امتحان وطني تجريبي للبكالوريا 01
- الدورة العادية 2024 - الموضوع

EA-01

SSSSSSSSSSSSSSSSSS

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

إعداد : ذ. عبد العالي تضومانت

3	مدة الإنجاز		الرياضيات		المادة
7	المعامل		شعبة العلوم التجريبية مسلك العلوم الفيزيائية و مسلك علوم الحياة و الأرض ومسلك العلوم الزراعية		الشعبة و المسلك

INSTRUCTIONS GENERALES

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques	2 points
Exercice 2	calcul probabilités	3 points
Exercice 3	La géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 4	Nombres complexes	3 points
Problème	Étude des fonctions	9 points

- On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z
- **ln** désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 : (2 pts)

1- Soit f une fonction définie sur $[2,3]$ par $f(x) = x + \frac{1}{e^{x-2}} - 1$

0.5 pt **a)** Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0,2]$

0.25 pt **b)** Montrer que : $(\forall x \in [2,3])$; $f(x) \leq x$

2- On considère la suite $(U)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\begin{cases} U_0 = \frac{5}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

0.5 pt **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $2 \leq U_n \leq 3$

0.25 pt **b)** Montrer la suite (U_n) est décroissante. $\Big($Utiliser les résultats de la question 1-b)$\Big)$

0.5 pt **c)** Déduire que la suite $(U)_n$ est convergente, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 2 : (3 pts)

Une urne U_1 contient quatre boules rouges portants les nombres 1 , 1 , 2 , 2 , quatre boules vertes portants les nombres 2 , 2 , 2 , 2 et une boule noire porte le nombre 3

Et une autre urne U_2 contient six boules rouges portants les nombres 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 2 , une boule vertes porte le nombre 2 et une boule noire porte le nombre 3

Toutes les boules sont indiscernables au toucher

On considère l'expérience suivante qui consiste à tirer au successivement et sans remise deux boules de l'urne U_1

On considère les événements suivants :

A : " Obtenir deux boules de même couleur "

B : " Obtenir deux boules portent des nombres pairs "

C : " Obtenir deux boules portent des nombres dont la somme égale à 4 "

0.25 pt **1- a)** Montrer que : $P(A) = \frac{1}{3}$

1 pt **b)** Calculer $P(B)$ et $P(\overline{A} \cap B)$

0.75 pt **2-** Montrer que : $P(C) = \frac{17}{36}$, puis Calculer $P(A/C)$

3- Dans cette question **On tire une boule de l'urne U_1, et on note le nombre n qu'elle porte, puis on tire simultanément n boules dans l'urne U_2**

On considère les événements suivants :

E : " On tire exactement deux boules de même couleur et portent même nombres "

F : " Obtenir exactement quatre boules portent des nombres impairs "

1 pt Calculer $P(E)$ et $P(F)$

Exercice 3 : (3 pts)

Dans un espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1,-1,1)$; $B(1,-2,-1)$, $C(4,1,1)$, $D(-4,-3,2)$ et $\Omega(-1,-1,-4)$

Soit (S) une sphère d'équation : $x^2+y^2+z^2+2x+2y+8z+4=0$ et a un réel

0.5 pt **1-** **a)** Montrer que $(1+a)x+(a-2)y+3z+7a-8=0$ est une équation cartésienne du plan (P) passant par D d'un vecteur normal $\overrightarrow{n}(1+a, a-2, 3)$.

0.25 pt **b)** Montrer que : $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=1+2t \end{cases}$ $/ \ (t \in \mathbb{R})$ est un représentation paramétrique de la droite (AB)

0.25 pt **c)** Déterminer la valeur de a pour lequel le point B appartient au plan (P)

0.5 pt **d)** En déduire que B est un point d'intersection de la droite (AB) et le plan (P)

0.5 pt **2-** **a)** Montrer que le point Ω est le centre de la sphère (S), puis déterminer sa rayon

0.5 pt **b)** Montrer que le plan (P) est tangente à la sphère (S) en B

0.5 pt **3-** Montrer que la droit (AB) coupe la sphère (S) selon deux point B et H, puis déterminer les coordonnées du point H

Exercice 4 : (3 pts)

0.5 pt **1-** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(\overline{z}-1+2i)\left(z^2-2z+5\right)=0$

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $O, \vec{e_1}, \vec{e_2}$, on considère les points A , B , C et D d'affixes respective : $a=3+2i$; $b=-3$, $c=1-2i$ et $d=\sqrt{2}+3+(2-3\sqrt{2})i$

0.25 pt **2-** **a)** Vérifier que : $\dfrac{a+\overline{c}}{4\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

0.5 pt **b)** Écrire sous forme trigonométrique le nombre $\dfrac{a+\overline{c}}{4\sqrt{2}}$

0.25 pt **c)** Déterminer la valeur de $\left(\dfrac{a+\overline{c}}{4\sqrt{2}}\right)^{2024}$

0.5 pt **3-** Écrire le nombre $\dfrac{a-c}{b-c}$ sous forme exponentielle, puis déduire la nature du triangle ABC

0.25 pt **4-** **a)** Montrer que : $m=\sqrt{2}-3-3\sqrt{2}i$ est l'affixe du point M l'image du point C par la rotation R_0 de centre B d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$

0.25 pt **b)** Montrer que A est le centre de rotation R_1 d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ qui transforme C en D

0.5 pt **c)** En déduire la nature du triangle MCD

Problème : (9 pts)

Partie I :

Soit g une fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)=\sqrt{x}+1-e^{\sqrt{x}}$

0.5 pt **1-** Calculer $g^{'}(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$, puis dresser le tableau de variation de g sur $[0,+\infty[$

0.25 pt **2-** En déduire que $g(x)\leq 0$, pour tout $x\in[0,+\infty[$

Partie II :

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{-e^{\sqrt{x}}+1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}+2 & ;\ x>0 \\ f(x)=x^2\ln(1-x)-x^2+1 & ;\ x\leq 0 \end{cases}$

$(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ $\left(||\vec{i}||=||\vec{j}||=1.5cm\right)$

0.25 pt **1-** Étudier la continuité de f en $x_0=0$; **(Prend** $t=\sqrt{x}$**)**

0.25 pt **2- a)** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

0.5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, puis donner une interprétation géométrique de ce résultat

0.5 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, puis déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique au voisinage de $-\infty$

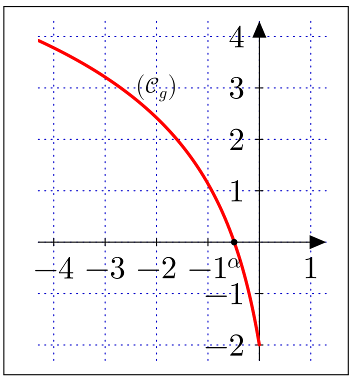
0.25 pt **3- a)** Vérifier que : $(\forall x>0)$; $\dfrac{f(x)-1}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1-e^{\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{x}+1\right)$

0.75 pt **b)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-1}{x}=+\infty$; et $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-1}{x}=0$
(**On donne :** $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$), puis donner une interprétation géométrique de ces résultats obtenus

0.25 pt **4- a)** Montrer que : $(\forall x\in]0,+\infty[)$; $f^{'}(x)=\dfrac{(\sqrt{x}-1)\,g(x)}{2x\sqrt{x}}$

0.5 pt **b)** En déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0,1]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]1,+\infty[$

5- Dans la figure ci-contre $(\mathcal{C}_h)$ est la courbe représentative de la fonction dérivée seconde de la fonction f sur $]-\infty,0[$ dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit α un réel strictement négatif tel que $-1<\alpha<0$



0.5 pt **a)** Montrer que pour tout $x\in]-\infty,0[$; $f^{'}(x)=x\left(2\ln(1-x)-\dfrac{x-2}{x-1}\right)$

0.25 pt **b)** Étudier le signe de $f''(x)$ sur l'intervalle $]-\infty, 0[$

0.5 pt **c)** En déduire la concavité de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ en précisant l'abscisse de se point d'inflexion.

0.5 pt **d)** Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$, puis dresser le tableau de variation de f' sur $]-\infty, 0[$

0.5 pt **e)** Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ une unique solution β dans $]-\infty, \alpha[$ **(On donne : $f'(\alpha) = 0.43$)**, puis déduire que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty, \beta]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[\beta, 0]$

0.25 pt **6-** Dresser le tableau de variations de f

0.75 pt **7-** Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormée $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. $\Big($ On donne : $\alpha \simeq \dfrac{1}{2}$; $f(\alpha) = 0.86$; $\beta = -1.09$, $f(\beta) = 0.69$ et $a = 6.31$ est l'abscisse du point d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et l'axe des abscisses $\Big)$

0.25 pt **8-** **a)** Vérifier que : $(\forall x \in [\alpha, 0])$; $\dfrac{x^3}{x-1} = \dfrac{1}{x-1} + x^2 + x + 1$

0.5 pt **b)** Calculer : $\displaystyle\int_\alpha^0 \frac{x^3}{x-1}\mathbf{d}x$,

0.5 pt **c)** Utiliser une intégration par partie montrer que :

$$\int_\alpha^0 x^2 \ln(1-x)\mathbf{d}x = \frac{(1-\alpha^3)\ln(1-\alpha)}{3} + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{(\alpha-1)^3+1}{9}$$

0.5 pt **d)** Calculer en fonction de α l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (Δ) d'équation : $y = 1$ et les deux droites $x = \alpha$ et $x = 0$