Devoir De Synthèse – Durée : 03 heures

MATIÈRE : MATHÉMATIQUES

Niveau : 2ème Bac Science Physique 03

✓ **Notes :**

- L'épreuve comporte quatre exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- **Le premier exercice se rapporte à la géométrie dans l'espace……(3 pts)**
- **Le deuxième exercice se rapporte aux nombres complexes……...(3 pts)**
- **Le troisième exercice se rapporte aux calculs des probabilités…...(3 pts)**
- **Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse…………………....(11 pts)**

Exercice n°01 :(03pts)

⇨ *L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct* $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère le point $\Omega(2;1;2)$ *et le plan* (P) *d'équation :* $4x-3z+13=0$

1)- a)- Justifier que : $d\left(\Omega,(P)\right)=3$.

0,5

b)- Déduire qu'une équation cartésienne de la sphère (S) *de centre* Ω *et tangent*

0,75 *au plan* (P) *est :* $x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0$.

2)- Vérifier que $O\in(S)$, *puis déterminer une équation cartésienne du plan tangent*

0,75 *à* (S) *en* O.

1 *3)- Déterminer les coordonnés du point de contact du plan* (P) *et la sphère* (S).

Exercice n°02 :(03pts)

0,75 **1)-** *Résoudre dans l'ensemble* $\mathbb{C}$ *, l'équation* $(E): z^2 - 6z + 25 = 0$.

2)- *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé* $(O,\vec{u},\vec{v})$*, On considère les points* A, B *et* C *d'affixes respectives :* $a = 3 + 4i$ *,* $b = 4 + 5i$ *et* $c = 6 + 7i$.

0,5 ✓ *Vérifier que :* $\dfrac{b-a}{c-a} = \dfrac{1}{3}$ *, puis en déduire que les points* A, B *et* C *sont alignés.*

3)- *Soit* R *la rotation d'angle* $\dfrac{-\pi}{2}$ *tel que :* $R(C) = B$.

0,5 ✓ *Justifier que l'affixe du centre* Ω *de la rotation* R *est :* $\omega = 4 + 7i$.

4)- *Le point* $D(d)$ *est le symétrique de* C *par rapport à* Ω .

0,5 **a)-** *Montrer que :* $d = 2 + 7i$

0,75 **b)-** *Vérifier que :* $\dfrac{d-b}{c-b} = i$ *, puis en déduire la nature du triangle* BCD .

Exercice n°03 :(03pts)

➯ *Une urne contient* **8** *boules indiscernables au toucher : Parmi ces 8 boules* *<u>trois</u> sont rouges et <u>cinq</u> sont vertes.*

On tire au hasard successivement et sans remise <u>deux</u> boules de cette urne et on considère les événements suivants :

A *" les deux boules tirées sont rouges"*

B *" la première boule tirée est rouge"*

C *" la deuxième boule tirée est verte"*

1 **1)-** *Montrer que :* $p(A) = \dfrac{3}{28}$ *et que :* $p(B) = \dfrac{3}{8}$.

0,5 **2)- a)-** *Calculer* $p(C)$.

0,5 **b)-** *Sachant que la deuxième boule tirée est verte, calculer la probabilité pour que la première boule tirée soit rouge.*

3)- *Soit* X *la variable aléatoire qui à chaque tirage possible associe le nombre de boules rouges restantes dans l'urne.*

0,75 ✓ *Déterminer la loi de probabilité de* X *et calculer son espérance mathématique*

0,25 $E(X)$.

Exercice n°04 :(11pts)

➩ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall x\in\mathbb{R});\ f(x)=(x-1).\left(2-e^{-x}\right).$$

Barème	Question
1	1)- Justifier que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
0,75	2)- Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$, puis en déduire la nature de la branche infinie de (C_f) au voisinage de $-\infty$.
0,75	3)- a)- Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2(x-1)=0$ puis en déduire que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique (Δ) que l'on déterminera.
0,5	b)- Etudier la position relative de (C_f) par rapport à son asymptote(Δ).
0,75	4)- a)- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f'(x)=x.e^{-x}+2\left(1-e^{-x}\right)$.
0,75	b)- Calculer $f'(0)$ puis justifier que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et qu'elle est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.
0,5	c)- Dresser le tableau de variation complet de f.
0,5	5)- a)- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f''(x)=(3-x).e^{-x}$.
0,5	b)- Etudier la concavité de (C_f) et déterminer l'abscisse de son point d'inflexion.
0,75	6)- a)- Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses.
1	b)- Construire la courbe (C_f) dans un repère orthonormé où l'unité est de 2cm.
0,75	7)- En utilisant une intégration par parties, calculer en cm^2 la surface plane délimitée par (C_f), la droite (Δ) et les droites d'équations : $x=0$ et. $x=1$
0,5	8)- a)- Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f'(x)-x=(2-x).\left(1-e^{-x}\right)$.
0,5	b)- En déduire que : $(\forall x\in[0;2]);\ f'(x)\geq x$.
	9)- On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $$u_0=1 \text{ et } (\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=f'(u_n).$$
0,5	a)- Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N});0\leq u_n\leq 2$.
0,5	b)- Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante puis en déduire qu'elle est convergente.
0,5	c)- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ en justifiant la réponse.

Fin Du Sujet.