



Lycée d'Excellence de Benguerir Etablissement privé	LYCEE D'EXCELLENCE DE BENGUERIR	ثانوية التميز التأهيلية الخصوصية ابن جرير
Niveau 2SM A&B	Examen blanc N°2	19/06/2020
Mathématiques		Durée :4h coefficient : 9

NB : - L'épreuve comporte 5 exercices
- Le candidat doit choisir entre l'exercice 1 ou 2 et les exercices 3 ; 4 et 5 sont obligatoires

- La durée de l'épreuve est de 4 heures
- les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat
- L'exercice 1 se rapporte aux structures algébriques(3.5 points)
- L'exercice 2 se rapporte à l'arithmétique(3.5 points)
- L'exercice 3 se rapporte aux nombres complexes(3.5 points)
- L'exercice 4 se rapporte à l'analyse(3.25 points)
- L'exercice 5 se rapporte à l'analyse(9.75 points)
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Exercice 1 (3.5 points)

Page 2/4

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel de dimension 4

et que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif

Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, on considère l'ensemble $E_a = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -ay \\ y & x \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

0.5 1) a) Montrer que $(E_a, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel

0.5 b) On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $(I; A)$ est une base de E_a

0.25 2) a) Calculer A^2 , puis montrer que E_a est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

0.75 b) Montrer que $(E_a, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire

3) Dans cette question on suppose que $a < 0$:

0.5 Montrer que $A^2 + aI = O$, puis en déduire que $(E_a, +, \times)$ n'est pas un corps

4) Dans cette question on suppose que $a > 0$:

On considère l'application φ de $\mathbb{C}$ vers E_a qui à tout nombre complexe $z = x + iy$ de $\mathbb{C}$ fait correspondre la matrice $M(x, \frac{-y}{\sqrt{a}})$ de E_a

0.5 a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}, \times)$ vers $(E_a, \times)$

0.5 b) En déduire que $(E_a, +, \times)$ est un corps commutatif

Exercice 2 (3.5 points)

les parties I) et II) sont indépendantes

Partie I) Soient p et q deux nombres premiers positifs distincts et différents de 5

On considère dans $\mathbb{Z}$; l'équation (E) : $ax \equiv 1[pq]$ avec $a \in \mathbb{N}^*$

0.5 1) Montrer que si (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}$ alors $a \wedge p = 1$ et $a \wedge q = 1$

2) Dans cette question on suppose que $a \wedge p = 1$ et $a \wedge q = 1$

0.75 a) Montrer que $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1[pq]$

0.5 b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{Z}) : ax \equiv 1[pq] \Leftrightarrow x \equiv a^{(p-1)(q-1)-1} [pq]$

0.5 3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $5x \equiv 1[26]$

Partie II) soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2

0.5 1) Montrer que $2 \times 10^n + 1 \equiv 0[3]$

0.75 2) Soit N l'entier naturel écrit dans le système décimal par : $N = \underbrace{44\dots 488\dots 89}_{n \text{ fois } 4 \text{ et } (n-1) \text{ fois } 8}$

Montrer que $9N = (1 + 2 \times 10^n)^2$ en déduire que N est un carré parfait

Exercice 3 (3.5 points)

Page 3/4

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : \frac{1}{m}z^2 + (1 - 3i)z - 4m = 0$ avec $m \in \mathbb{C}^*$

- 0.25 1) a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $8 - 6i$
- 0.5 b) Déterminer en fonction de m ; z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) tel que $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{m}\right) < 0$
- 0.5 c) Calculer $\arg(z_1)$ et $\arg(z_2)$ en fonction de $\arg(m)$
- 2) On considère les points M_1, M_2, M et D d'affixes respectives z_1, z_2, m et $1 + 3i$
- 0.5 a) Montrer que le triangle OM_1M_2 est rectangle en O et que $OM_1 = 2OM_2$
- 0.5 b) Montrer que si $\arg(z_1 + z_2) \equiv 0[\pi]$, alors les points O, M et D sont alignés.
- 0.5 c) Déterminer l'ensemble des points M tel que $\arg(z_1 + z_2) \equiv 0[\pi]$
- 3) Le point M'_1 est l'image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$
- M'_2 est l'image de M_2 par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$
- 0.75 Montrer que les points M_1, M_2, M'_1 et M'_2 sont cocycliques.

Exercice 4 (3.25 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2

On considère la fonction numérique g_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}$

- 0.5 1) Montrer que pour tout $n \geq 2$ il existe un réel unique β_n de l'intervalle $]0, 1[$ tel que $g_n(\beta_n) = 0$
- 0.75 2) Montrer que la suite $(\beta_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante, en déduire qu'elle est convergente.
- On pose : $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n$.
- 0.25 3) a) Vérifier que pour $t \neq 1$ on a : $1 + t + \dots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$.
- 0.5 b) En déduire que $\beta_n + \frac{\beta_n^2}{2} + \dots + \frac{\beta_n^n}{n} = -\ln(1 - \beta_n) - \int_0^{\beta_n} \frac{t^n}{1-t} dt$
- 0.25 c) Montrer que $(\forall n \geq 2) \quad 1 + \ln(1 - \beta_n) = - \int_0^{\beta_n} \frac{t^n}{1-t} dt$
- 0.5 4) a) Montrer que $(\forall n \geq 2) \quad 0 \leq \int_0^{\beta_n} \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-\beta_n)}$
- 0.5 b) En déduire que $l = 1 - e^{-1}$

Voir page suivante SVP



Soit n un entier naturel non nul .

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f_n(x) = \frac{e^{nx}}{x^2} - 1$

Partie I) : Dans cette partie on prend $n = 1$.

- 0.75 1)a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x)$
- 0.5 b) Étudier les branches infinies de (C_{f_1}) la courbe représentative de f_1 dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 0.5 2) Calculer $f_1'(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}^*$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}^*$.
- 0.5 3)a) Soit h la restriction de f_1 sur $]0, 2]$. Montrer que h est une bijection de $]0, 2]$ vers J à déterminer.
- 0.5 b) Montrer que h^{-1} est dérivable sur $\left[\frac{e^2}{4} - 1, +\infty\right[$ puis calculer $(h^{-1})'(e - 1)$
- 0.75 4) Construire (C_{f_1}) et $(C_{h^{-1}})$ la courbe représentative de la fonction h^{-1} dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$
(On donne $\frac{e^2}{4} \simeq 3.42$)

Partie II) :

- 0.5 1) Étudier les variations de f_n sur les intervalles $] - \infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
- 0.25 2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n dans l'intervalle $] - 1, 0[$
- 0.5 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $W_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\alpha_k^2}{k^2}$.
- Montrer que (W_n) est croissante et qu'elle est convergente. (Remarquer que : $\forall k \geq 2 \quad \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$)

Partie III) :

On considère la fonction F définie par
$$\begin{cases} F(x) = x \int_x^{2x} \frac{e^t}{t^2} dt; & x \neq 0 \\ F(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- 0.25 1) Vérifier que F est définie sur $\mathbb{R}$
- 0.5 2) a) Montrer que : $(\forall x > 0) \quad \frac{e^x}{2} \leq F(x) \leq \frac{e^{2x}}{2}$ et que $(\forall x < 0) \quad \frac{e^{2x}}{2} \leq F(x) \leq \frac{e^x}{2}$
- 0.25 b) En déduire que F est continue au point 0.
- 0.5 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$
- 0.5 4)a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad F(x) = e^x - \frac{e^{2x}}{2} + x \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$
- 0.5 b) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sur $] - \infty, 0[$ et que :
- $$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad F'(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$$
- 5)a) Montrer que :
- 0.5 $(\forall x > 0) : \quad e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \ln 2$ et que $(\forall x < 0) \quad e^{2x} \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^x \ln 2$
- 0.5 b) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$
- 0.5 6)a) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad F(x) - \frac{1}{2} = -\frac{(e^x - 1)^2}{2} + x \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$
- 0.5 b) En déduire que F est dérivable au point 0.
- 0.5 c) Dresser le tableau de variations de F .

- Fin -

