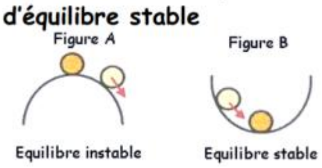
OSCILLATEURS MECANIQUES

Définition

Oscillateur mécanique : Tout mobile qui effectue un mouvement de va et viens autours de sa position d'équilibre stable



Nous déplaçons légèrement la bille de sa position d'équilibre,

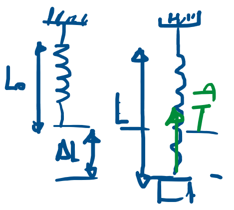
- **La figure A :** elle se met à rouler et ne reviendra pas à sa position de départ. L'équilibre est instable.
- **La figure B :** elle revient dans sa position de départ. L'équilibre est dit stable.

Le pendule élastique

raideur

Un pendule élastique, ou **système** solide-ressort, est constitué d'un solide, de masse m , fixé à un ressort ,de longueur initiale ℓ_0 et de raideur K, dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe.

ℓ_0	K	$\Delta\ell = \ell - \ell_0$	$T = K.\Delta\ell$
Longueur initiale ℓ_0 (m)	Raideur du ressort (N/m)	Allongement du ressort (m)	Tension du ressort (N)



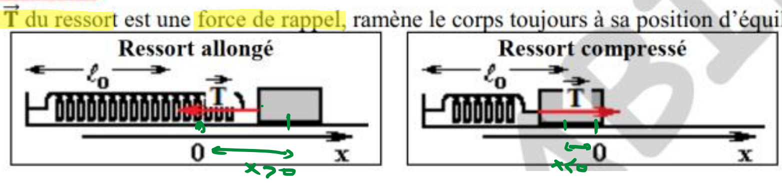
$\Delta l = l - l_0$

$T = K.\Delta l$

N N/m m

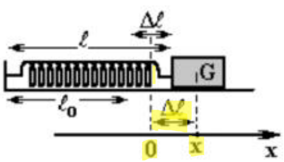
Sens de la tension du ressort $\vec{T}$

La tension $\vec{T}$ du ressort est une force de rappel, ramène le corps toujours à sa position d'équilibre stable



Expression de $\Delta\ell$

Ressort horizontal

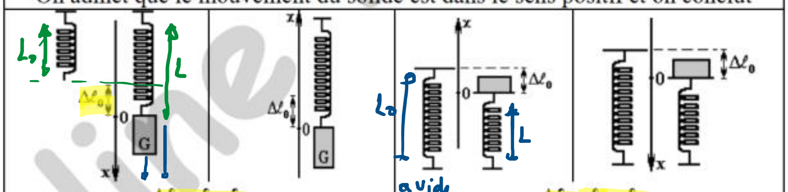


Ressort horizontal initialement non allongé et fixé directement au mobile ou au moyen d'un fil inextensible et de masse négligeable

$\Delta\ell = x$

Ressort vertical ou incliné

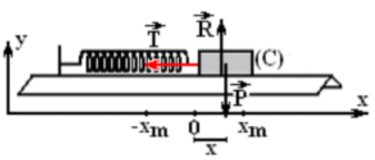
On admet que le mouvement du solide est dans le sens positif et on conclut



$\Delta\ell = \ell - \ell_0$		$\Delta\ell = \ell_0 - \ell$	
Si le ressort s'allonge alors	Si le ressort se compresse alors	Si le ressort s'allonge alors	Si le ressort se compresse alors
$\Delta\ell = \Delta\ell_0 + x$	$\Delta\ell = \Delta\ell_0 - x$	$\Delta\ell = \Delta\ell_0 - x$	$\Delta\ell = \Delta\ell_0 + x$

Équation différentielle cas d'un ressort horizontal.

Un solide, de masse m sur un banc à coussin d'air horizontal, fixé à un ressort à spires non jointives, de longueur initiale ℓ_0 et de raideur K,



Système : Solide (C)

Bilan des forces :

- $\vec{T}$: Tension du ressort
- $\vec{R}$: Réaction du plan horizontal
- $\vec{P}$: Poids du corps (C)

En appliquant la 2[eme] loi de Newton : $\sum \vec{F} = m.\vec{a}_G$

$\vec{T} + \vec{R} + \vec{P} = m\vec{a}_G$

Projection sur l'axe (ox)

$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

Projection sur l'axe (ox)

$-T + 0 + 0 = ma_x$

$-K.x = m\ddot{x}$

$(m\ddot{x} + Kx = 0) \times \frac{1}{m}$

$\ddot{x} + \frac{K}{m}.x = 0$ ← L'éq diff

$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \ddot{x}$

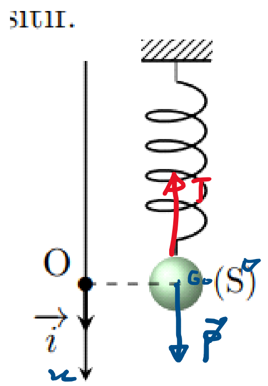
La pulsation propre ω_0

tq : $\omega_0^2 = \frac{m}{K}$

$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2.x = 0$

Cas d'un ressort vertical.

On considère un pendule élastique verticale formé d'un ressort de spires non jointives et de raideur $k = 20\,N.m^{-1}$ et un solide (S) de masse $m = 200\,g$. On écarte le solide verticalement vers le bas d'une distance de 3 cm, puis on le libère sans vitesse initiale.
On considère un repère $(O, \vec{i})$ vertical dirigé vers le bas, son origine O est confondu avec le centre d'inertie du solide (S) à l'équilibre.
à l'instant $t = 0$, le solide (S) passe par sa position d'équilibre stable G_0 dans le sens positif.



$T = K.\Delta l$

x, Δl_0, $\Delta l_0 + x$, $\Delta l - x$

* L'expression de l'allongement Δl_0 à l'équilibre.

SE : {Le solide S}

BF : $\vec{P}$: son poids

$\vec{T}$: Tension du ressort

$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$ (Le solide est en équilibre)

Projection sur l'axe (ox) $\Rightarrow P - T = 0$

$P = T \Rightarrow mg = K.\Delta l_0$

$\Delta l_0 = \frac{mg}{K}$

* L'éq diff.

SE {solide S}

BF : $\vec{P}$ poids $\vec{T}$: tension du ressort

2ème loi de Newton : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_G$

projection sur (ox) : $mg - T = ma_x$

$mg - K(\Delta l_0 + x) = m.\ddot{x}$

$\Rightarrow mg - K.\Delta l_0 - Kx = m\ddot{x}$

on a $mg = K.\Delta l_0$

$\Rightarrow \cancel{K\Delta l_0} - \cancel{K\Delta l_0} - Kx = m\ddot{x}$

$\Rightarrow -Kx = m\ddot{x}$

$\Rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x} + Kx = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0}$$

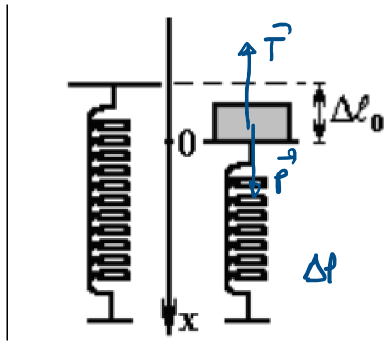
ou $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 . x = 0}$

Autre exemple :

à l'équilibre $\quad \vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$

projection $\quad P - T = 0$

$\quad\quad\quad \underline{mg - K.\Delta\ell_0 = 0}$



$\Delta\ell = \Delta\ell_0 + x$

au cours du mvt :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_G$$

projection $\quad mg - K(\Delta\ell_0 + x) = m\ddot{x}$

$$\underbrace{\cancel{mg - K\Delta\ell_0}}_{0} - Kx = m\ddot{x}$$

$$-Kx = m\ddot{x} \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0}$$

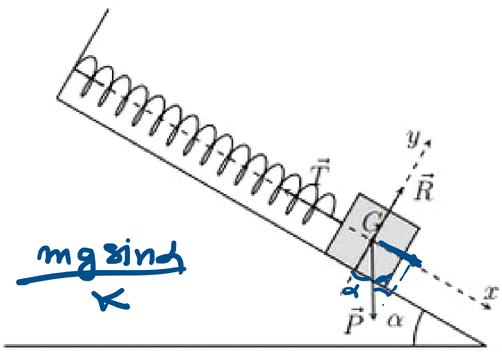
Cas d'un pendule incliné :

- L'équilibre $\quad \vec{R} + \vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$

projection sur (ox) :

$$0 + P\sin\alpha - T = 0$$

$$mg\sin\alpha - K.\Delta\ell_0 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{mg\sin\alpha}{K}$$



- Au cours du mvt :

1ère loi de Newton $\quad \vec{R} + \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_G$

projection sur (ox) : $\quad 0 + mg\sin\alpha - K(\Delta\ell_0 + x) = m\ddot{x}$

$$\underbrace{mg\sin\alpha - K\Delta\ell_0}_{0} - Kx = m\ddot{x}$$

$$-Kx = m\ddot{x} \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0}$$

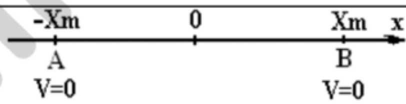
Équation horaire ou la solution de l'équation différentielle :

$x = x(t) = Xm.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$ **ou bien**	avec	$x(t)$: l'abscise (élongation) du point G et varie entre Xm et $-Xm$ X_m : Amplitude ou élongation maximale ω_0 : pulsation (rad/s)

$x = x(t) = Xm.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$ **ou bien** $x=x(t)=X_m.\cos(\omega_0.t+\varphi)$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$	avec	$x(t)$: l'abscise (élongation) du point G et varie entre Xm et -Xm X_m : Amplitude ou élongation maximale ω_0 : pulsation (rad/s) T_0 : la période (s) $\omega_0.t+\varphi$: Phase à l'instant t φ : Phase à l'origine des temps t=0

⁂ Comment déterminer Xm

1. Phrase



- On écarte le corps de 2cm de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale

Xm=2cm

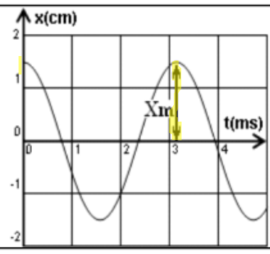
X_m $-X_m$

- Le corps oscille entre deux points A et B distante de AB=4cm

Xm = 2cm d'où AB = 2.Xm = 4cm

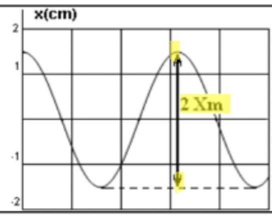
2. Graphiquement

2.1. Par rapport à l'axe temps



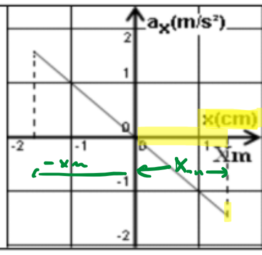
Xm=1.5cm

2.2. Par rapport aux extremums



Xm=1.5cm

2.3. De la courbe $a_x=f(x)$



Xm=1.5cm

3. Tableau

Sans aucune indication soit dans un texte ou dans un graphe

t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
x	2	0	-2	0	2	0

La plus élevé en valeur absolue est Xm

Xm=2cm

⁂ Comment déterminer la période propre T_0

1. La fréquence N_0

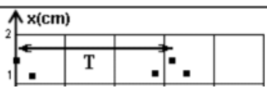
$$T_0 = \frac{1}{N_0}$$

2. La pulsation ω_0

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

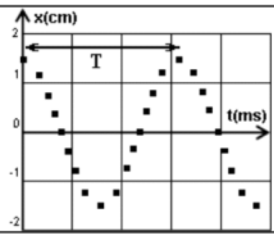
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

3. Enregistrement



τ : la durée entre l'enregistrement de deux points successifs

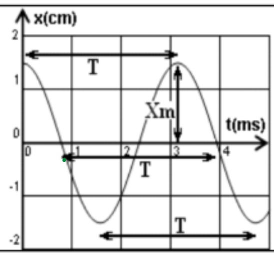
3. Enregistrement



τ : la durée entre l'enregistrement de deux points successifs

$T=16.\tau$

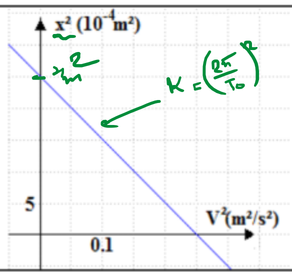
4. Graphiquement x=f(t)



Attention à la lecture et à l'échelle

$T_0=3.2ms$

5. Graphiquement $V^2=f(V^2)$



$$V^2=\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.(X_m^2-x^2)$$ à demontrer

Dans ce cas : $X^2m=25\ 10^{-4}m^2$

$Xm=5.10^{-2}$ m

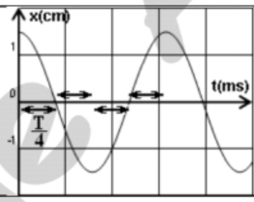
$$\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2=\frac{\Delta V^2}{\Delta x^2}=\frac{0.25-0}{(25-0).10^{-4}}=100$$

$T_0=0.628s$

6. Tableau

x(cm)	1.5	0	-1.5
t(ms)	0	0.8	1.6

T=3.2ms



$\frac{T_0}{4}$: durée du trajet entre ±Xm et 0 et réciproquement

$\frac{T_0}{2}$: durée du trajet entre +Xm et -Xm et réciproquement

7. Phrase

Δt : la durée nécessaire pour réaliser n oscillations

$\Delta t=n.T_0$

L'oscillateur effectue 10 oscillations pendant 2s

2s = 10T₀

$$T_0=\frac{\Delta t}{n}=\frac{2}{10}=\mathbf{0.2}s$$

Comment déterminer la pulsation ω_0

1. La fréquence N_0 — $\omega_0=2\pi.N_0$

2. La période propre T_0 — $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$

3. De l'équation différentielle

$\ddot{x}+\omega_0^2.x=0$

et $\omega_0^2=-\frac{\ddot{x}}{x}=-\frac{a_x}{x}$

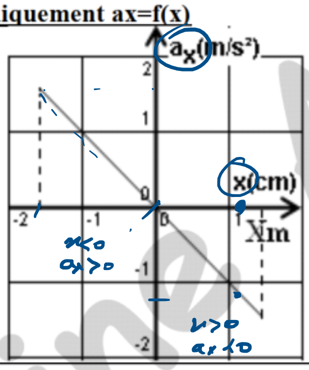
Donc $\omega_0=\sqrt{-\frac{a_x}{x}}$

$\frac{a_x}{x}<0$

$a_x>0 \quad x<0$

$a_x<0 \quad x>0$

3.1. Graphiquement ax=f(x)



Graphiquement : on choisit un point

Soit x=-1cm et $a_x=1m/s^2$

$$\omega_0=\sqrt{-\frac{a_x}{x}}=\sqrt{-\frac{1}{-1\ 10^{-2}}}$$

$$\omega_0=10rad/s$$

3.2. D'un tableau

x(cm)	-1.5	-1.0	-0.5	0.5	1.0	1 .5
$a_x(m/s^2)$	1.5	1.0	0.5	-0.5	-1.0	-1 .5
$\omega_0^2=-\frac{a_x}{x}$	100 (rad/s)²					

x(cm)	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$a_x(m/s^2)$	1.5	1.0	0.5	-0.5	-1.0	-1 .5
$\omega_0^2 = -\frac{a_x}{x}$	100 (rad/s)²					

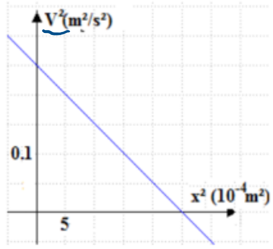
Du tableau on désigne un point

Soit x=-1.5 cm et a_x=1.5m/s²

$$\omega_0 = \sqrt{-\frac{a_x}{x}} = \sqrt{-\frac{1.5}{-1.5\ 10^{-2}}}$$

$$\omega_0 = 10rad/s$$

4. Graphiquement V²=f(x²)



$$V^2 = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 . (X_m^2 - x^2)$$ à démontrer

$$V^2 = \frac{1}{\omega_0^2}(X_m^2 - x^2)$$

Dans ce cas : X²m=25 10^{-4}m²

Xm=5 10^{-2} m

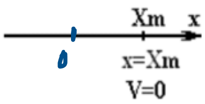
$$\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{\Delta V^2}{\Delta x^2} = \frac{0.25-0}{(25-0).10^{-4}} = 100$$

⁂ Comment déterminer la phase à l'origine φ

$$x = x(t) = Xm.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$$: l'équation horaire

1er cas :

(1) On écarte le corps, dans le sens positif, de Xm de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale à un instant considéré comme origine des temps



$x(0) = X_m \cdot \cos\varphi$

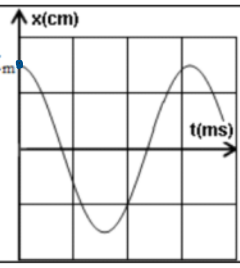
$\cos\varphi = \frac{x(0)}{X_m} = 1$

$x(0) = X_m$

$$\cos(\varphi) = \frac{x(0)}{Xm} = 1$$

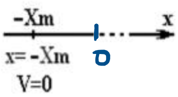
d'où $\varphi = 0$

x_0 = X_m



2em cas :

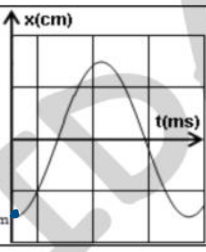
(2) On écarte le corps, dans le sens négatif, de Xm de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale à un instant considéré comme origine des temps



$x(0) = -X_m$

$$\cos(\varphi) = \frac{x(0)}{Xm} = -1$$

d'où $\varphi = \pi$

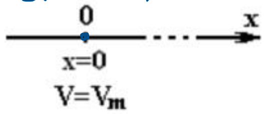


x_0 = $-X_m$

3em cas :

(3) On considère l'instant de passage du corps par sa position d'équilibre comme origine des dates

à $t=0$; $x=0$



$x(0) = X_m \cdot \cos\varphi$ $X_m \neq 0$

x(0) = 0 et $\cos(\varphi) = \frac{x(0)}{Xm} = 0$

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

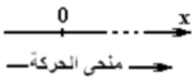
$x(t) = X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

$\dot{x}(t) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right) \cdot X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

$\dot{x}(0) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right) \cdot X_m \cdot \cos\varphi$

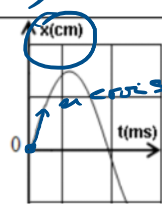
On en distingue deux cas :

1. Mouvement est dans le sens positif



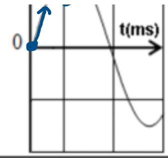
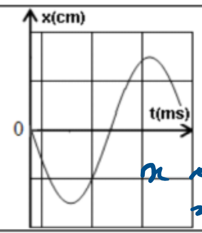
$$V_{0x} = -Xm.\frac{2\pi}{T_0}.\sin(\varphi) > 0$$

$V_x > 0$ et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$



en croissante

$\dot{x}(0) > 0$

← منحى الحركة →	$V_{0x} = -Xm.\frac{2\pi}{T_0}.\sin(\varphi)$ $V_x > 0$ et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ $x_m > 0$ $\frac{2\pi}{T_0} > 0$ → $\sin(\varphi) < 0$	
2. Mouvement est dans le sens négatif 0 - - - x ← منحى الحركة	$V_{0x} = -Xm.\frac{2\pi}{T_0}.\sin(\varphi)$ $V_x < 0$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\sin\varphi > 0$	 x décroissant à $t=0$ $\dot{x}(0) < 0$

★ Montrons que : $V^2 = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.(X_m^2 - x^2)$ ★

$$x(t) = X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \Rightarrow x^2 = X_m^2 \cdot \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = -X_m \cdot \left(\frac{2\pi}{T_0}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \Rightarrow v^2 = X_m^2 \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\frac{v^2}{X_m^2\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2} = \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \quad (2)$$

$$\frac{x^2}{X_m^2} = \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \quad (1)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \frac{x^2}{X_m^2} + \frac{v^2}{X_m^2\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X_m^2}\left(x^2 + \frac{v^2}{\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2}\right) = 1$$

$$x^2 + \frac{v^2}{\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2} = X_m^2$$

$$\frac{v^2}{\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2} = X_m^2 - x^2$$

$$\boxed{v^2 = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\left(X_m^2 - x^2\right)}$$

$v^2 = f(x^2)$ ↳ pour exploiter cette courbe.

$v = f(\ldots)$ courbe.

$T_0 \leftarrow$ $\rightarrow \omega_0$.

L'expression de la periode propre T_0 :

$x(t) = X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$ et $\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$

$\dot{x}(t) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right) \cdot X_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

$\ddot{x} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \underbrace{X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)}_{x(t)}$

$\ddot{x} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot x$

Remplaçons dans l'éq diff :

$-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot x + \frac{K}{m}x = 0$

$\frac{K}{m} \cdot \cancel{x} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cancel{x} \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$

On sait $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \cancel{2\pi} \cdot \frac{1}{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{m}{K}}}$

$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}}$

ETUDE ENERGETIQUE

Energie du système est la somme des énergies de ses composantes

❖ **Energie cinétique Ec :**

$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m V^2}$

avec $V = \dot{x}$

on peut ecrire $\boxed{E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2}$

Mq : $E_c = \frac{1}{2}K(X_m^2 - x^2)$

Mq : $E_c = \frac{1}{2}K(X_m^2 - x^2)$

Avec $x(t) = X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$.

$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ Avec $\dot{x} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right).X_m.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$

$E_c = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 . X_m^2 . \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$; $\sin^2(x) = 1-\cos^2 x$

on a demontré que $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

$\frac{T_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{m}{K}}$

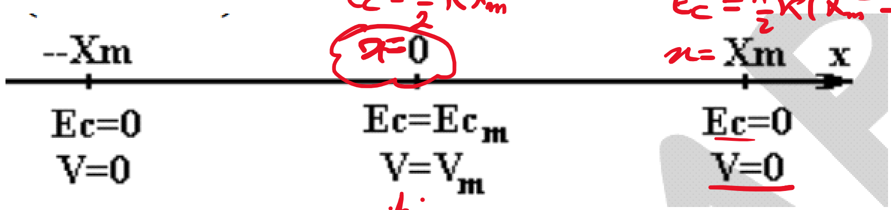
$\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{K}{m}$

$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2}m . \frac{K}{m} . X_m^2\left(1-\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)\right)$

$= \frac{1}{2}K\left[X_m^2 - X_m^2.\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)\right]$

$= \frac{1}{2}K\left[X_m^2 - \left(X_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)\right)^2\right]$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}K(X_m^2 - x^2)}$$



❖ **Energie potentielle Ep :**

L'énergie potentielle (de position), définie à une constante arbitraire près, ne dépend que de la position du corps dans l'espace.

$E_p = E_{pe} + E_{pp}$

❖ Energie potentielle élastique Epe	❖ Energie potentielle de pesanteur Epp
$Ep_e = \frac{1}{2}.K.\Delta\ell^2 + C$ La constante C est déterminé à partir d'un cas référentiel de l'énergie potentielle $Ep_e=0$ Si le pendule élastique est horizontal alors $\Delta\ell = x$ alors $Ep_e = \frac{1}{2}.K.x^2 + C$ On considère le plan vertical passant par la position d'équilibre comme repère de l'énergie potentielle élastique x=0 et $Ep_e=0$ d'où C=0 alors $Ep_e = \frac{1}{2}.K.x^2$	Ep_P=m.g.Z.+C La constante C est déterminé à partir d'un cas référentiel de l'énergie potentielle $Ep_p=0$ On considère le plan vertical passant par la position d'équilibre comme repère de l'énergie potentielle élastique z=0 et Ep_p=0 d'où C=0 alors Ep_P=m.g.Z NB : Pour un pendule élastique horizontal Ep_p=0

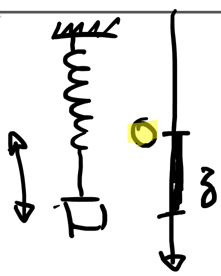
autre exemple.

" " " $x = X_m$ comp

état de ref d'énergie Epe.

$E_{pe} = 0$ lorsque $x = X_m$

$0 = \frac{1}{2}KX_m^2 + cte$

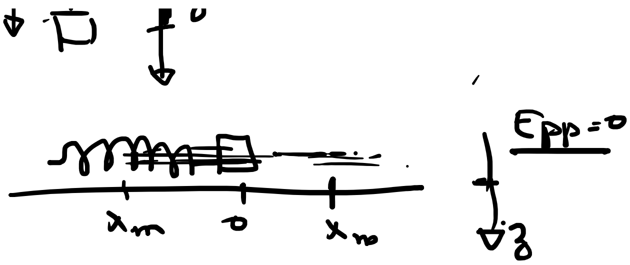


$E_{pe} = 0$ lorsque $x = x_m$

$0 = \frac{1}{2} K x_m^2 + cte$

$\Rightarrow cte = -\frac{1}{2} K x_m^2 \rightarrow$

d'où $E_p = \frac{1}{2} K x^2 - \frac{1}{2} K x_m^2$



- **Expression de la variation de l'énergie potentielle $\Delta Ep = \Delta E_{pe} + \Delta E_{pp}$**

ΔEp_e : Variation de l'énergie potentielle élastique	ΔEp_p : Variation de l'Energie potentielle de pesanteur
$\Delta Ep_e = \frac{1}{2}.K.(\Delta\ell_2^2 - \Delta\ell_1^2) = -W_{1\to2}(\vec{T})$	$\Delta Ep_p = m.g.(Z_2 - Z_1) = -W_{1\to2}(\vec{P})$

$W_{1\to2}(\vec{T}) = \frac{K}{2}(\Delta\ell_1^2 - \Delta\ell_2^2)$

Pour le cas de pendule élastique horizontal : $\Delta\ell = x$

$\Delta E_{pe} = \frac{1}{2} K (x_2^2 - x_1^2)$

$W_{1\to2}(\vec{P}) = mg(z_1 - z_2)$

Pour le cas de pendule élastique horizontal

$\Delta E_{pp} = 0$

- **Energie mécanique Em :**

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, Em = Ec + Ep

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K \Delta\ell^2 + mgz + C$$

* Pour le cas d'un pendule élastique horizontal.

$E_{pp} = 0$ et $x = \Delta\ell$

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K x^2 + C$$

si $C = 0$

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K x^2$$

Toujours, il faut lire les données de l'exercice.

- **Théorème de l'Energie mécanique**

$\Delta Em = \sum W_{1\to2}(\vec{F}_{NC})$ La variation de l'énergie mécanique du système est égale à la somme de tous les travaux de toutes les forces extérieures non conservatives s'exerçant sur le système entre deux points (1) et (2)

NB :

Forces conservatives toutes les forces dont le travail ne dépend que de la position initiale et de la position finale

$\vec{T}$: Tension d'un ressort	$\vec{P}$: Poids d'un corps
$W_{1\to2}(\vec{T}) = \frac{1}{2}.K.(\Delta\ell_1^2 - \Delta\ell_2^2)$	$W_{1\to2}(\vec{P}) = m.g.(Z_1 - Z_2)$

- **Conservation de l'énergie mécanique** $E_m = cte$

	$x = X_m.\cos(\omega_0.t+\varphi)$ ou $x = Xm.\cos(\frac{2\pi}{...}.t + \varphi)$	

❖ **Conservation de l'énergie mécanique** $\{E_m = c^{te}$

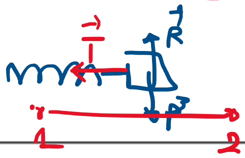
$$\Delta Em = \sum W_{1\to2}(\vec{F}_{NC})$$

Dans le cas d'un pendule élastique horizontal

$$\Delta Em = \sum W_{1\to2}(\vec{F}_{NC}) = W_{1\to2}(\vec{R}) = 0$$

$\Delta E_m = 0$

Donc $E_m = C^{te}$



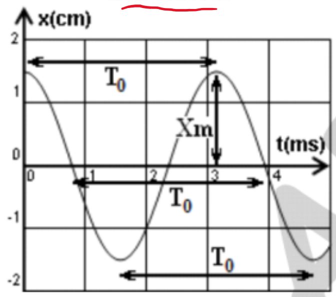
$\vec{F}_c$: $\vec{P}$ et $\vec{T}$

$\vec{F}_{NC}$: $\vec{R}$

$x = X_m.\cos(\omega_0.t+\varphi)$

ou $x = Xm.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)$

La courbe x=f(t) est sinusoïdale non amortit



Oscillateur libre et harmonique

Equation différentielle

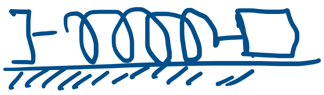
$$\ddot{x} + \frac{K}{m}.x = 0$$

Ou

$$\ddot{x} + \omega_0^2.x = 0$$

$E_m = c^{te}$

Par étude Energétique (cas d'absence des frottements). Etablir l'éq. diff du mvt :



$\frac{dE_m}{dt} = 0$ (car $E_m = c^{te}$).

$E_m = E_c + E_p$

$= E_c + E_{pe} + \cancel{E_{pp}} \to 0$

$\Delta l = x$

$E_m = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} Kx^2 + C$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{\cancel{2}} m . \cancel{2} \ddot{x}\dot{x} + \frac{1}{\cancel{2}} K . \cancel{2} . \dot{x} . x = 0$$

$= m\ddot{x}.\dot{x} + K.\dot{x}.x = 0$

$\dot{x}[m\ddot{x} + Kx] = 0$ Avec $\dot{x} \neq 0$

$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$ ou $\ddot{x} + \omega_0^2.x = 0$

à exploiter à x=0 ou V=V_m $Em = \frac{1}{2}.m.V_m^2$ ①	Se calcul souvent à x=X_m ou V=0 $Em = \frac{1}{2}.K.X_m^2$ ②

$E_c = \frac{1}{2}K(X_m^2 - x^2)$

$E_{pe} = \frac{1}{2}Kx^2$

$E_m = E_c + E_{pe}$

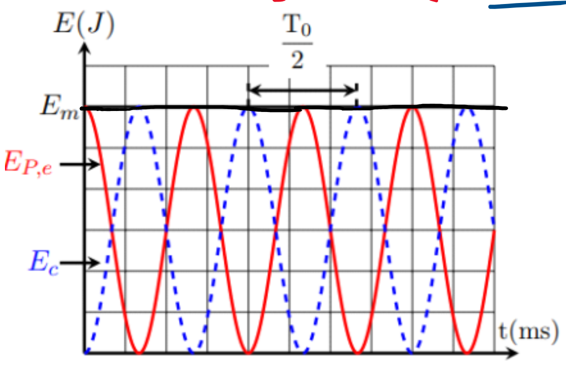
--Xm	0	Xm x
	$E_c = E_{cm}$ $E_{pe} = 0$	$E_c = 0$ $E_{pe} = \frac{1}{2}K X_m^2 = E_{pe\,max}$
Ec=0	Ec=Ec_m	Ec=0
V=0	V=V_m	V=0
Em Epemax	Em = Ecm	Em = Epemax

Autres relations à déduire :

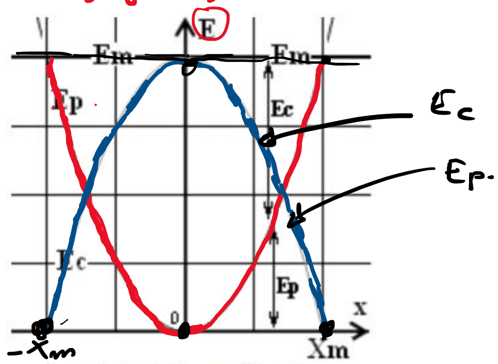
$$Ep = Em - Ec$$
$$Ep = \frac{1}{2}.m.V_m^2 - \frac{1}{2}.m.V^2$$
$$Ep = \frac{1}{2}.m.(V_m^2 - V^2)$$

$$Ec = Em - Ep$$
$$Ec = \frac{1}{2}.K.X_m^2 - \frac{1}{2}.K.x^2$$
$$Ec = \frac{1}{2}.K.(X_m^2 - x^2)$$

Les courbes energitiques (Frottements négligeables).

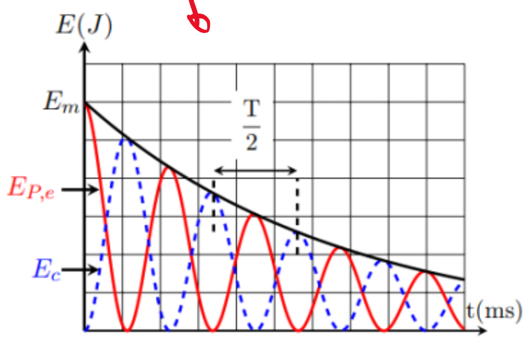


Variation d'énergie : frottements négligeables



- Au point x=Xm on a Em=Ep_{max}
- Au passage par la position d'equilibre x=0 on a Em=Ec_{max}

frottement non négligeable



Variation d'énergie : frottements non négligeables

$\Delta E_m < 0$

❖ La période des énergies

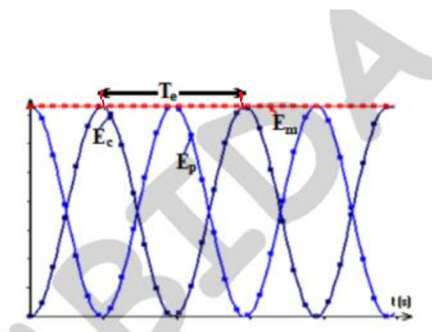
$E_c = f(t)$
$E_{pe} = f(t)$

* Énergie potentielle :

; $2.\cos^2 x = 1 + \cos(2.x)$

$$E_{pe} = \frac{1}{2} K.x^2 = \frac{1}{2} K\left(X_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\right)^2$$
$$= \frac{1}{2} K X_m^2.\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \times \frac{2}{2}$$

; $2.\sin^2 x = 1 - \cos(2.x)$



$$= \frac{1}{4} K X_m^2\left[1 + \cos\left(2 \times \frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\right]$$

$T_e = \frac{T_0}{2}$

$$= \frac{1}{4} K X_m^2\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\frac{T_0}{2}}.t + \varphi\right)\right]$$

$\frac{2}{T_0} = \frac{1}{\frac{T_0}{2}}$

Alors $T_e = \frac{T_0}{2}$

$$E_{pe} = \frac{1}{4} K X_m^2\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T_e}.t + \varphi\right)\right]$$

$Ep_e = \frac{1}{4} K X_m [1 - \cos(\frac{2\pi}{T_e} . t + \varphi)]$

*** Energie cinétique :**

$$Ec = \frac{1}{2} K.Xm^2.\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$$
$$Ec = \frac{1}{4} K.Xm^2.(1 - \cos\left(\frac{4\pi}{T_0}.t\right))$$
$$Ec = \frac{1}{4} K.Xm^2.(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T_e}.t\right))$$

à utiliser :

$2\sin^2 x = 1 - \cos(2x)$.

Ec :Energie cinétique

Très important

pendule de Torsion
" pesant
" simple

Rotation	Translation
$Ec = \frac{1}{2}.J_\Delta.\dot{\theta}^2$	$Ec = \frac{1}{2}.m.V^2$

p. élastique.

NB :

$$\mathbf{V = r.\dot{\theta}} \quad \text{donc}$$
$$Ec = \frac{1}{2}.J_\Delta.\left(\frac{V}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}.\frac{J_\Delta}{r^2}.V^2$$

Ep : Energie potentielle

Energie potentielle de Torsion	Energie potentielle élastique	Energie potentielle de pesanteur
$Ep_t = \frac{1}{2}C.\theta^2 + C'$	$Ep_e = \frac{1}{2}K.\Delta\ell^2 + C$	**Epp=m.g.Z.+C**

- $\Delta\ell = x$ pendule élastique horizontal
- $\Delta\ell = \Delta\ell \pm x$ " " vertical ou incliné.

Energie potentielle de pesanteur

1. $Ep_p = Ep_p(Z) = m.g.Z.+ C$
2. Déterminer l'expression de la constante C
   - Déterminer le plan horizontal référentielle de l'énergie potentielle Epp=0
   - Déterminer l'abscisse correspondant Z_0

     $Z = Z_0$ et $Ep_p(Z_0) = 0$

D'ou

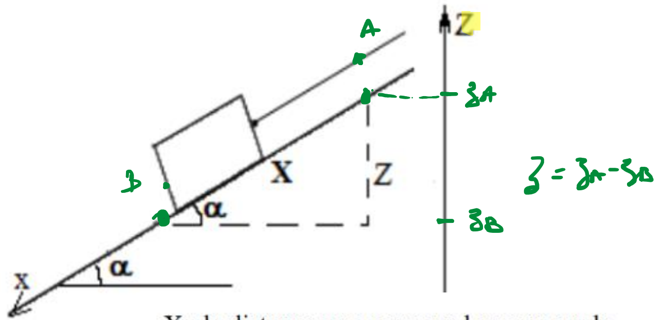
$$Ep_p(Z_0) = m.g.Z_0.+C=0$$

donc

$$C = - m.g.Z_0$$

3. On remplace C par son équivalent et on obtient alors

$$Ep_p= Ep_p(Z) = m.g.Z - m.g.Z_0$$
$$Ep_p= Ep_p(Z) = m.g.(Z - Z_0)$$



X : la distance que parcours le corps sur le plan incliné et elle constitue l'hypoténuse du triangle

Les deux axes sont opposés et
$$Z = - X.\sin(\alpha)$$

NB : si on change l'orientation de l'axe z

- L'expression de l'énergie potentielle

D'ou

$$Ep_p(Z_0) = m.g.Z_0.+C=0$$

donc

$$C = - m.g.Z_0$$

3. On remplace C par son équivalent et on obtient alors

$$Ep_p= Ep_p(Z) = m.g.Z - m.g.Z_0$$
$$Ep_p= Ep_p(Z) = m.g.(Z - Z_0)$$

X : la distance que parcours le corps sur le plan incliné et elle constitue l'hypoténuse du triangle

Les deux axes sont opposés et

$$Z = - X.\sin(\alpha)$$

NB : si on change l'orientation de l'axe z

- L'expression de l'énergie potentielle varie
  $$Ep_p= Ep_p(Z) = - m.g.Z.+ C$$
- La relation entre abscisse varie aussi
  $$Z = X.\sin(\alpha)$$

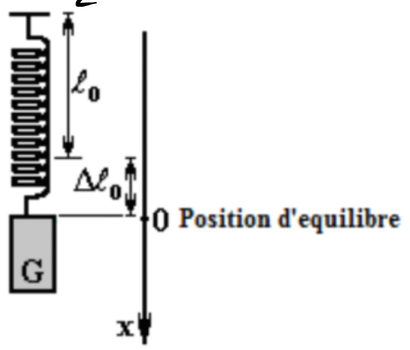
Energie potentielle élastique

1. $Ep_e = \frac{1}{2}.K.\Delta\ell^2 + C$ Cas : P.e. Horizontal $\Delta\ell = x$ ⇒ $Ep_e = \frac{1}{2}Kx^2 + C$

Déterminer l'expression de $\Delta\ell$ en fonction de x soit $\Delta\ell=\Delta\ell_0+x$

2. Déterminer la constante C
   - Déterminer le plan référentiel de l'Energie potentielle $Ep_e=0$
   - Déterminer l'abscisse correspondant x_0

$x = x_0$ et $Ep_e(x_0) = 0$



D'où $Ep_e(x_0) = \frac{1}{2}.K.(\Delta\ell_0 + x_0)^2 + C = 0$

Donc $C = -\frac{1}{2}.K.(\Delta\ell_0 + x_0)^2$

3. Remplacer dans l'expression de Ep_e

$$\mathbf{Ep_e = \frac{1}{2}.K.\Delta\ell^2 + C = \frac{1}{2}.K.(\Delta\ell_0 + x_0)^2 + C}$$

Cas référentiel	Quand le ressort n'est pas allongé	Passage de corps par - Sa position d'équilibre - Un point quand le ressort est allongé de $\Delta\ell_0$ - Un point avec une vitesse maximale
Expression de x_0 qd $Ep_e = 0$	$x_0 = - \Delta\ell_0$	$x_0 = 0$
Expression de la constante C	C = 0	$C = -\frac{1}{2}.K.(\Delta\ell_0)^2$
Expression de Ep_e	$\mathbf{Ep_e = \frac{1}{2}.K.(\Delta\ell_0 + x_0)^2}$	$\mathbf{Ep_e = \frac{1}{2}.K.(\Delta\ell_0 + x_0)^2 - \frac{1}{2}.K.(\Delta\ell_0)^2}$ $\mathbf{Ep_e = \frac{1}{2}.K.[(\Delta\ell_0 + x_0)^2 - (\Delta\ell_0)^2]}$