Série 1

Ex1 :

A) Dans chacun des cas suivants, Justifier la dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

1er cas : $f(x)=(x-1)^3\left(x^2-x+5\right)^2$.

2ème cas : $f(x)=\dfrac{4x-1}{\left(x^2+2\right)^3}$.

3ème cas : $f(x)=\sqrt[3]{4x^2-2x+7}$.

4ème cas : $f(x)=\cos\left(\sqrt{x^4+5}\right)$.

B) Soit g la fonction numérique définie par :

$$g(x)=x-2+\sqrt{x^2-3x+2}$$

1) Déterminer D_g l'ensemble de définition de g.

2) a) Étudier la dérivabilité à gauche de la fonction g en 1 puis interpréter le résultat obtenu.

b) Étudier la dérivabilité à droite de la fonction g en 2 puis interpréter le résultat obtenu.

3) Montrer que la fonction g est dérivable sur chacun des intervalles $]2;+\infty[$ et $]-\infty;1[$.

4) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in D_g-\{1;2\}$.

C) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{2-x} & \text{si } x\in[0;1] \\ f(x)=x-\sqrt{x^2-x} & \text{si } x\in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[\end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que la fonction f est continue en 0 et en 1.

2) Étudier la dérivabilité à gauche et à droite de la fonction f aux points 0 et 1 puis donner des interprétations géométriques des résultats obtenus.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et en déduire la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

b) Montrer que la droite (Δ) est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.
$(\Delta): y=2x-\frac{1}{2}$

4) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}-\{0;1\}$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

6) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]0;1[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

b) Donner le tableau de variations de g^{-1}.

c) Tracer $\mathscr{C}_{g^{-1}}$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

d) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

e) Calculer $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et en déduire $\left(g^{-1}\right)'\left(\dfrac{1}{6}\right)$.

Ex2 :

A) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=x^3-6x^2+9x-2$$

et soit $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_g$.

2) Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction g.

3) a) Montrer que $I(2;0)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_g$.

b) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point I.

4) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_g$.

5) Tracer (T) et $\mathscr{C}_g$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

6) a) Déterminer toutes les primitives de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire la primitive de la fonction G de la fonction g telle que : $G(2)=0$.

B) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{x^2-2x}-4 & \text{si } x\le 0 \\ f(x)=x-4+\sqrt{x^2+x} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) a) Étudier la continuité de la fonction f en 0.

b) Étudier la dérivabilité à gauche et à droite de la fonction f en 0 puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y=2x-\dfrac{7}{2}$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

4) a) Montrer que :

$$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{2(x-1)}{3.\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}} & \text{si } x>0 \\ f'(x)=1+\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} & \text{si } x<0 \end{cases}$$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

5) Donner l'équation de tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2.

6) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

7) Soit g la restriction de la fonction f sur $]-\infty;0[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $]-\infty;0[$ puis vérifier que : $-8<\alpha<-7$.

c) Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable en -2 et préciser la valeur de $(g^{-1})'(-2)$.

d) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

Ex3:

Première Partie :

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x)=6x-8x\sqrt{x}-\frac{1}{2}$$

1) Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations.

2) En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ g(x)\le 0$.

Deuxième Partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x)=(4x-1)\sqrt{x}-4x^2+1$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{\sqrt{x}}$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

4) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{4}$.

5) Étudier la nature de la branche infinie de $\mathscr{C}_f$.

6) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f''(x)=\frac{(1-2\sqrt{x})(16x+2\sqrt{x}+1)}{4x\sqrt{x}}$$

b) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$.

7) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Troisième Partie :

Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I=[1;+\infty[$.

1) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

2) Tracer la courbe $\mathscr{C}_{h^{-1}}$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

3) Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} h^{-1}(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h^{-1}(x)}{x}$.

Quatrième Partie :

Soit φ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(x)=\frac{12x-1}{2\sqrt{x}}$$

1) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ \varphi(x)=\dfrac{g(x)}{\sqrt{x}}+8x$.

2) En déduire les primitives de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Déterminer la primitive H de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $H(1)=3$.

Devoir (test)

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = x - 3 + \frac{x}{\left(\sqrt{x} - 1\right)^2}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Vérifier que $D_f = [0;1[\cup]1;+\infty[$.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (x-2)\right] = 0$ puis interpréter graphiquement ce résultat.

3) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

Préciser la valeur de $f'_d(0)$.

4) a) Montrer que pour tout $x \in D_f - \{0\}$:

$$f'(x) = \frac{\left(\sqrt{x} - 2\right)\left(x - \sqrt{x} + 1\right)}{\left(\sqrt{x} - 1\right)^3}$$

b) Vérifier que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 + \sqrt{x}$$

c) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

5) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4.

6) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.