Le pendule pesant représenté sur la figure 1 est constitué d'un disque de masse m_1 , fixé à l'extrémité inferieur A d'une tige OA de masse m_2 avec $m_1 + m_2 = 200g$.
Le pendule pesant peut effectuer un mouvement de rotation oscillatoire autour d'un axe fixe (Δ) horizontal passant par l'extremité O de la tige.
Le centre d'inertie G du pendule pesant est situé sur la tige à une distance OG=d=50 cm de O.
Le moment d'inertie du pendule pesant par rapport à l'axe (Δ) est $J_\Delta = 9,8.10^{-2}$ kg.m². On néglige tous les frottements .

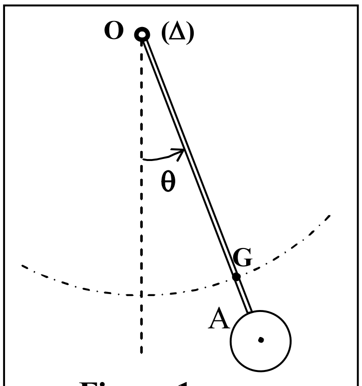

Figure 1

On prend pour les petits angles : $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$ et $\sin\theta \approx \theta$ avec θ en radian . Et on prend $\pi^2 = 10$

1- Au niveau de la mer où l'accélération de la pesanteur est $g_0 = 9,8$ m.s^{-2}, on écarte le pendule pesant de sa position d'équilibre stable d'un angle $\theta_0 = \frac{\pi}{18}$rad et on le libère sans vitesse initiale à l'instant t=0. On repère à chaque instant la position du pendule pesant par l'abscisse angulaire θ mesurée à partir de sa position d'équilibre stable (figure 1).

0,25 **1.1-** En appliquant la relation fondamentale de la dynamique relative à la rotation du pendule pesant , déterminer l'équation différentielle que vérifie l'angle θ dans le cas de faibles oscillations .

0,5 **1.2-** Trouver, en fonction de J_Δ, d, m_1, m_2 et g_0 l'expression de la période propre T_0 du pendule pour que la solution de l'équation différentielle soit $\theta = \theta_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$. Calculer T_0.

0,75 **1.3-** En appliquant la deuxième loi de Newton et en utilisant la base de Freinet $(G,\vec{u},\vec{n})$(figure 2) , trouver l'expression de l'intensité R de la force exercée par l'axe (Δ) sur le pendule pesant au moment de passage du pendule par sa position d'équilibre stable en fonction de m_1,m_2, d , g_0 , θ_0, et T_0.
Calculer R.

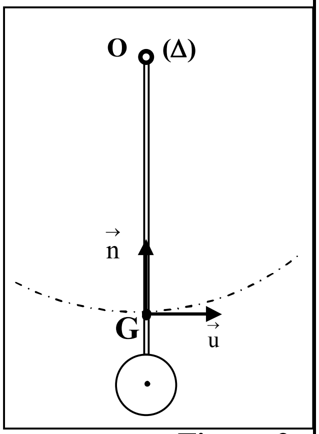

Figure 2

2- Dans une région montagneuse où l'accélération de la pesanteur est g=9,78 m.s^{-2}, la période propre du pendule pesant augmente de ΔT.
Pour corriger le décalage temporel Δt , on utilise un ressort spiral équivalent à un fil de torsion dont la constante de torsion est C .
On relie l'une des extrémités du ressort spiral à l'extrémité O de la tige et on fixe l'autre extrémité du ressort à un support fixe de telle façon que le ressort spiral soit non déformé lorsque le pendule pesant est dans sa position d'équilibre stable (figure3).
On choisit le niveau horizontal passant par G_0 centre d'inertie du pendule pesant dans sa position d'équilibre stable , comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur et la position dans laquelle le ressort spiral est non déformé , comme référence de l'énergie potentielle de torsion . le point G_0 correspond à l'origine du repère O'z orienté vers le haut (figure 3).

0,5 **2.1-** Montrer dans le cas de petites oscillations et à une date t , que l'énergie mécanique de l'oscillateur ainsi constitué s'écrit sous la forme : $E_m = a.\dot{\theta}^2 + b.\theta^2$ en précisant les expressions de a et de b en fonction des données utiles de l'exercice .

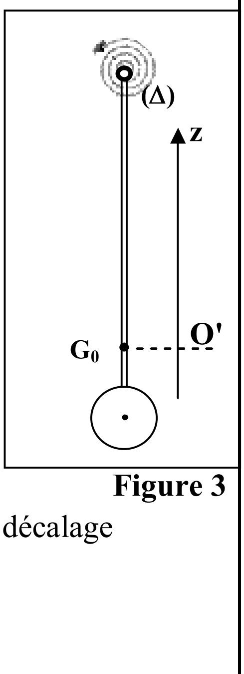

Figure 3

0,5 **2.2-** En déduire l'équation différentielle du mouvement que vérifie l'angle θ en fonction de a et b .

0,75 **2.3-** Trouver l'expression de la constante de torsion C qui convient à la correction du décalage temporel ΔT en fonction de m_1, m_2, d, g, et g_0 . Calculer C .