Les ensembles

Définition : un ensemble est une collection d'éléments, souvent on note un ensemble par E.

Remarques :

- Si x est un élément de E, on note $x \in E$
- $\emptyset$ est l'ensemble vide (un ensemble qui ne contient aucun élément)

- Ecriture en extension et en compréhension

→ en extension : $E = \{a, b, c, d, \dots\}$

→ en compréhension : $E = \{x \in \mathbb{R} \;/\; 1 \leq x \leq 2\}$

Exercice 1 (Série 1)

écrire en extension les ensembles suivantes

$E_1 = \{k \in \mathbb{Z} / |k+1| \leq 2\}$

$E_2 = \{x \in \mathbb{Z} / k^2 \leq 7\}$

$E_3 = \{k \in \mathbb{Z} / 7 \leq k^2 \leq 35\}$

$E_4 = \{(x;y) \in \mathbb{N}^2 / (x+y)(x-y) = 32\}$

$E_5 = \{(x;y) \in \mathbb{N}^2 / x^2 - y^2 = 15\}$

$E_6 = \{(x;y) \in \mathbb{Z}^2 / 0 \prec 2xy \leq 7\}$

$E_7 = \left\{x \in \mathbb{Z}^* / (\forall n \in \mathbb{N}) \frac{1}{x} \geq \frac{n}{n+1}\right\}$

$E_8 = \{x \in \mathbb{Z} / (\forall n \in \mathbb{N}) x^2 \leq 4 + n^3\}$

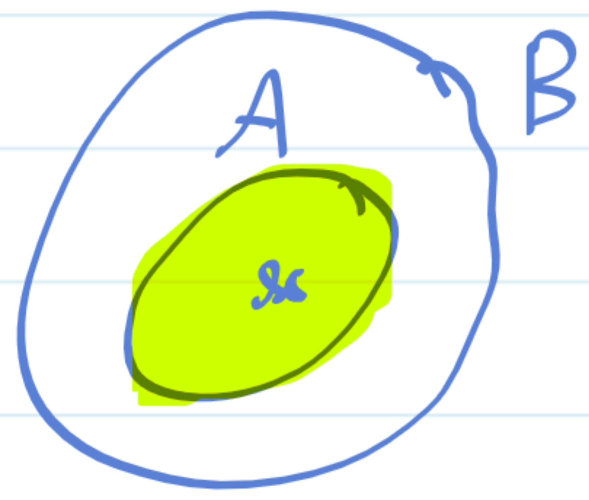
$E_9 = \{(x;y) \in \mathbb{N}^2 / 0 \prec 2x \leq y \leq 5\}$

$E_{10} = \left\{x \in \mathbb{Q} / x = \frac{p}{q} \text{ et } p; q \in \mathbb{N}^* \text{ Vérifiant } p \leq 3q \leq 11\right\}$

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{k \in \mathbb{Z} \;/\; |k+1| \leq 2\} \\
&= \{k \in \mathbb{Z} \;/\; -2 \leq k+1 \leq 2\} \\
&= \{k \in \mathbb{Z} \;/\; -3 \leq k \leq 1\} \\
&= \{-3, -2, -1, 0, 1\}
\end{aligned}$$

Egalité, inclusion



- $E \subset F \iff (x \in E \Rightarrow x \in F)$

- $E = F$ Si et Seulement Si $x \in E \iff x \in F$

  c.à.d: $E \subset F$ et $F \subset E$

Ensemble des parties d'un ensemble

Exemple: $E = \{1, 2, 3\}$

Les parties de E sont : $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}$
$\{1, 2, 3\}$

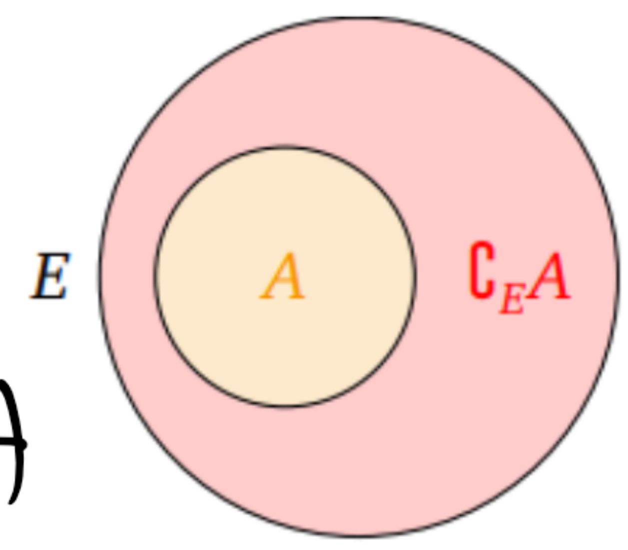
l'ensemble des parties de E, noté $\mathcal{P}(E)$:

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Définition:

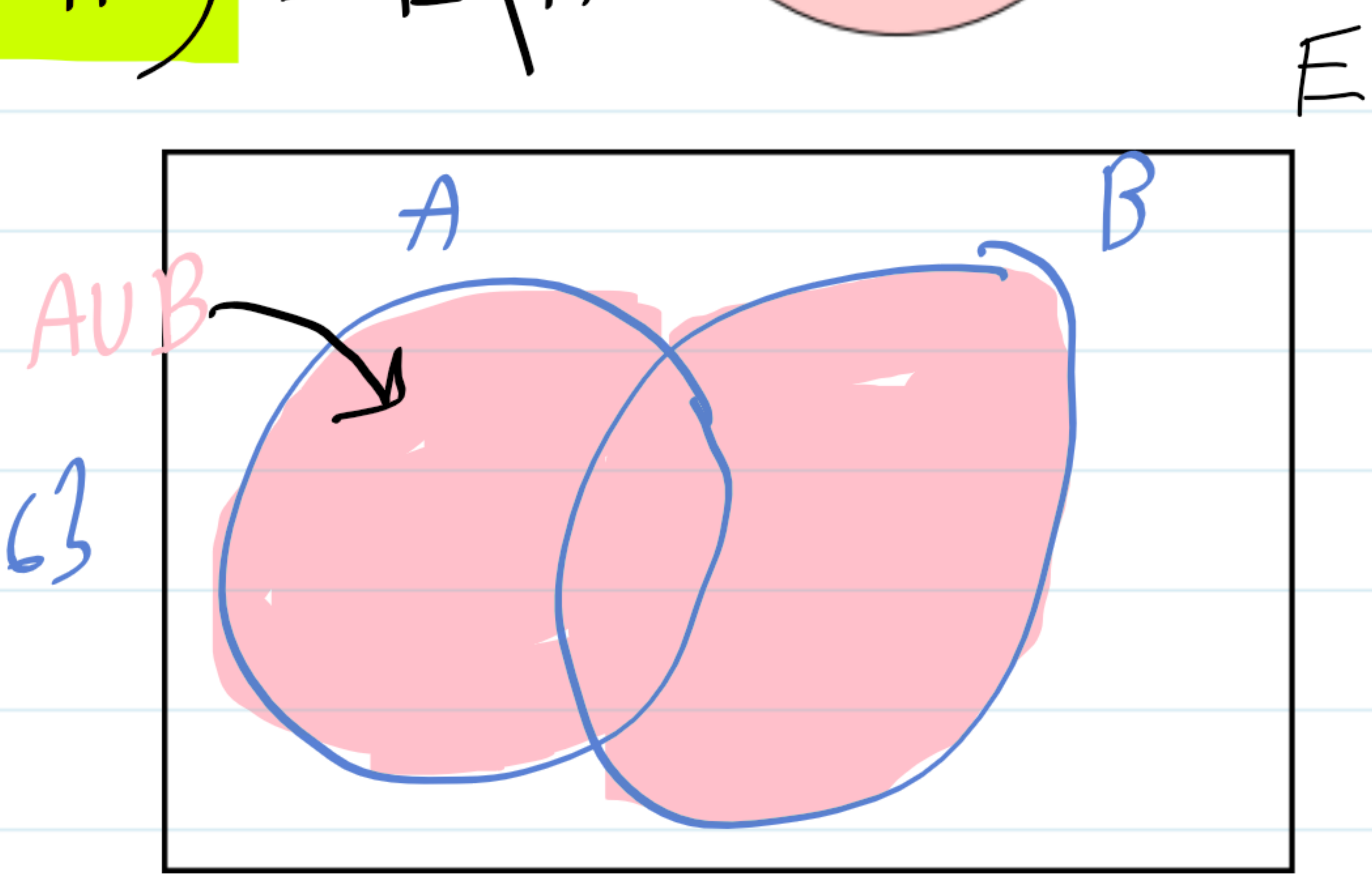
$$\mathcal{P}(E) = \{X \ / \ X \subset E\}.$$

- complémentaire de E (C_E^A)



$$\overline{A} = A^c = C_E^A = \{x \in E \ / \ x \notin A\} = E \setminus A$$

- Union de deux ensembles:



Exemple: $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$

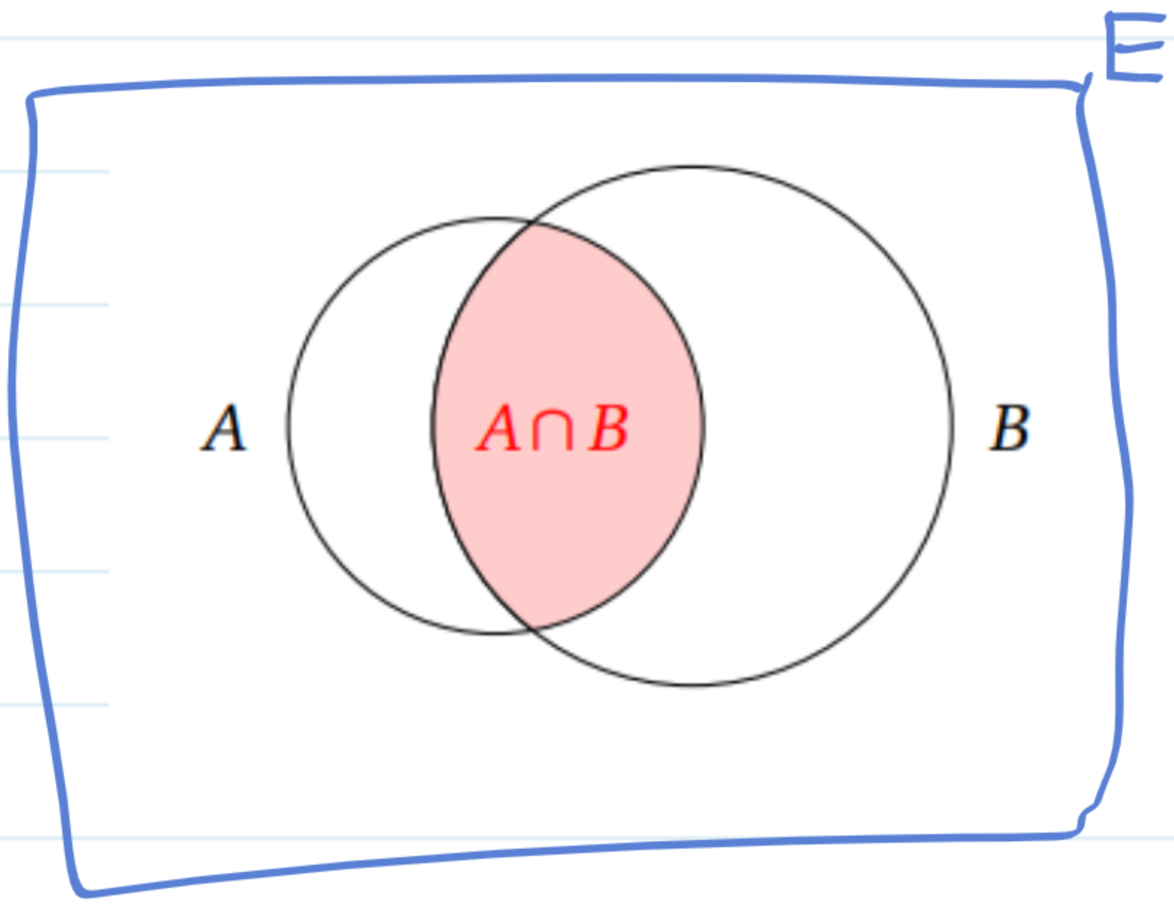
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

Définition :

$$A \cup B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

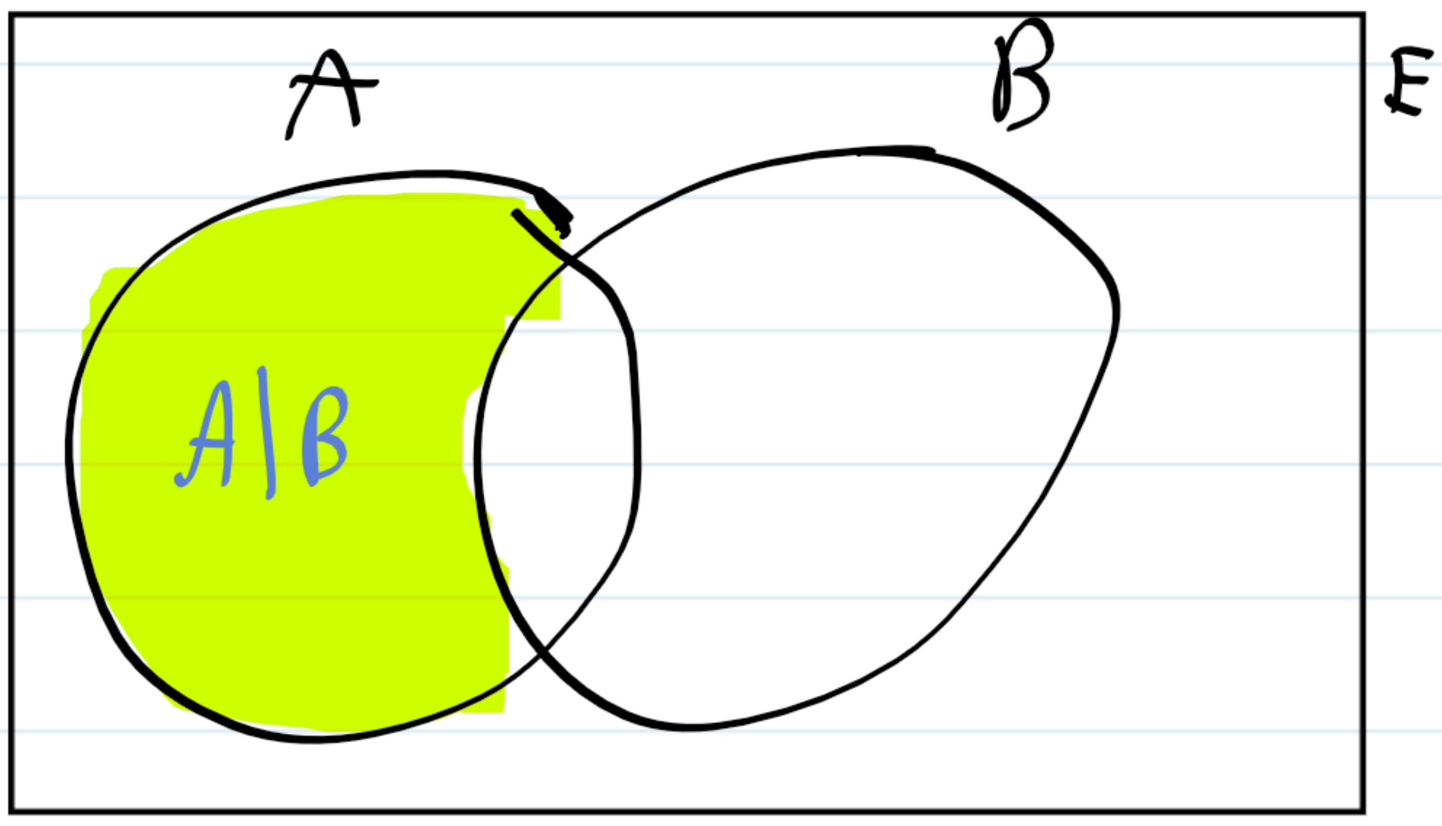
- l'intersection :

$$A \cap B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ et } x \in B\}$$



- $A \setminus B$ (A privé de B)

$$A \setminus B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ et } x \notin B\}$$



- Règles de calcul

Soient A, B, C des parties d'un ensemble E.

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (on peut donc écrire $A \cap B \cap C$ sans ambigüité)
- $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap A = A$, $A \subset B \iff A \cap B = A$

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (on peut donc écrire $A \cup B \cup C$ sans ambigüité)
- $A \cup \varnothing = A$, $A \cup A = A$, $A \subset B \iff A \cup B = B$

- $\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$
- $\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$

- $\complement(\complement A) = A$ et donc $A \subset B \iff \complement B \subset \complement A$
- $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ $\quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ $\quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

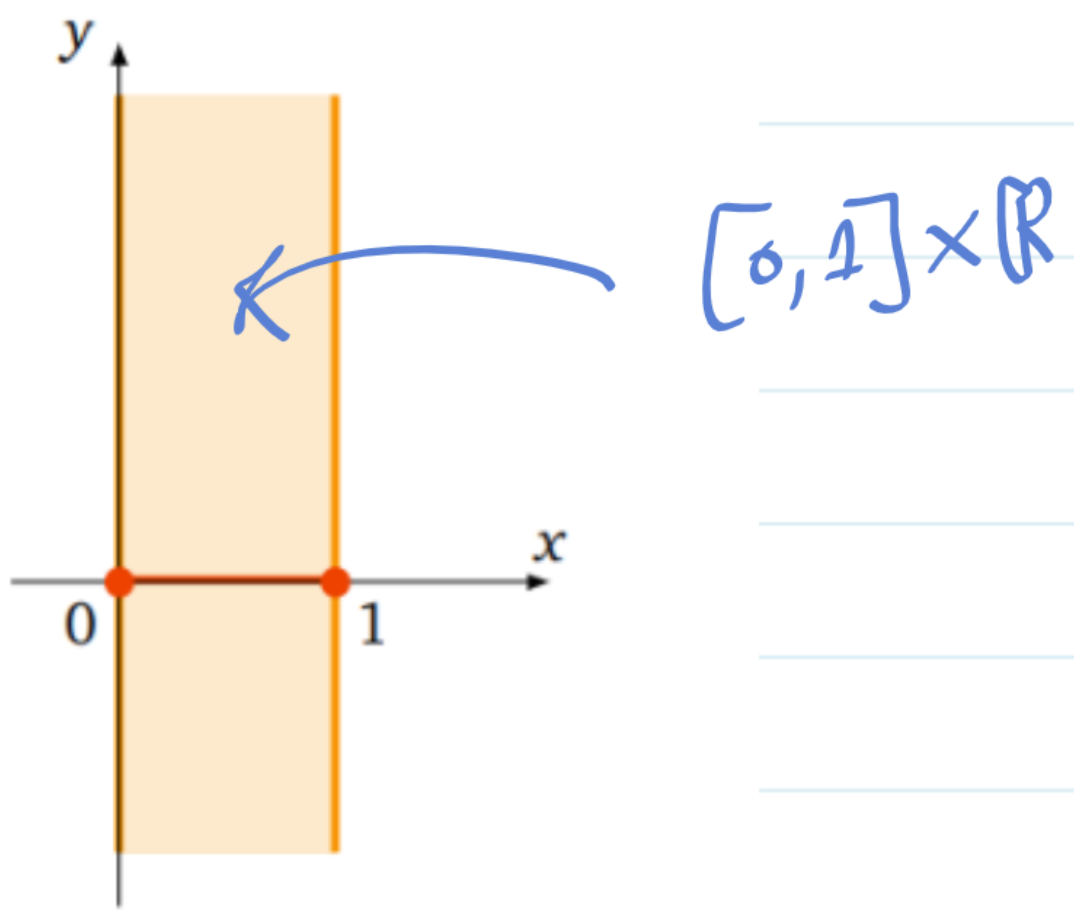
- Le produit cartésien :

Exemple : $E = \{1, 2\}$; $F = \{3, 4\}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{produit cartésien.}}}{E \times F} = \{(1,3); (1,4); (2,3); (2,4)\}$$

$$E \times F = \{(x,y) \;/\; x \in E,\ y \in F\}$$

1. Vous connaissez $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.
2. Autre exemple $[0,1] \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, y \in \mathbb{R}\}$



3. $[0,1] \times [0,1] \times [0,1] = \{(x,y,z) \mid 0 \leqslant x, y, z \leqslant 1\}$