Exercice (1) 3,5 pts

On rappel que $\left(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot\right)$ est un espace vectoriel réel et $\left(M_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un anneau unitaire .

On considère l'ensemble $E=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix} x+y & 3y \\ -y & x-y\end{pmatrix} / (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$ on pose $J=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1\end{pmatrix}$

0,25 1) a) montrer que $(E,+)$ est un groupe commutatif

0,50 b) montrer que $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel puis déterminer sa dimension

0,50 2) calculer J^2 et J^n puis déterminer les coordonnées de $I+J+J^2+\dots+J^n$ dans la base (I,J)

3) soit f l'application de E vers $\mathbb{C}$ telle que : $\left(\forall M(x,y)\in E\right)$ $f(M)=x+iy\sqrt{2}$

0,75 a) montrer que f est un isomorphisme de $(E,\times)$ vers $(\mathbb{C},\times)$

0,75 b) déduire la structure de $(E,+,\times)$

0,75 4) on pose $A=M\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ déterminer A^n en fonction de I et J

PROBLEME (10 points).

Partie A (2,5 points)

0,25 **1.** Résoudre l'équation différentielle $y'+y=0$.

Soit φ une application dérivable de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, et soit g l'application numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x)=\varphi(x)e^x$.

0,75 **2. a.** Vérifier que g est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}_+^*$ et démontrer que, pour que φ vérifie

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \varphi'(x)+\varphi(x)=-\frac{1}{x}-\ln x,\quad (1)$$

il faut et il suffit que g soit une primitive de l'application $x\mapsto -e^x\ln x-\dfrac{e^x}{x}$.

0,75 **b.** Quel est l'ensemble des primitives de la fonction $x\mapsto -e^x\ln x-\dfrac{e^x}{x}$?

0,75 **3.** En déduire que l'ensemble des applications dérivables de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (1) est l'ensemble des applications $x\mapsto ae^{-x}-\ln x$ où a désigne une constante réelle.

Partie B (5,75 points)

Soit f l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=e^{1-x}-\ln x$.

1,75 **1. a.** Etudier les variations de f et construire sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique c et que $c\in]1,2[$.

0,5 **b.** Calculer $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} xf(x)$.

0,75 **c.** Soit x un élément de l'intervalle $]0,1]$.

Calculer l'intégrale $F(x)=\displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt$ en fonction de x.

Montrer que lorsque x tend vers 0, $F(x)$ tend vers e.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

0,5 a. Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$ et pour tout réel t tel que $\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}$, on a : $f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$.

0,5 b. Montrer alors que $\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq F\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$,

0,5 En déduire que $F\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq F\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$.

0,75 **3. a.** Déduire des questions précédentes que, lorsque n tend vers l'infini, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ admet une limite et calculer cette limite.

0,75 b. Établir les égalités : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{(1-k/n)} = (e-1)\frac{1}{n(e^{1/n}-1)}$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$

0,75 c. Utiliser les résultats précédents pour démontrer que les deux suites définies par :

$$u_n = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

ont des limites lorsque n tend vers l'infini et calculer ces limites.

Partie C (1,75 points)

0,5 **1. a.** Déterminer le sens de variation de f' dans l'intervalle $[1, 2]$.

Soit P l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $P(x) = x - \frac{f(x)}{f'(1)}$.

0,5 b. Etudier les variations de P dans l'intervalle $[1, 2]$. Montrer que P réalise une bijection de $[1, c]$ sur un intervalle J contenu dans $[1, c]$.

En déduire que l'on définit bien une suite c_n d'éléments de $[1, c]$ en posant $c_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = P(c_n)$.

2. a. Montrer que pour tout $x \in [1, 2], 0 \leq P'(x) \leq P'(2) \leq \frac{7}{12}$.

0,5 b. En utilisant le théorème des accroissements finis, vérifier que pour tout entier n,

$$|c_{n+1} - c| \leq \frac{7}{12}|c_n - c|.$$

En déduire que la suite (c_n) est convergente et déterminer sa limite.

0,25 c. Quelle valeur suffit-il de donner à n pour que c_n soit une valeur approchée de c à 10^{-2} près ?

Exercice(2) 3 pts

Soient p un nombre premier tel que $p \geq 3$ et (n,a) un couple de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$

0,5 1) montrer que $\left(a \equiv 1 \left[p^n\right] \text{ ou } a \equiv -1 \left[p^n\right] \right) \Rightarrow \left(a^2 \equiv 1 \left[p^n\right] \right)$

2) on suppose $a^2 \equiv 1 \left[p^n\right]$

0,5 a) montrer que $p \mid a-1$ ou $p \mid a+1$

0,5 b) montrer que si $p \mid a-1$ alors $(a+1) \wedge p = 1$

0,5 c) déduire que $a \equiv 1 \left[p^n\right]$ ou $a \equiv -1 \left[p^n\right]$

1 3) résoudre dan $\mathbb{N}^*$ l'équation $\overline{121}^{(x)} \equiv 1 \left[125\right]$

Exercice (3) 3,5 pts

Soit a un complexe non nul ; $\overline{a}$ le conjugue de a

I) on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $iz^2 + (a + \overline{a} - i)z - \overline{a} - ia\overline{a} = 0$

0,25 1) a) vérifier que le discriminant de (E) s'écrit $\Delta = (a - \overline{a} - i)^2$

0,25 b) résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

0,5 2) montrer que a est solution de (E) équivaut à $\mathrm{Re}(a) = \mathrm{Im}(a)$

II) le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

On suppose que $\mathrm{Re}(a) \neq \mathrm{Im}(a)$; on considère les points C ; B ; A d'affixes $1 + ia$; $i\overline{a}$; a

1) On pose $Z = \dfrac{(1+ia) - a}{i\overline{a} - a}$

0,5 a) Vérifier que $\overline{Z} = \dfrac{(i-1)\overline{a} - i}{i\overline{a} - a}$

0,75 b) montrer que C ; B ; A sont alignés si et seulement si $\mathrm{Im}(a) = \dfrac{1}{2}$

2) on suppose que $\mathrm{Im}(a) \neq \dfrac{1}{2}$. soient R_1 la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et R_2 la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On pose $B' = R_1(B)$ et $C' = R_2(C)$; E est le milieu du $[BC]$

0,5 a) Déterminer c' ; b' affixes des points C' ; B'

0,75 b) montrer que (AE) et $(B'C')$ sont perpendiculaire et que $B'C' = 2AE$