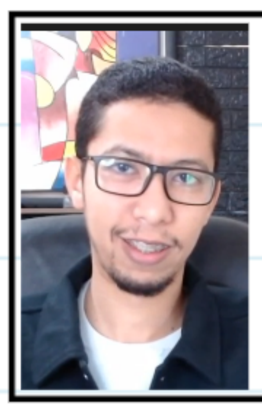

ZAKARIA
Bouicha
WtSp: 0617074062

Les nombres Complexes
2Bac Sm (Série 2)

Exercice 1

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$$(E) : z^3 - \frac{3}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)z - (1+i) = 0$$

1) Vérifier que les racines cubiques de l'unité sont :

1 et j et $\overline{j}$. (On rappelle que : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$)

2) Déterminer deux nombres complexes u et v vérifiant le système : $(S) : \begin{cases} u + v = 1 + i \\ u.v = i \end{cases}$

3) Soit α et β deux nombres complexes telles que $\alpha + \beta$ est solution de (E) et $\alpha\beta = -i.j$.

a) Montrer que α^3 et β^3 vérifient le système (S).

b) En déduire que les solutions de (E) s'écrivent :

$$1 - i.j \quad \text{et} \quad j\left(1 - i.\overline{j}\right) \quad \text{et} \quad \overline{j}(1-i)$$

4) Soit θ un élément de l'intervalle $]0;2\pi[$.

a) Déterminer, en fonction de θ, le module et l'argument du nombre complexe $1 - (\cos\theta + i\sin\theta)$.

b) Déterminer le module et l'argument de chacune des solutions de l'équation (E).

Exercice 2 :

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. On considère l'application f_α définie de $\mathbb{C} - \{\alpha\}$ dans $\mathbb{C} - \{\alpha\}$ par : $f_\alpha(z) = \frac{\alpha z}{z - \alpha}$.

1) Montrer que :

$$f_\alpha(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z|^2 \operatorname{Re}(\alpha) = |\alpha|^2 \operatorname{Re}(z)$$

2) Pour tout $z \in \mathbb{C} - \{\alpha\}$, on pose :

$$|z - \alpha| = r \quad \text{et} \quad \arg(z - \alpha) \equiv \theta \ [2\pi]$$

a) Calculer $|f_\alpha(z) - \alpha|$ en fonction de r et $|\alpha|$.

b) Calculer $\arg\left(f_\alpha(z) - \alpha\right)$ en fonction de θ et $\arg\alpha$.

3) On prend dans cette question $\alpha = -1 + i$, et on considère dans le plan complexe $\mathcal{P}$ les ensembles :

$$\mathcal{D} = \left\{ M(z) \,/\, \arg\left(f_\alpha(z) - \alpha\right) \equiv \frac{3\pi}{4} \ [2\pi] \right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ M(z) \,/\, |f_\alpha(z) - \alpha| = 2 \right\}$$

$$\mathcal{E} = \left\{ M(z) \,/\, f_\alpha(z) \in i\mathbb{R} \right\}$$

a) Déterminer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$.

b) Montrer que $\mathcal{D}$ est une demi-droite d'extrémité $A(\alpha)$ privée du point A, dont on déterminera une équation cartésienne.

c) Soit $z_0 \in \mathbb{C} - \{\alpha\}$ et $B(z_0)$ tel que $B \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}$. Écrire $f_\alpha(z_0)$ sous forme algébrique puis déterminer z_0.

d) Construire $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$.

4) On considère l'application φ qui, à chaque point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ tel que :

$$z' = (-1+i)z - 1 + 3i$$

a) Montrer que φ est la composée d'une homothétie et d'une rotation à déterminer.

b) Déterminer les images de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ par φ.

Exercice 3 :

Soit x un nombre réel tel que : $x \not\equiv 0 \ [2\pi]$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = 1 + e^{ix} + \dots + e^{inx}$.

1) Montrer que : $(\forall \theta \in \mathbb{R}) \ 1 - e^{i\theta} = \left(-2i\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ S_n = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}$

3) En déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ S_n = \frac{\sin\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}} . e^{i\frac{nx}{2}}$$

4) On prend dans cette question : $x = \frac{\pi}{n}$ avec $n \geq 2$.

On pose : $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

a) Vérifier que : $S_{n-1} = A_n + iB_n$.

b) En déduire que $B_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$

Exercice 4 :

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Soit $\Gamma(O;R)$ le cercle de centre O et de rayon R, et A le point de coordonnées $A(R;0)$.

Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la rotation $r\left(O;\frac{2\pi}{n}\right)$ de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

On construit une suite de points par récurrence :

$$\begin{cases} M_0 = A \\ M_{k+1} = r(M_k) \ ; \ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Si z_k est l'affixe de M_k et z_{k+1} est l'affixe de M_{k+1},

Montrer par récurrence que :

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad z_k = R.e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

2) Calculer la distance $M_k M_{k+1}$.

Pour $n = 8$, construire les points M_k.

3) On pose : $L_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1}$.

Calculer $\lim_{n\to+\infty} L_n$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Exercice 5

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$$z^3 - i(1+2\tan\theta)z^2 - (1+\tan\theta)^2 z + i(1+\tan^2\theta) = 0$$

où $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

1) Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pur indépendante de θ à déterminer.

2) Déterminer les deux autres solutions.

On note a et b ces solutions avec $\mathrm{Re}(a) > 0$.

3) Donner le module et l'argument de a en fonction de θ.

4) Soit R la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et qui transforme le point $M(\tan\theta)$ en le point $B(b)$.

Déterminer l'écriture complexe de la rotation R, ainsi le centre $\Omega(\omega)$ de cette rotation.

5) Déterminer la valeur de θ pour laquelle les points $\Omega(\omega)$, $M(\tan\theta)$, $A(a)$ et $B(b)$ soient cocycliques.