<table>
<tr><td>Série 1BSM</td><td>Pr Zakaria Bouicha</td><td>1-BAC SM</td></tr>
<tr><td rowspan="4">La logique
1BACSM</td><td>Page facebook</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>Chaine Youtube</td></tr>
<tr><td>Whatsapp : 0617074062</td></tr>
<tr><td>plateforme</td></tr>
</table>

Ces exercices sont bien choisis du livre AL Moufid bacsm

Exercice 1

1) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction numérique définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a) Écrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes :

P_1 : « La fonction f est la fonction nulle » ; P_2 : « La fonction f ne s'annule pas sur I »

P_3 : « La fonction f s'annule sur I » ; P_4 : « La fonction f s'annule exactement une fois sur I »

P_5 : « La fonction f est constante sur I » ; P_6 : « La fonction f est strictement positive sur I »

b) Écrire à l'aide des quantificateurs la négation des propositions de la question a) et traduire cette proposition en français.

2) Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses ?

Q_1 : « $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\quad x + y^2 = 0$ » ; Q_2 : « $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R})\,;\; x + y^2 = 0$ »

Q_3 : « $(\exists x \in \mathbb{R});\,(\forall y \in \mathbb{R})\quad x + y^2 = 0$ » ; Q_4 : « $(\exists x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R})\,;\; x + y^2 = 0$

Q_5 : « $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})\;;\; x + y^2 = 0$ » ; Q_6 : « $(\exists x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R})\;\; y^2 > x$

Exercice 2

raisonnement par contre-exemple

1) Montrer que : « $(\forall n \in \mathbb{N})\,(\exists x \in \mathbb{N})\;;\; x < n$ » est une proposition fausse.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 5x + 4$$

a) Montrer que f n'est ni paire ni impaire.

b) Montrer que f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que la proposition suivante est fausse:

$$« \;(\forall x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R})\;;\; \frac{4xy}{4+y^2} > 1\; »$$

4/

Série 1BSM	Pr Zakaria Bouicha	1-BAC SM
La logique 1BACSM	Page facebook Chaine Youtube Whatsapp : 0617074062 plateforme	

Soit a, b, c et d des nombres réels.

Montrer que les propositions suivantes sont fausses :

P_1 : « $(a \neq b \text{ et } c \neq d) \Rightarrow a+c \neq b+d$ »

P_2 : « $(a \neq b \text{ et } c \neq d) \Rightarrow ac \neq bd$ »

P_3 : « $(a \neq b \text{ et } c \neq d) \Rightarrow \dfrac{a}{c} \neq \dfrac{b}{d}$ »

Exercice 3

raisonnement déductif (direct)

1) Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$\left(x > 2 \text{ et } y \geq \frac{1}{3}\right) \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{7}{2}$$

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|x-2| \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{2x+3}{x+2} \leq \frac{9}{5}$$

3) Montrer que pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^2$:

$$a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |a+b| \leq \sqrt{2}$$

4) Soit x et y deux réels tels que : $|x| \leq \dfrac{1}{2}$ et $|y| < 1$

Montrer que : $|4x^2y - y - x| \leq \dfrac{17}{16}$

Exercice 4

disjonction des cas

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$2x^2 - |x-3| - 18 = 0 \quad ; \quad \sqrt{x+7} + \sqrt{2x-3} = 4$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$|2x-1| + |2x+1| + |x| \geq 4 \quad ; \quad \sqrt{3-x} + x < 0$$

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{x+1} > \frac{1}{2} \quad ; \quad \sqrt{x-1} \geq x-4$$

$$\sqrt{x^2 - 5x + 6} \leq 2x - 3 \quad ; \quad \sqrt{x^2 + 2x - 3} > x+2$$

partie 2

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2|x-1| - y = 4 \\ |x| + 2y = 6 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} |x+y| - 2|x-y+1| = -6 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$$

Montrer que :

1) $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \sqrt{x^2+1} + x > 0.$

2) $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \sqrt{2x^2 - 3x + 3} - x + 1 > 0.$

3) $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^4 - x^3 + 2 > 0.$

4/ montrer que $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6 $\forall n \in N$

Exercice 5

raisonnement par équivalence

Soit x et y deux réels positifs.

1) Montrer que : $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2 - x + 1} \leq \dfrac{4}{3}\sqrt{x}$.

2) Montrer que : $\sqrt{2x+2} - \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

3) Établir les inégalités suivantes :

a) $\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$; b) $\dfrac{x+y}{2} \leq \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$

4) Montrer que :

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{x+y+2}{2} \Leftrightarrow (x = 1 \text{ et } y = 1)$$

partie 2

Soit a et b deux éléments de l'intervalle $]-1;1[$.

Montrer que : $\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right| < 1$

partie 3

Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$. En utilisant un raisonnement par équivalence, établir l'équivalence suivante :

$$\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = 1 \Leftrightarrow x + y = 0$$

Exercice 6

raisonnement par contraposée

Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$. À l'aide d'un raisonnement par contraposée, établir les implications suivantes :

1) $y \neq -\frac{3}{4}x \Rightarrow \frac{x-y}{x+y} \neq 7$.

2) $(x \neq y \text{ et } x+y \neq -1) \Rightarrow x^2+x \neq y^2+y$.

3) $x \neq y \Rightarrow (x-1)(y+1) \neq (x+1)(y-1)$.

4) $(x \neq y \text{ et } xy \neq 1) \Rightarrow \frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1}$.

partie 2

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x)=1+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}.$$

Montrer que pour tout $(x;y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$:

a) $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$;

b) $(x \neq y \text{ et } xy \neq 1) \Rightarrow g(x) \neq g(y)$

Exercice 7

raisonnement par absurde

Soit $(x;y;z)\in\mathbb{R}^3$.

1) Montrer que le système :

$$\begin{cases} 2x-3z>3 \\ 3y-2x\geq 3 \\ y-z\leq 2 \end{cases}$$

n'admet pas de solution.

2) On suppose dans cette question que : $x+y>z$.

Montrer par l'absurde que : $x>\frac{z}{2}$ ou $y>\frac{z}{2}$.

partie 2

Soit x, y et z des réels strictement positifs tels que :

$$xyz>1 \quad \text{et} \quad x+y+z<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

Montrer que : $x\neq 1$ et $y\neq 1$ et $z\neq 1$.

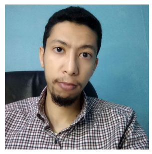
partie 3

1) Montrer par l'absurde que :

$$\sqrt{6}\notin\mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \sqrt{3}-\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$$

2) Montrer que si $x\in\mathbb{Q}^*$ et $y\notin\mathbb{Q}$ alors :

$$xy\notin\mathbb{Q} \quad \text{et} \quad x+y\notin\mathbb{Q}$$

Série 1BSM	Pr Zakaria Bouicha	1-BAC SM
La logique 1BACSM	Page facebook	
	Chaine Youtube	
	Whatsapp : 0617074062	
	plateforme	

partie 4

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x + 2 \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$$

Montrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ne se coupent pas.

Exercice 8

raisonnement par récurrence

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 - 2^2 + \ldots. + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1}(1 + 2 + \ldots + n)$$

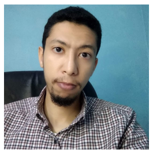
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots. + \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{4} - \frac{(-1)^{n+1}}{4 \times 3^n}$$

partie 2

Série 1BSM	Pr Zakaria Bouicha	1-BAC SM
La logique 1BACSM	Page facebook Chaine Youtube Whatsapp : 0617074062 plateforme	

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ 9 divise $4^n + 6n - 1$.

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ 11 divise $3^{2n} + 2^{6n-5}$.

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ 17 divise $21^n - 2^{2n}$.

partie 3

Soit x un réel strictement positif.

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $3^n > n$; b) $(n+1)^n \geq 2n^n$

Exercice 9

exercice global (test)

Écrire les propositions suivantes à l'aide des quantificteurs et connecteurs logiques puis déterminer la négation de chacune d'elles :

P_1 : « Le carré d'un réel quelconque est supérieur ou égal à -1 ».

P_2 : « L'équation $x^2-2x-3=0$ admet au moins une racine réelle ».

P_3 : « Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré ».

P_4 : « Aucun entier naturel n'est supérieur à tous les autres ».

P_5 : « Étant donné trois réels, il y en a au moins deux de même signe »

P_6 : « Tout réel inférieur ou égal à -1 est négatif »

partie 2

Montrer par l'absurde que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ \sqrt{\dfrac{n}{n+2}}\notin\mathbb{Q}$

partie 3

Donner la négation de chacune des propositions suivantes :

1) $(\forall x \in \mathbb{R})\ \left(x^2 - |x| + 1 \geq 0 \text{ et } -1 \leq x \leq 1\right)$.

2) $(\exists x \in \mathbb{R})\ ;\ \left(x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{x}{x+1}} \in \mathbb{Q}\right)$.

3) $\left(\exists (a;b;c) \in \mathbb{R}^3\right);\ a+b+c \leq 9 \text{ et } a \leq b \leq c$

4) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0);\ \left|x - \dfrac{\pi}{2}\right| \leq \alpha \Rightarrow |\cos x| \leq \varepsilon$.

partie 4

Soit x et y deux nombres réels.

1) Montrer que : $|x| < 1 \Rightarrow |2x^2 - x - 1| < 2$.

2) Montrer que : $3 \leq x \leq 6 \Rightarrow -\dfrac{7}{2} \leq \dfrac{2-3x}{x-1} \leq -\dfrac{16}{5}$.

3) Montrer que : $\dfrac{x}{1+|x|} = \dfrac{y}{1+|y|} \Rightarrow xy = 0$

4) Montrer que :

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 3 \end{cases} \Rightarrow -10 \leq xy - 4x + 2y - 3 \leq 2$$

5) Montrer que :

$$\left(|x| < \frac{1}{2} \text{ et } |y-2| \leq \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{3}{2} < \frac{2y}{y-x} < 3$$

partie 5

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1+5+9+\ldots+(4n+1)=(n+1)(2n+1)$$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^{*}-\{1\}$:

$$\left(1\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}\times\frac{1}{n}\right)=\frac{n-1}{n}$$

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^{*}$:

$$1^4+2^4+\ldots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^{*}$:

$$\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}\leq\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir les égalités suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(3k+1)=n(n+1)^2$

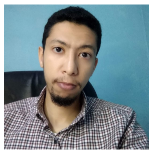
2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3=n^2(2n^2-1)$

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k=\frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$

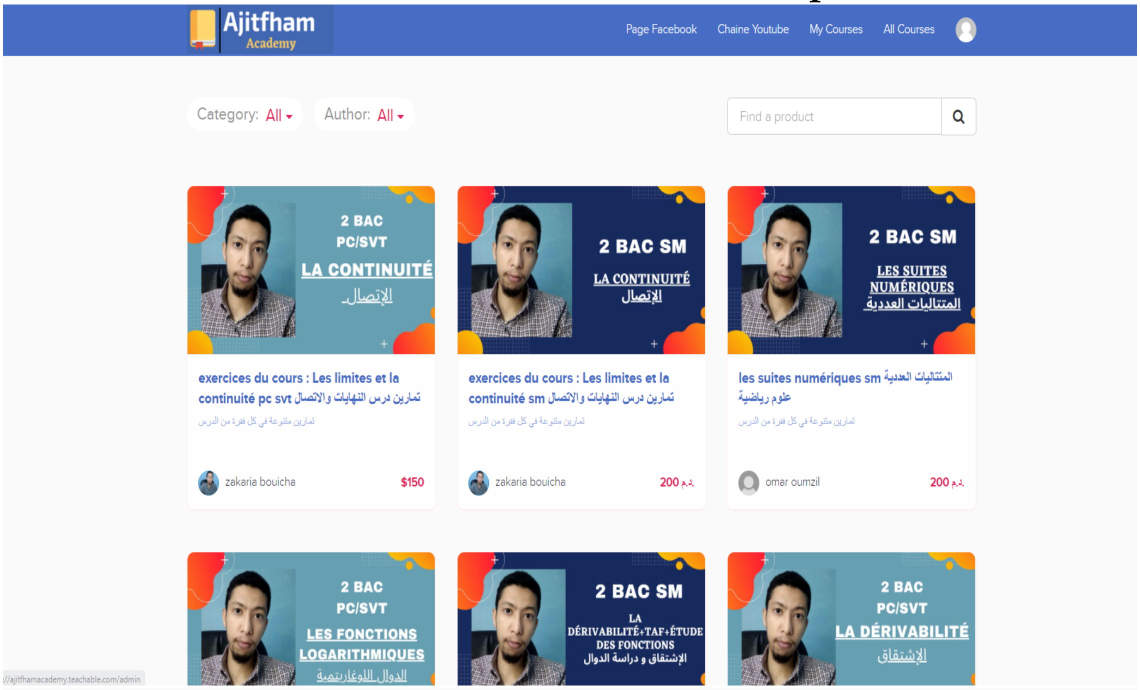
4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

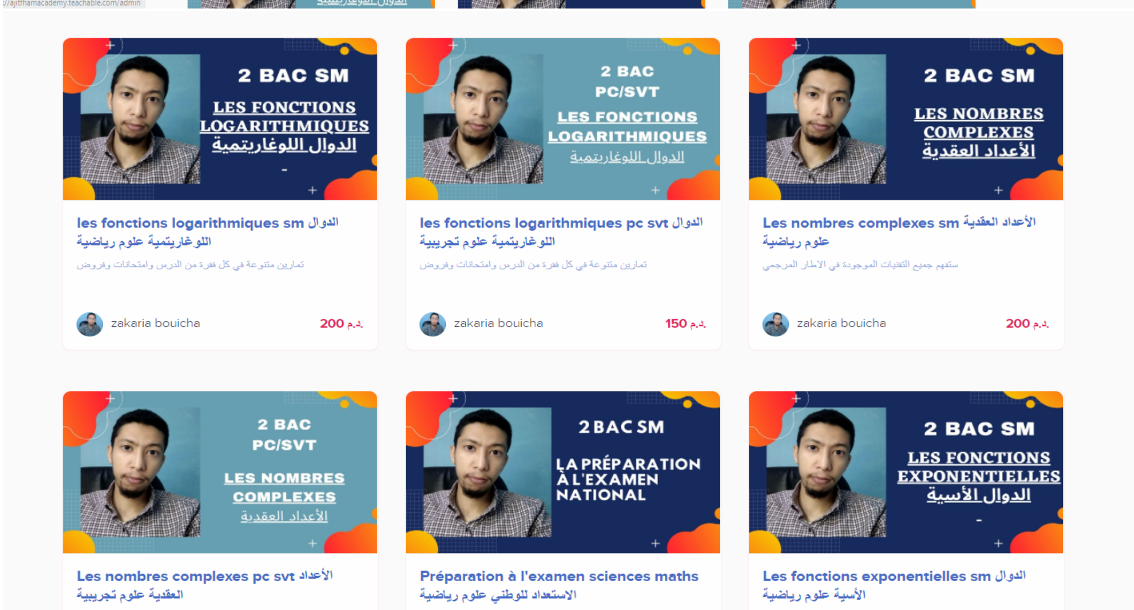
5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

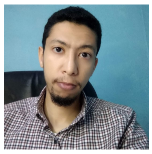
6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)k^2=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$

Série 1BSM	Pr Zakaria Bouicha	1-BAC SM
La logique 1BACSM	Page facebook	
	Chaine Youtube	
	Whatsapp : 0617074062	
	plateforme	

Pour s'inscrire dans la plateforme et avoir la correction sous forme de videos il suffit de contacter 0617074062 sur wtsp





Série 1BSM	Pr Zakaria Bouicha	1-BAC SM
La logique 1BACSM	Page facebook	
	Chaine Youtube	
	Whatsapp : 0617074062	
	plateforme