiv 1\,[13]$.

c Montrer que : $x^3 \equiv 10\,[13]$.

d En déduire que : $x^{12} \equiv 3\,[13]$.

2 Déduire des questions précédentes que l'équation (D) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Exercice 7

Soit N l'entier naturel exprimé dans le système de numération décimal par :

$$N = \underbrace{111\ldots.11}_{\substack{2010 \text{ fois} \\ \text{le chiffre } 1}}$$

1) Montrer que N est divisible par 11.

2) a) Vérifier que le nombre 2011 est premier et que :

$$10^{2010} - 1 = 9N$$

b) Montrer que 2011 divise $9N$.

c) En déduire que 2011 divise $9N$.

3) Montrer que le nombre N est divisible par 22121.

Examen National 2011 (Session Normale)

Exercice 8

1) a) Vérifier que 503 n'est pas un entier premier.

b) Montrer que : $7^{502} \equiv 1\ [503]$

puis en déduire que : $7^{2008} \equiv 1\ [503]$

2) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) suivante :

$$(E) : 49x - 6y = 1$$

Sachant que le couple $(1;8)$ est solution de (E), résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) en indiquant les étapes de la résolution.

3) On pose : $N = 1 + 7 + 7^2 + \ldots + 7^{2007}$

a) Montrer que le couple $(7^{2006};\ N)$ est une solution de l'équation (E).

b) Montrer que : $N \equiv 0\ [4]$ et $N \equiv 0\ [503]$

c) En déduire que N est divisible par 2012.

Examen National 2012 (Session De Rattrapage)

Exercice 9

I. Soit p un nombre premier tel que $p>3$ on suppose qu'il existe deux entiers a et b premiers entre eux tels que p/a^2+ab+b^2

1) Montrer que $p\wedge a=1$ et $p\wedge b=1$
2) Montrer $a^3\equiv b^3[p]$ et $a^{p-1}\equiv b^{p-1}[p]$
3) Déduire que $p\equiv 1[3]$

II. On considère dans $\mathbb{N}^{*2}$ l'équation : $(E): x(2021-x)=y(x+y)$

Soit (x,y) une solution de (E) on pose $d=x\wedge y$ et $x=da$ et $y=db$

1) Vérifier que $a\wedge b=1$ et $(a^2+ab+b^2)d=2021a$
2) Montrer que $(a^2+ab+b^2)\wedge a=1$ en déduire que $a^2+ab+b^2/2021$
3) Montrer en utilisant la partie I que $a^2+ab+b^2=43$ (on rappel que $2021=43\times 47$
4) Déduire dans $\mathbb{N}^{*2}$ les solutions de (E)

Exercice 10

Soit x un entier relatif tel que : $x^{1439} \equiv 1436\ [2015]$

1) Sachant que $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$, montrer 1436 et 2015 sont premiers entre eux.

2) Soit d un diviseur commun des nombres x et 2015.

a) Montrer que d divise 1436.

b) En déduire que x et 2015 sont premiers entre eux.

3) a) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que :

$$x^{1440} \equiv 1\ [5] \text{ et } x^{1440} \equiv 1\ [13] \text{ et } x^{1440} \equiv 1\ [31]$$

(remarquer que : $2015 = 5 \times 13 \times 31$)

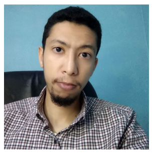
b) Montrer que $x^{1440} \equiv 1\ [65]$ puis en déduire que :

$$x^{1440} \equiv 1\ [2015]$$

4) Montrer que : $x \equiv 1051\ [2015]$.

Examen National 2015 (Session Normale)

Exercice 11

série 2BSM	Pr Zakaria Bouicha	2-BAC SM
Arithmétiques dans z	Page facebook	
	Chaine Youtube	
2BACSM	Whatsapp : 0617074062	
	plateforme	

1-Soit x un entier non nul premier avec 53 .

a-S 'assurer que $x^{52} \equiv 1\ [53]$.

b-En déduire que pour tout entier naturel k , $x^{52k+1} \equiv x\ [53]$.

2-Soit l'équation (E_1) : $x^{29} \equiv 2\ [53]$ ou $x \in \mathbb{Z}$.

Montrer que 2^9 est une solution de (E_1) .

3-Soit x est une solution de (E_1) .

a-Montrer que x est premier avec 53 .

b-Montrer que $x^{261} \equiv x\ [53]$.

c-En déduire que $x \equiv 2^9\ [53]$.

4-a- Montrer que $2^9 \equiv 35\ [53]$.

b-Donner alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E_1).

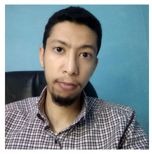
5-On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E_2) : 71\alpha - 53\beta = 1$.

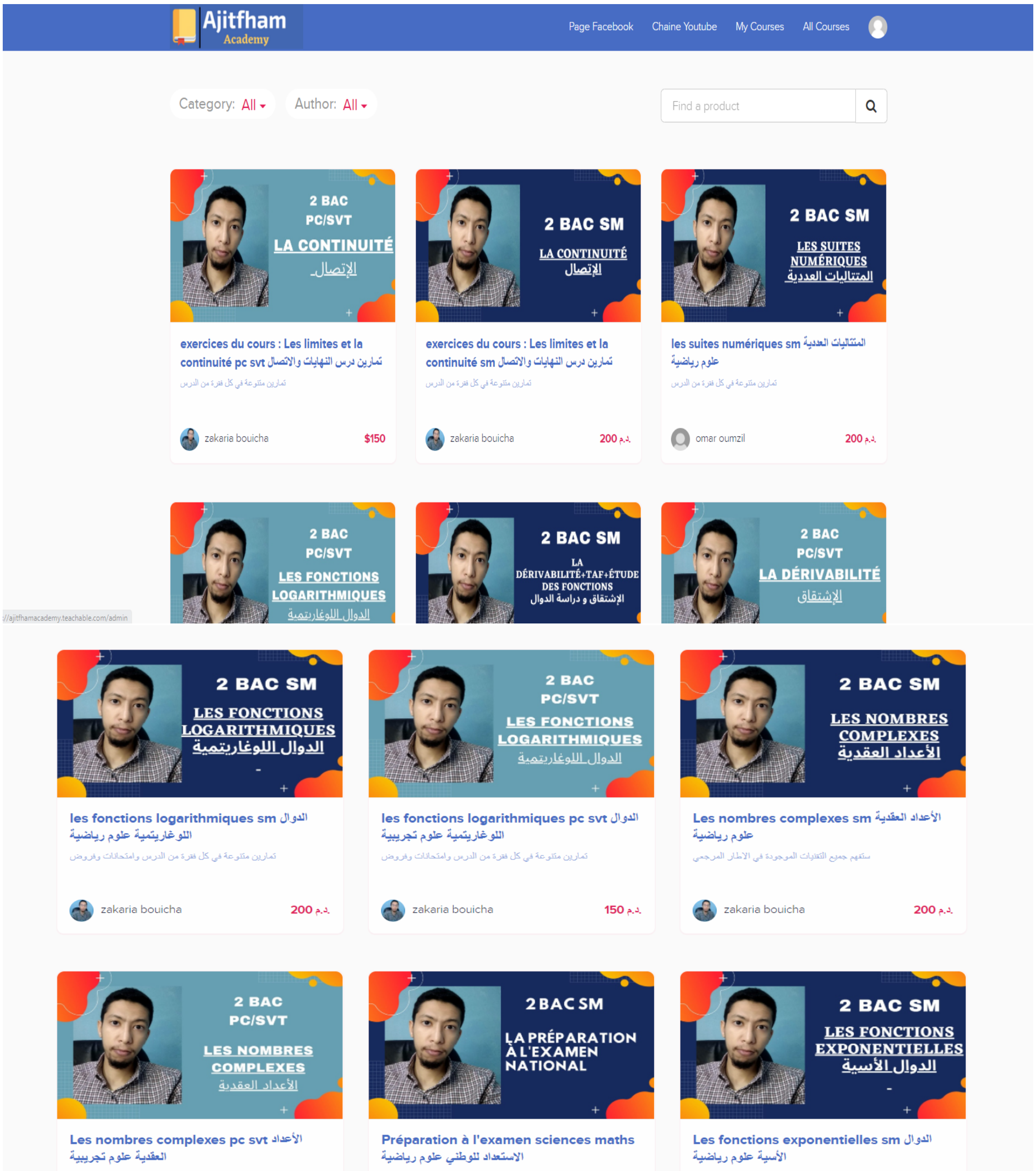
a-Vérifier que $(3{,}4)$ est une soultion l'équation (E_2).

b-Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E_2).

6- Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} x \equiv 34\ [71] \\ x^{29} \equiv 2\ [53] \end{cases}$

Pour s'inscrire dans la plateforme et avoir la correction sous forme de videos il suffit de contacter 0617074062 sur wtsp

série 2BSM	Pr Zakaria Bouicha	2-BAC SM
Arithmétiques dans z 2BACSM	Page facebook Chaine Youtube Whatsapp : 0617074062 plateforme	



série 2BSM	Pr Zakaria Bouicha	2-BAC SM
Arithmétiques dans z 2BACSM	Page facebook Chaine Youtube Whatsapp : 0617074062 plateforme