

II- Modélisation de la suspension d'une voiture :

La suspension d'une voiture est composée de ressorts et d'amortisseurs, qui assurent le confort et la sécurité des passagers.

Les ressorts se compriment et se dilatent, tandis que les amortisseurs amortissent les oscillations.

On modélise la voiture par un pendule élastique vertical amorti, comme l'indique la figure 2.

Le pendule est constitué d'un corps de masse égale à celle de la voiture $M = 1353 \text{ kg}$, de centre de gravité G , fixé à un ressort vertical, à spires non jointives, de raideur $K = 6.10^5 \text{ N.m}^{-1}$ et de masse négligeable.

L'amortisseur applique sur le corps (S), au cours des oscillations, des frottements visqueux.

1- Etude énergétique de l'oscillateur {corps (S) + Ressort}, non amorti :

On considère que l'oscillateur {corps (S) + Ressort} est non amorti et que son énergie mécanique se conserve.

A l'équilibre, la position G_0 du centre d'inertie de (S), appartient au même plan horizontal contenant le point O , origine du repère vertical ascendant (O, \vec{k}) , et où le ressort est comprimé de $|\Delta \ell_0|$.

L'oscillateur est susceptible d'effectuer des oscillations verticales autour de sa position d'équilibre G_0 . On repère à chaque instant, la position du centre d'inertie G de (S), au cours de ses oscillations suivant l'axe (O, \vec{k}) , par son ordonnée z (Figure 3).

- On choisit le plan horizontal contenant l'origine O du repère comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur ($E_{pp} = 0$).
- On choisit l'état où le ressort est non déformé comme état de référence de l'énergie potentielle d'élasticité ($E_{pe} = 0$).

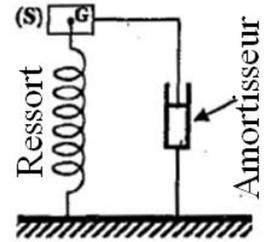


Figure 2

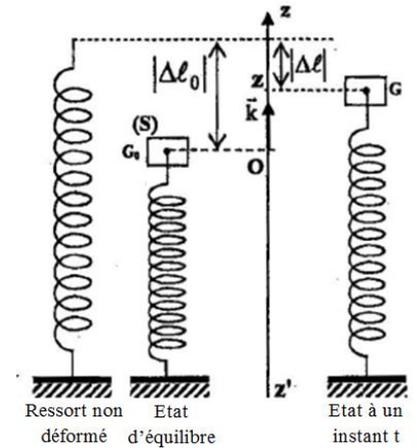


Figure 3

0,25 **1-1-** Trouver, à l'équilibre, la relation entre $|\Delta\ell_0|$, M, K et g (intensité de pesanteur).

0,5 **1-2-** Montrer que l'expression de l'énergie potentielle d'élasticité s'écrit :
 $E_{pe} = \frac{1}{2} K (|\Delta\ell_0| - z)^2$.

1-3- L'énergie mécanique E_m de l'oscillateur est la somme de son énergie potentielle de pesanteur et de son énergie potentielle d'élasticité et de son énergie cinétique.

0,75 **a-** Exprimer l'énergie mécanique E_m en fonction de : M, z, $\frac{dz}{dt}$, K et $|\Delta\ell_0|$.

0,5 **b-** En déduire l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie G du corps (S).

2- Dans cette partie, on suppose que le corps (S) subit de la part de l'amortisseur, des frottements visqueux modélisés par une force d'expression $\vec{f} = -h \frac{dz}{dt} \vec{k}$ où h est un constante positive, appelée coefficient d'amortissement, et qui caractérise la qualité de l'amortisseur.

On montre dans ce cas que l'équation différentielle vérifiée par l'ordonnée z du centre d'inertie G s'écrit sous la forme : $M \frac{d^2z}{dt^2} + h \frac{dz}{dt} + Kz = 0$.

0,75 **2-1-** Exprimer $\frac{dE_m}{dt}$ en fonction de la constante h et $\frac{dz}{dt}$. Commenter le résultat.

0,75 **2-2-** Sur le document de la figure 4, sont représentées les courbes (a) et (b) modélisant les variations en fonction du temps, de l'ordonnée z des centres d'inertie de deux corps (S₁) et (S₂) modélisant deux voitures ① et ② de même type, ne différenciant que par la qualité des amortisseurs.

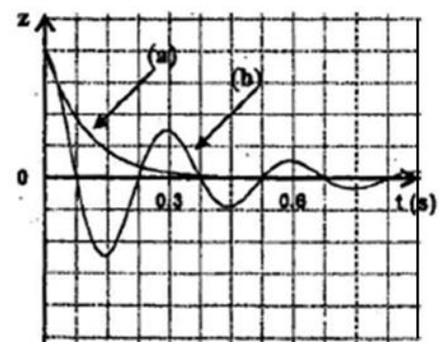


Figure 4

Les coefficients de frottement relatifs successivement aux voitures ① et ② sont tel que : $h_2 > h_1$.

Préciser laquelle des deux voitures offre plus de sécurité au conducteur, en précisant la courbe correspondante. Justifier votre réponse.