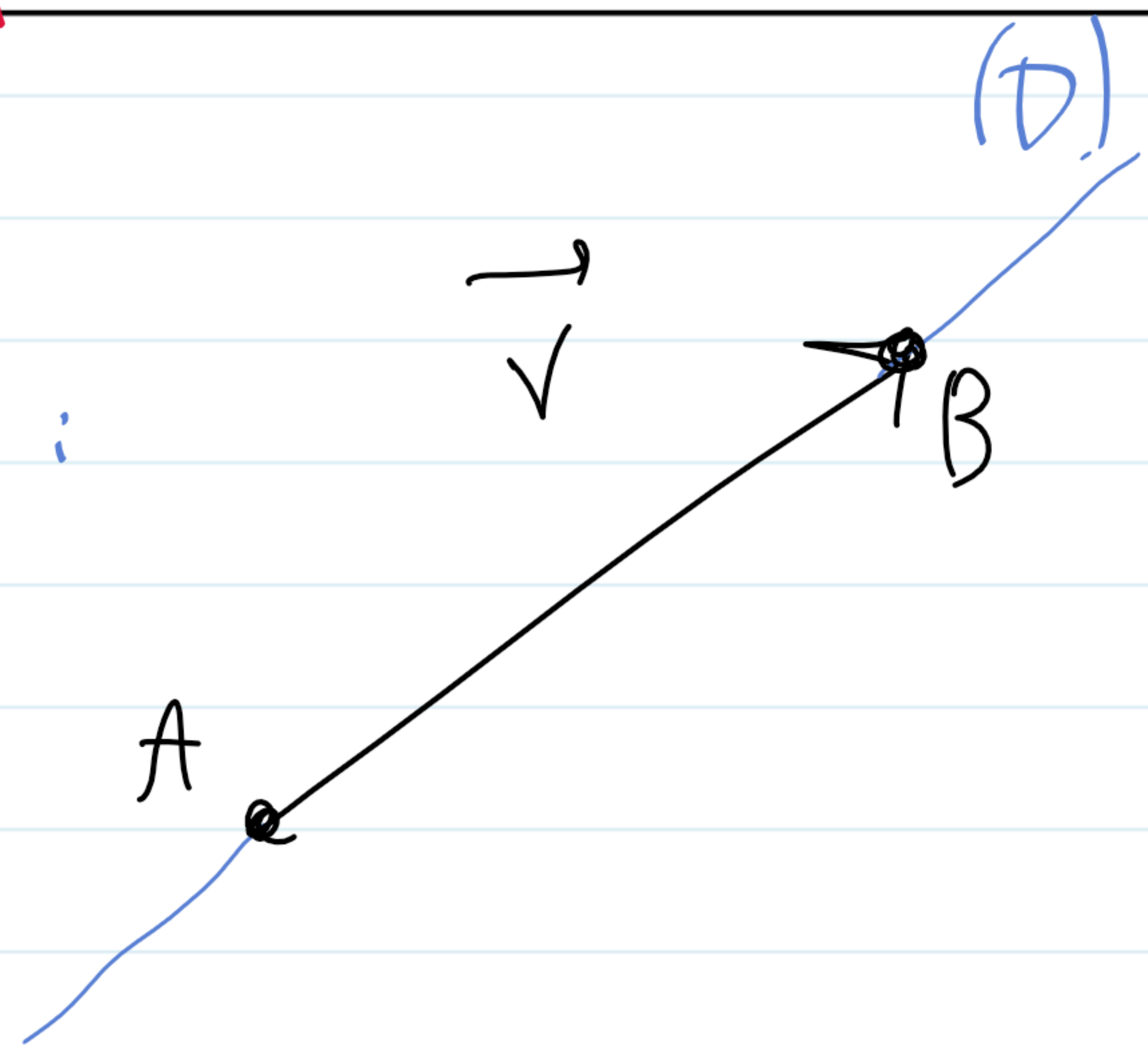
Zakaria Bouicha

Le calcul vectoriel dans le plan :

Définition :

Les caractéristiques d'un vecteur sont :

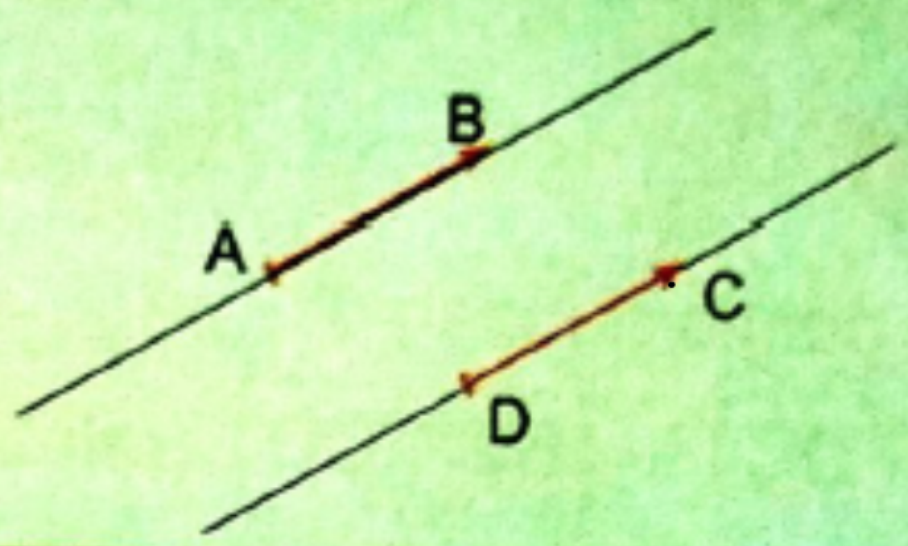
- La direction : la droite (D)
- le sens
- La norme : la distance AB.



1 Egalité de deux vecteurs

Définition Soient A, B, C, D quatre points du plan $\mathcal{P}$ tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.
On dit que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont **égaux** et on écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ lorsque ces deux vecteurs ont :

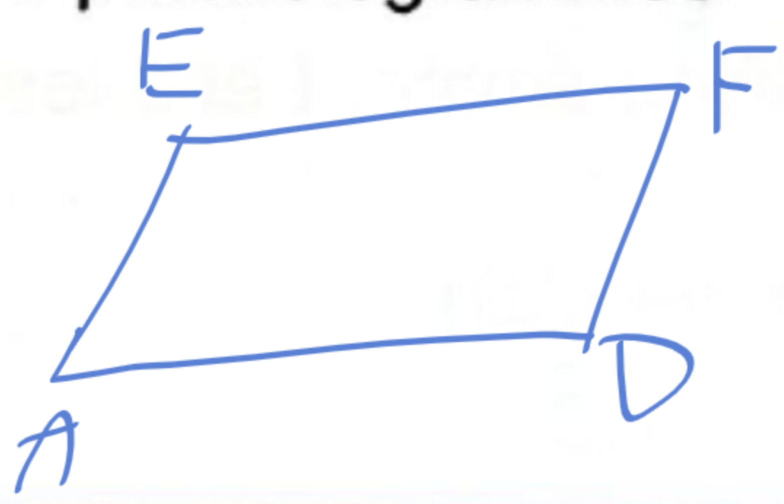
- la même direction ;
- le même sens ;
- la même norme.



Propriété 1 Soient A, B, C, D quatre points du plan $\mathcal{P}$.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si ABCD est un parallélogramme.

Exemples et applications

- Soient A, B, C, D quatre points tels que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ signifie que ABCD est un parallélogramme.
  Donc : BADC ; ADCB ; DCBA sont des parallélogrammes
  D'où : $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$
- Soient AEFD et EFCB deux parallélogrammes.
  Montrer que ABCD est un parallélogramme.



AEFD et EFCB sont des parallélogrammes, alors :
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC}$
d'où $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, donc ABCD est un parallélogramme.

Propriété 2 Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout point A du plan $\mathcal{P}$, il existe un point unique B tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Conséquence Quels que soient les points A, M et N du plan, on a :

- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$ signifie que M = N.
- $\overrightarrow{AM} = \vec{0}$ signifie que M = A.

Le vecteur $\vec{0}$ est dit vecteur nul.

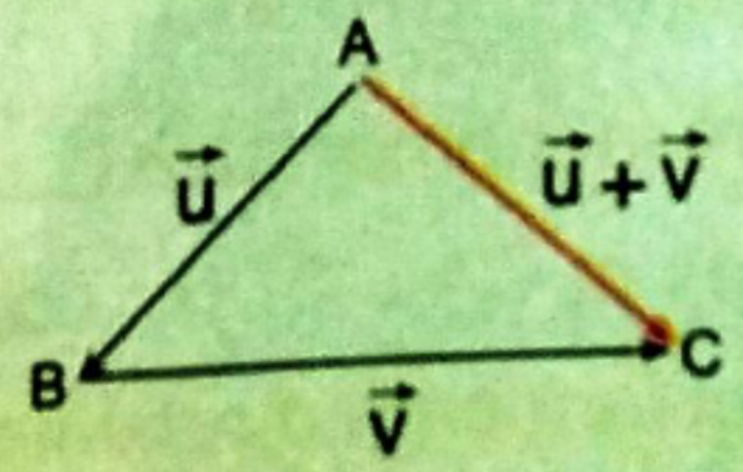
2 Somme de deux vecteurs

Définition **(Relation de Chasles)**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.

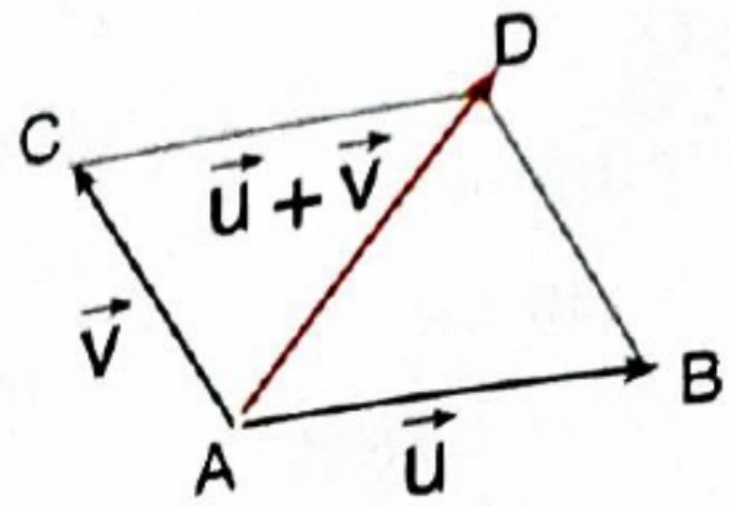
La somme des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} + \vec{v}$ et défini par : $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

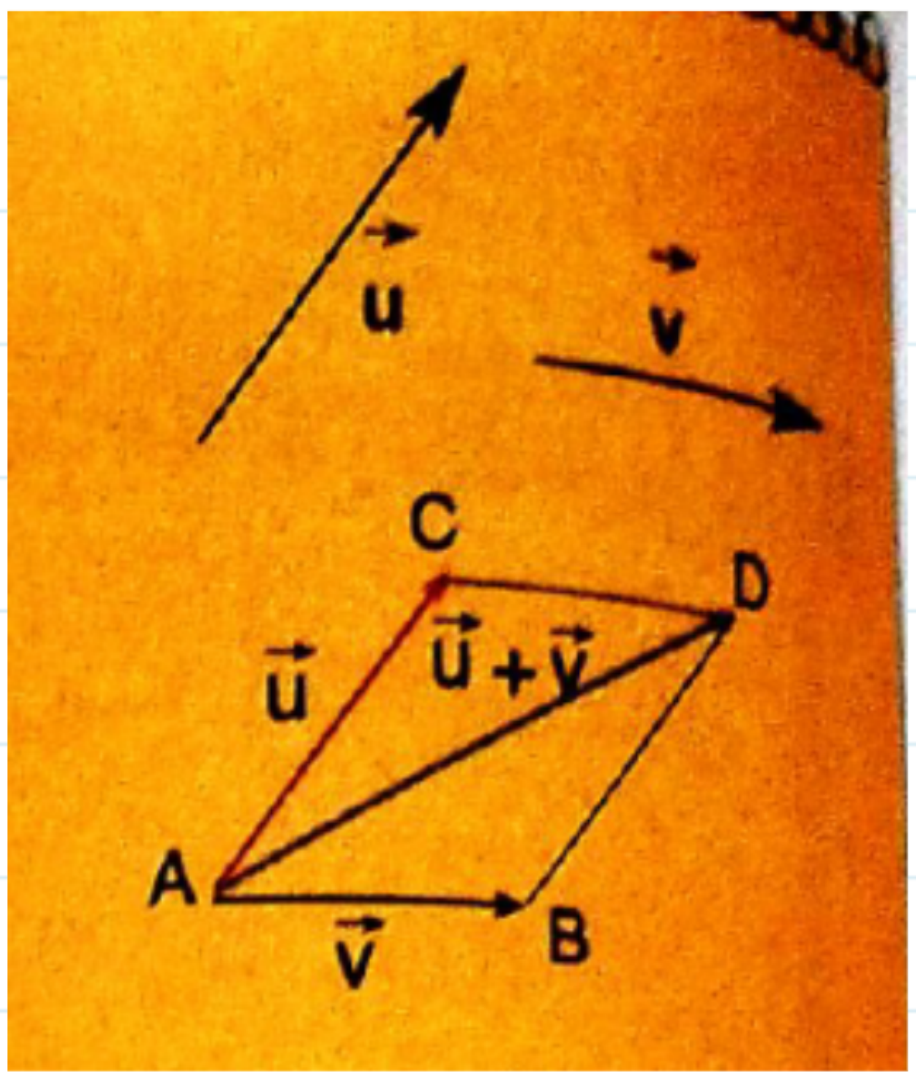
L'égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ est connue sous le nom de relation de Chasles.



Règle du parallélogramme pour construire la somme de deux vecteurs

La somme des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD}$ pour que ABDC soit un parallélogramme.





Exemples et applications

- Soient A, B, C, D quatre points du plan $\mathcal{P}$.

On a : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right) + \left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)$ (relation de Chasles)

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}\right)$$

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC}$$

Donc : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

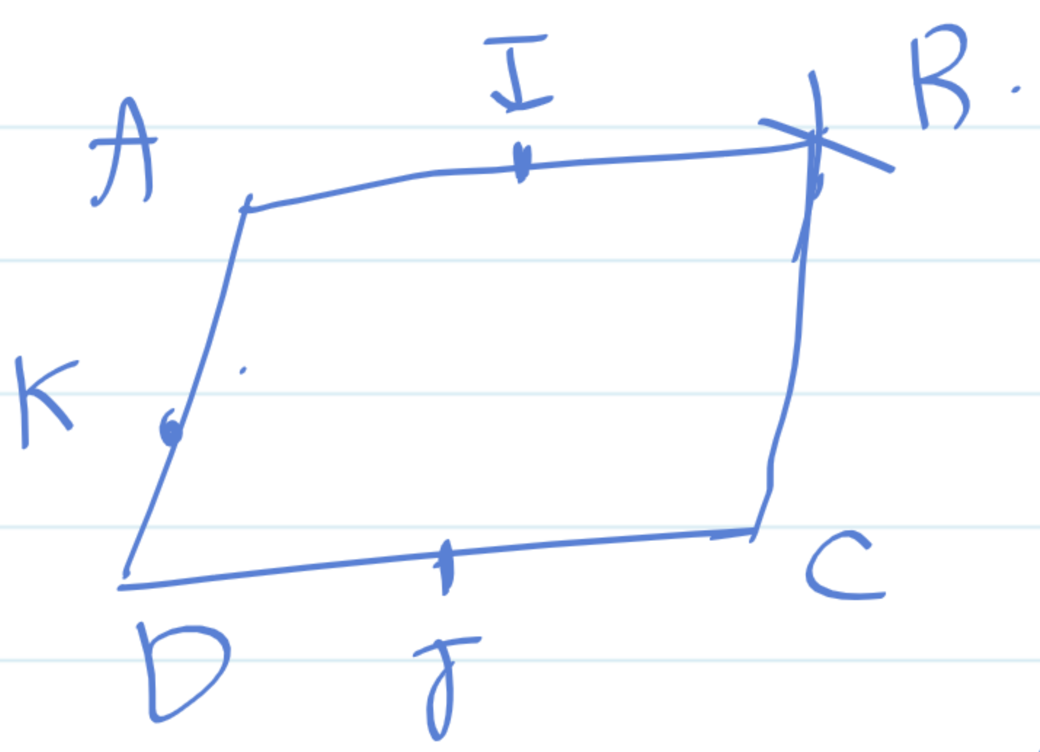
- Soient A, B, O trois points du plan $\mathcal{P}$.

On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$$

Donc : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

- Soient ABCD un parallélogramme, I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [DC].
Soit K un point de la droite (AD).
Montrer que : $\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{KC}$



$$\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}$$
$$= \overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{JC}$$
$$= \overrightarrow{KC}$$

3 Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

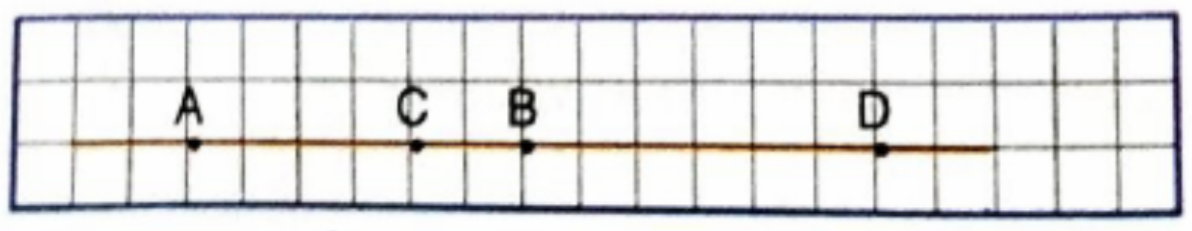
Définition Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un nombre réel.
Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre k est le vecteur $\vec{w}$ que l'on note $k\vec{u}$ et qui est défini par :

$\vec{V} = k\vec{U}$

- Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul :
  - Si $k = 0$, alors $\vec{w} = \vec{0}$ (c'est-à-dire $0\vec{u} = \vec{0}$)
  - Si $k > 0$, alors $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ont la même direction, le même sens et $\|\vec{w}\| = k\|\vec{u}\|$
  - Si $k < 0$, alors $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ont la même direction, des sens contraires et $\|\vec{w}\| = (-k)\|\vec{u}\|$
- Si $\vec{u}$ est le vecteur nul, alors $\vec{w} = \vec{0}$ (c'est-à-dire $k\vec{0} = \vec{0}$)

Exemples et applications

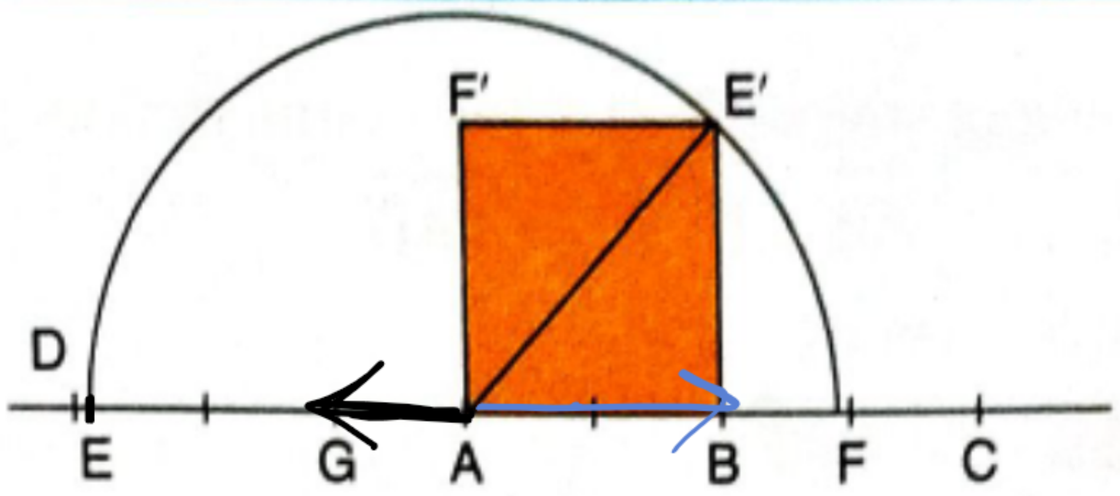
- On considère la figure suivante :



  – Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ ont la même direction, des sens opposés et CA = 2CB ; donc $\overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{CB}$.

  – Les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DB}$ ont la même direction, le même sens et DA = 2DB ; donc $\overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{DB}$.

- On considère la figure suivante :



  – On a : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

  – La longueur de la diagonale du carré ABE'F' est égale à $\sqrt{2}$ AB (rayon du cercle).

  – Les deux vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont la même direction, des sens opposés et $AE = \sqrt{2}\,AB$; donc $\overrightarrow{AE} = -\sqrt{2}\,\overrightarrow{AB}$.

- Déterminer chacun des vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Propriétés

Quels que soient les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{u}$ et les réels a, b et k, on a :

$$a\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = a\vec{u} + a\vec{v}$$

$$(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$$

$$a\left(b\vec{u}\right) = (ab)\vec{u}$$

$$\text{Si } k\vec{u} = \vec{0}\text{, alors : } k = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}$$

Exemples et applications

- • On a : $\vec{u} + x\vec{u} = 1\vec{u} + x\vec{u}$

  $\vec{u} + x\vec{u} = (1+x)\vec{u}$

  • Si $6\vec{u} = 8\vec{v}$, alors : $\frac{1}{2}\left(6\vec{u}\right) = \frac{1}{2}\left(8\vec{v}\right)$ c'est-à-dire : $\left(\frac{1}{2}\times 6\right)\vec{u} = \left(\frac{1}{2}\times 8\right)\vec{v}$

  ou encore $3\vec{u} = 4\vec{v}$

- Simplifier l'écriture des vecteurs suivants :

$\vec{V_1} = 2\left(\vec{u}+\vec{v}\right) - 2\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$; $\vec{V_2} = \vec{u} + 2\left(\vec{u}-\vec{v}\right) - 3\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$

$\vec{V_3} = 3\left(\vec{u}-2\vec{v}\right) + 5\left(\vec{v}-\vec{u}\right)$; $\vec{V_4} = \frac{1}{2}\left(4\vec{u}+5\vec{v}\right) - 3\left(\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\right)$

$\vec{V_4}=\frac{1}{2}\left(4\vec{u}+5\vec{v}\right)-3\left(\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\right)$

$\vec{V_1} = 2(\vec{u}+\vec{v}) - 2(\vec{u}-\vec{v})$

$\vec{V_1} = 2\vec{u} + 2\vec{v} - 2\vec{u} + 2\vec{v}$

$\vec{V_1} = 4\vec{u}$

$\vec{V_2} = \cancel{\vec{v}} + \cancel{2\vec{u}} - 2\vec{v} - \cancel{2\vec{u}} + 3\vec{v}$

$\vec{V_2} = \vec{v}$

$\vec{V_3} = 3(\vec{u} - 2\vec{v}) + 5(\vec{v} - \vec{u})$

$\vec{V_3} = 3\vec{u} - 6\vec{v} + 5\vec{v} - 5\vec{u}$

$= -2\vec{u} - \vec{v}$

$\vec{V_4} = \frac{1}{2}(4\vec{u} + 5\vec{v}) - 3\left(\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right)$

$= \frac{4\times 3\vec{u}}{2\times 3} + \frac{5\vec{v}}{2} - \frac{3\times\vec{u}}{3} - \frac{3}{2}\vec{v}$

$= 2\vec{u} + \frac{5}{2}\vec{v} - \vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v}$

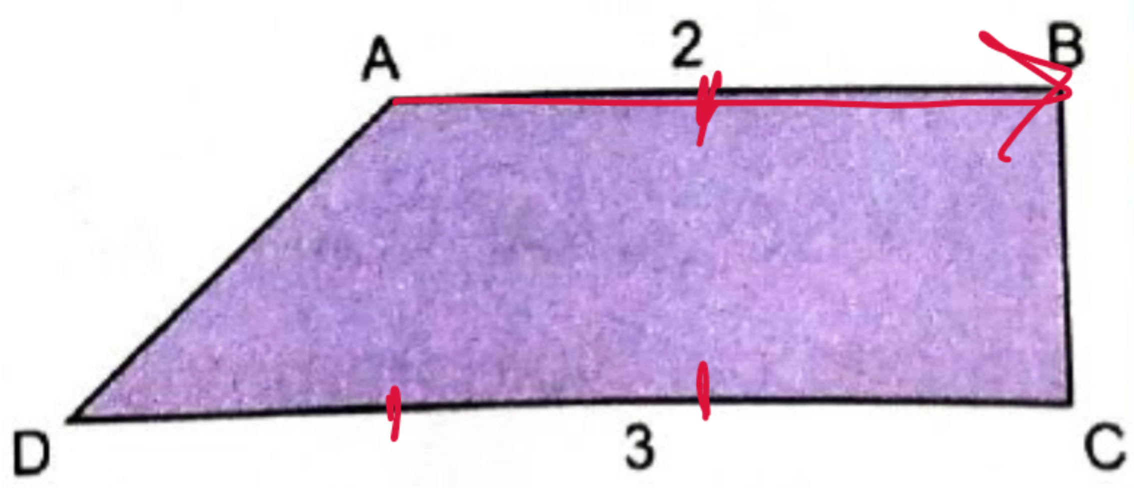
$= \vec{u} + \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right)\vec{v}$

$\vec{V_4} = \vec{u} + \vec{v}$

4 Colinéarité de deux vecteurs

Définition On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement s'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Exemples et applications



- Soit ABCD un trapèze (voir figure)

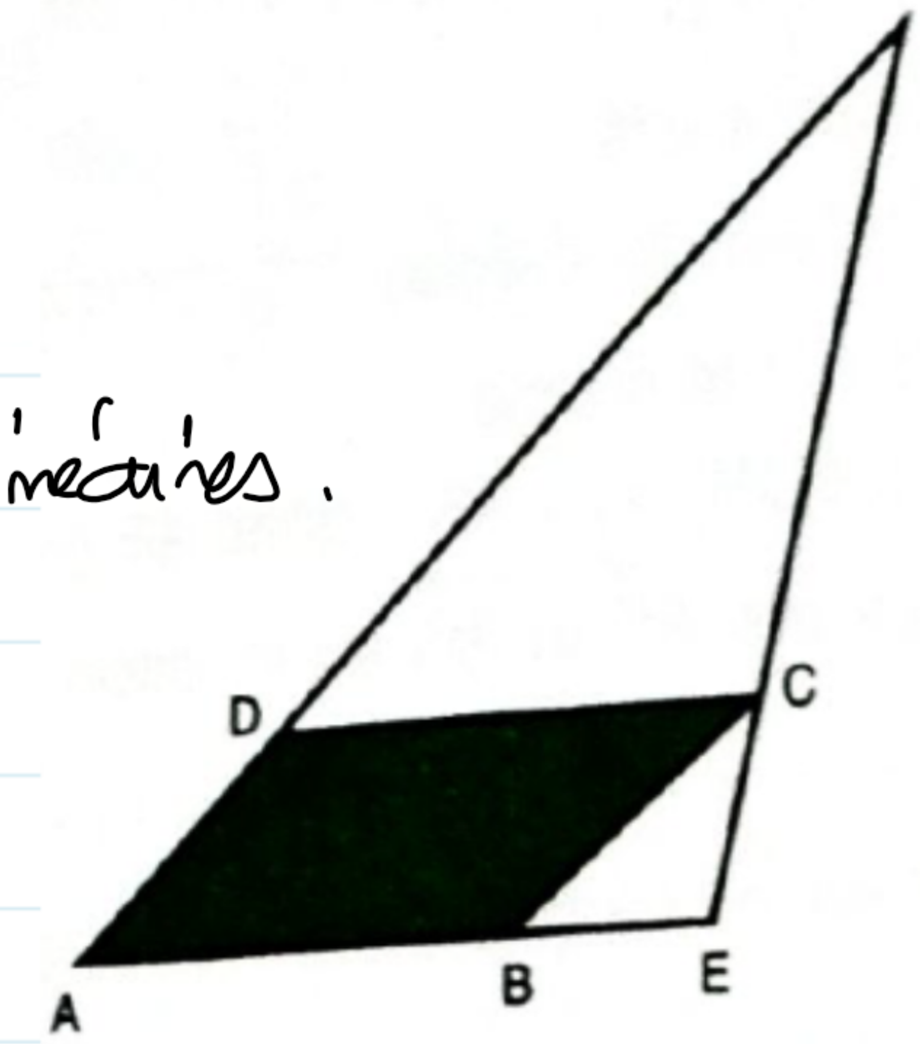
  On a : $\vec{AB} = \frac{2}{3}\vec{DC}$. Donc les deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$ sont colinéaires.

- Soient A, B et C trois points tels que $7\vec{AB} + 5\vec{AC} = \vec{0}$

  On a $7\vec{AB} + 5\vec{AC} = \vec{0}$; donc $7\vec{AB} = -5\vec{AC}$ c'est-à-dire $\vec{AB} = -\frac{5}{7}\vec{AC}$.

  D'où la colinéarité des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

■ Soient ABCD un parallélogramme, E et F les points définis par :
$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{AD}$$



Question : montrer que $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires.

Réponse :

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF}$ (Relation de Chasle)

$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}$

$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AD}$

$= (-\frac{1}{3}-1)\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AD}$

$= -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AD}$

$= 4(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$

$= 4(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC})$ $(\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC})$

$= 4\overrightarrow{EC}$

Donc $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires.

Remarque : $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires, alors les points E, F et C sont Allignés.

5 Milieu d'un segment

Propriété 3 Pour qu'un point I soit le milieu du segment [AB], il faut et il suffit que l'une des relations suivantes soit réalisée :

(1) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

(2) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

(3) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Propriété 4 Si I est le milieu du segment [AB], alors quel que soit le point M du plan $\mathcal{P}$:
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$$

Exemple

Soit ABC un triangle.

Construisons les points E et F définis par

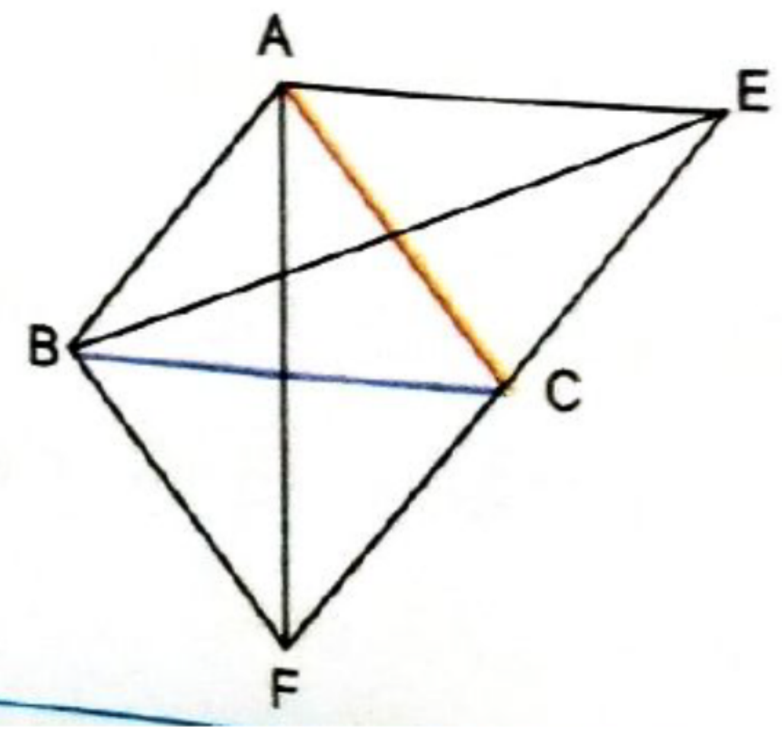
$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

Donc ABCE et ABCF sont des parallélogrammes c'est-à-dire $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{0}$

D'où C est le milieu de [EF].



Ex1

Soient ABCD un parallélogramme, E et F les points définis par :

$$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BE}$$

1) Construire la figure.

2) Montrer que les points A, C et F sont alignés.