ZAKARIA
Bouicha
WtSp: 0617074062

Les fonctions logarithmiques
2 Bac SM

Définition : ($\ln$)

La fonction primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1, s'appelle $\ln$

- $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$
- $D_{\ln} =]0;+\infty[$.
- $\forall x \in]0;+\infty[$ $\ln'(x) > 0$ alors $\ln$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Proposition :

- $\forall (x,y) \in]0;+\infty[$ $x < y \Rightarrow \ln(x) < \ln(y)$
- $\forall (x,y) \in]0;+\infty[$ $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$
- $\forall x \in]1;+\infty[$ $\ln(x) > 0$
- $\forall x \in]0,1[$ $\ln(x) < 0$
- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ $\forall x,y \in]0;+\infty[$.
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ $\forall x \in]0;+\infty[$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ $\forall x,y \in]0;+\infty[$
- $\ln(x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n) = \ln(x_1) + \ln(x_2) + \dots + \ln(x_n)$
  $\ln\left(\prod_{1}^{n} x_k\right) = \sum_{1}^{n} \ln(x_k)$

- $\ln(x^r) = r\ln(x)$ $\quad r \in \mathbb{Q}, \ x > 0$
- $\ln(xy) = \ln(|x|) + \ln(|y|)$ si $xy > 0$ et $x, y < 0$

  et $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(|x|) + \ln(|y|)$

Les limites de ln.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

preuve :

Soit $A > 0$. On sait qu'il existe une infinité des nombres naturels n tels que $\ln(2^n) > A$, il suffit de choisir $n > \frac{A}{\ln 2}$. Le plus petit de ces nombres est $n_0 = E\left(\frac{A}{\ln 2}\right) + 1$. On a alors : $\ln(2^{n_0}) > A$

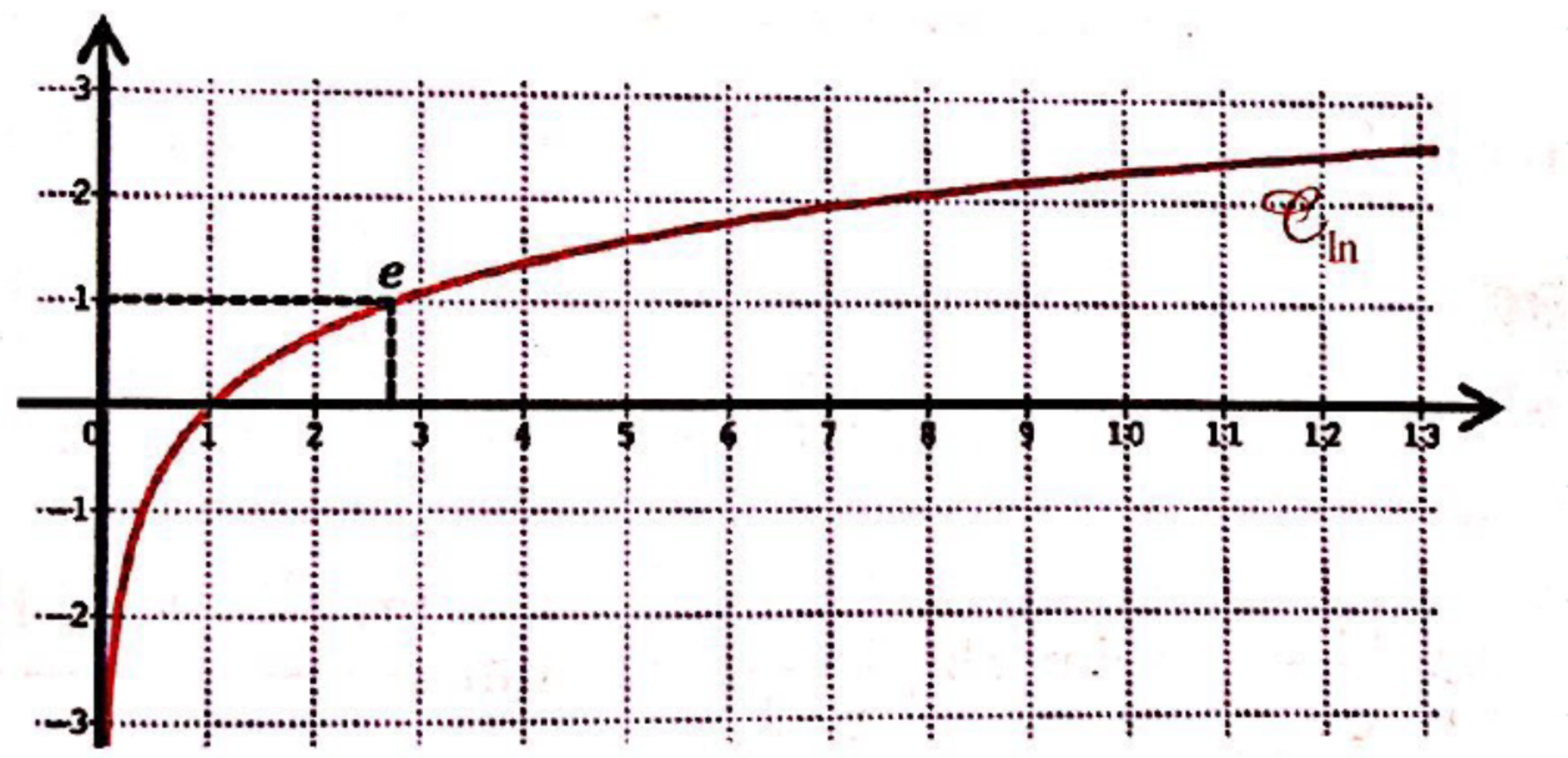
Il est clair que si x est un réel vérifiant $x > 2^{n_0}$, alors $\ln x > A$ car $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a alors montré que : $(\forall A > 0)\ (\exists B > 0)\ ;\ (x > B \Rightarrow \ln(x) > A)$. Par suite : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

preuve :

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = \lim_{t \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t \to +\infty} -\ln(t) = -\infty$$
$$\left(t = \frac{1}{x}\right)$$



- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0$ $\quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = 1$ $\quad \left(\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1\right)$

Dérivé de $\ln(U(x))$

- $\left(\ln(U(x))\right)' = \dfrac{U'(x)}{U(x)}$

- $\left(\ln(|U(x)|)\right)' = \dfrac{U'(x)}{U(x)}$

Primitive de $\dfrac{U'(x)}{U(x)}$

la primitive de $x \longmapsto \dfrac{U'(x)}{U(x)}$ est $x \longmapsto \ln(|U(x)|) + C$

$C \in \mathbb{R}$