série 2BSM	Pr Zakaria Bouicha	2-BAC SM
la fonction exponentielle	Page facebook	
	Chaine Youtube	
2BACSM	Whatsapp : 0617074062	
	plateforme	

Exercice 1

EXERCICE 34

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\mathscr{C}$ désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

b) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}$.

2) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

3) Dresser le tableau complet de variation de f.

4) Ecrire l'équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

5) Tracer $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\ln\left(e^{2x}+e^x+1\right)-x$$

et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)=\ln\left(e^x+e^{-x}+1\right)$$

et en déduire que la fonction f est paire.

2) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) Montrer que les droites d'équations $y=x$ et $y=-x$ sont des asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.

4) Étudier les variations de la fonction f.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

6) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^{-f(x)}$

Étudier les variations de g et tracer sa courbe Γ.

Exercice 3

I) On considère les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(t) = 1 + t - e^t \quad \text{et} \quad h(t) = (1-t)e^t$$

1) a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$g(t) \leq 0 \quad \text{et} \quad h(t) \leq 1$$

b) En déduire que : $(\forall t \in]-\infty; 1[)\ 1 + t \leq e^t \leq \dfrac{1}{1-t}$

2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_-^*)\ \dfrac{x}{x-1} \leq x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \leq 1$

II) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x\ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2) a) Étudier les variations de la fonction f.

b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_-^*)\ \dfrac{1}{x-1} \leq xe^{\frac{1}{x}} - x - 1 \leq 0$

c) En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ de f admet une asymptote oblique (Δ) à déterminer, puis étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et (Δ) sur $\mathbb{R}_-^*$.

3) Étudier l'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite $(\mathscr{D}) : y = x$, puis tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

4) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Tracer la courbe de f^{-1} dans le même repère.

série 2BSM	Pr Zakaria Bouicha	2-BAC SM
la fonction exponentielle 2BACSM	Page facebook Chaine Youtube Whatsapp : 0617074062 plateforme	

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$

1-a) Dresser le tableau de variations de f.

1-b) Construire la courbe de f dans un repère orthonormé. On prendra , $\sqrt{(2/e)} \approx 0,85$.

2-a) Déterminer l'image par f du segment $[0, 1/2$

2-b) On définit la fonction $\varphi : [0,1/2] \to [0,\sqrt{(2/e)}]$ par $\varphi(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$. Démontrer que φ admet une fonction réciproque, que l'on notera g et dresser le tableau de variations de g.

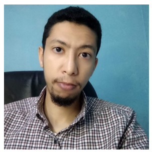
2-c) Démontrer que g est dérivable en tout point de l'intervalle ouvert $]0, \sqrt{(2/e)}[$.

2-d) La fonction g est-elle dérivable en 0 ? en $\sqrt{(2/e)}$?

3-a) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution unique dans le segment $\left[0,\frac{1}{2}\right[$. On note a_n cette solution.

3-b) Déterminer la monotonie de la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ et déterminer sa limite

Exercice 5

série 2BSM	Pr Zakaria Bouicha	2-BAC SM
la fonction exponentielle	Page facebook	
	Chaine Youtube	
2BACSM	Whatsapp : 0617074062	
	plateforme	

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x}$

1) Étudier la fonction f : (limites et variations)

2) a) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé

3) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0=1 \text{ et } u_{n+1}=u_n^2 f(u_n)=u_n.e^{-u_n} \text{ si } n\in\mathbb{N}$$

a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ e^x\geq x+1$

b) En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ x^2 f(x)\leq\dfrac{x}{1+x}$

4) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 0<u_n\leq\dfrac{1}{n+1}$

5) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose : $v_n=\sum_{k=0}^{n-1}u_k=u_0+\ldots+u_{n-1}$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ v_n=-\ln(u_n)$

b) Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 6

A) Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2e^x - 2 - xe^x$

1) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ dont une α telle que $1,5 < \alpha < 1,6$.

B) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2 - 2e^{-u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) On pose pour tout $x \in \left[\frac{3}{2};2\right]$: $g(x) = 2 - 2e^{-x}$

a) Étudier les variations de g puis justifier que :

$$g(I) \subset I \quad \text{et} \quad |g'(x)| \leq \frac{1}{2} \text{ pour tout } x \in I$$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

c) Montrer que (u_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente, et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

b) Retrouver encore une fois que : $\lim u_n = \alpha$.

Exercice 7

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 3$

On considère la fonction numérique g_n définie sur $]0,+\infty[$ par : $g_n(x) = 2\ln(x) + nx$

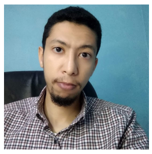
1. Montrer que $\forall x \in]0,+\infty[: \sqrt{x} > \ln(x)$
2. Dresser le tableau de variations de g_n
3. Montrer que l'équation (E) $g_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n dans $]0,+\infty[$ et que $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ puis déduire $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n$

II) Soit f une fonction numérique définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt[3]{x}\, e^{-x}$

(C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et donner une intérpretation géométrique du résultat
2. Etudier la dérivabilité de f à droite au point 0 puis intérpreter géométriquement le résultat
3. Montrer que $(\forall x \in]0,+\infty[) : f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right) f(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
4. Vérifier que $f\left(\left[\frac{1}{3},1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{3},1\right]$ et montrer que $\left(\forall x \in \left[\frac{1}{3},1\right]\right) : |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$.
5. Tracer (C) $\left(f\left(\frac{1}{3}\right) \simeq 0{,}5\right)$
6. Montrer que $\forall x \in]0,+\infty[: \quad f(x) = x \Leftrightarrow g_3(x) = 0$
7. On considère la suite numérique $(U_n)_{n \geq 0}$ définie par : $U_0 = \frac{1}{3}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_{n+1} = f(U_n)$
   a/ Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $\frac{1}{3} \leq U_n \leq 1$.
   b/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $|U_{n+1} - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |U_n - \alpha_3|$
   c/ En déduire que la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ est convergente en déterminant sa limite.

Exercice 8

série 2BSM	Pr Zakaria Bouicha	2-BAC SM
la fonction exponentielle 2BACSM	Page facebook	
	Chaine Youtube	
	Whatsapp : 0617074062	
	plateforme	

I) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction g_n définie par : $g_n(x) = x + e^{-nx}$

Et soit $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1)a) Étudier les variations de la fonction g_n.

b) Montrer que g_n admet un minimum absolu en un réel u_n qu'on exprimera en fonction de n.

2)a) Calculer les limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} g_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x)$

b) Déterminer les branches infinies de $\mathscr{C}_n$.

3)a) Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

b) Tracer dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. (On prend : $\|\vec{i}\| = 2cm$)

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = g_n(u_n)$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et déterminer leur limites.

II) On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x + e^{nx}$$

Et soit Γ_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Étudier les variations de la fonction f_n.

2) En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n.

3) a) Montrer que $\alpha_1 \in \left]-\ln 2; -\frac{1}{2}\right[$.

b) Montrer que les quantités $(x - \alpha_1)$ et $(e^x + \alpha_1)$ ont le même signe.

4) On considère la fonction φ définie sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ par : $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}x$

Exercice 9

I) Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$$

1) Étudier les variations de la fonction g sur $[0;+\infty[$.

2) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0;+\infty[$.

II) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)$$

1) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

2) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f'(x)=e^{x}g\left(e^{-x}\right)$

3) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f, et $\mathscr{C}'$ celle de la fonction $(-f)$.

Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ dans un même repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. (On admet que $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion d'abscisse $x_0\approx-0,7$).

5) Montrer que : $(\forall x\in[-1;0])\quad 0<f'(x)\leq g(e)$

6) Montrer que l'équation $f(x)+x=0$ admet une solution α dans $\mathbb{R}$ et que $-1<\alpha<0$.

7) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0=0 \text{ et } u_{n+1}=-f(u_n) \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad -1\leq u_n\leq 0$

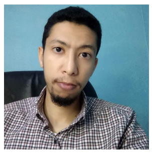
b) Montrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad |u_{n+1}-\alpha|\leq g(e)|u_n-\alpha|$$

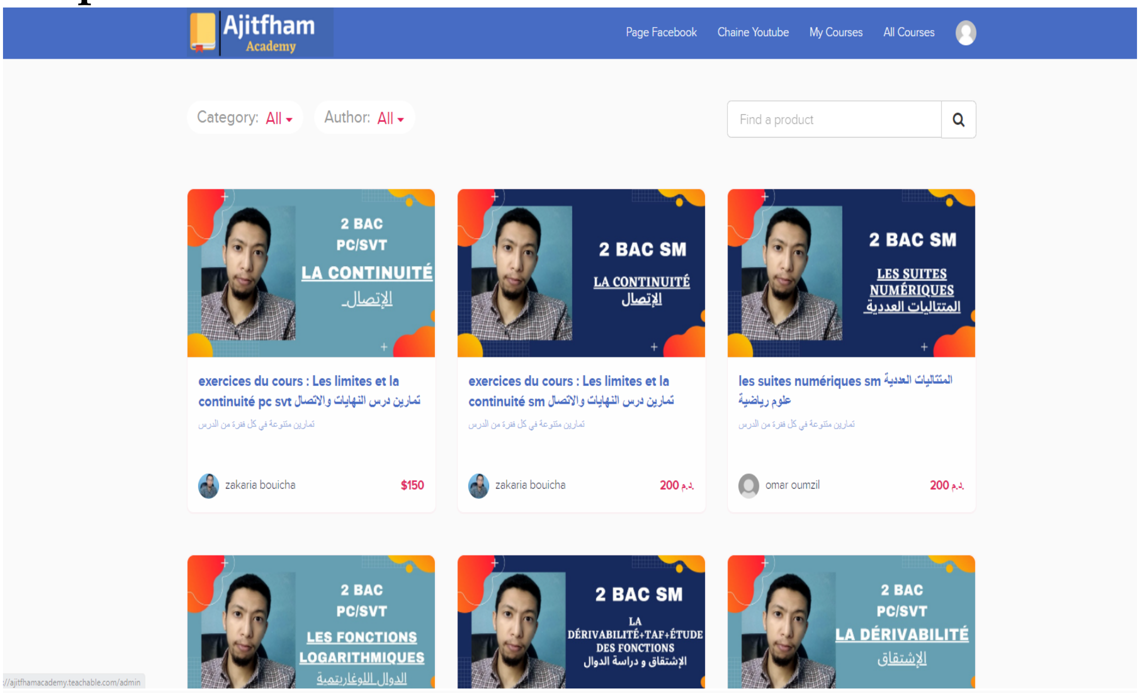
c) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad |u_n-\alpha|\leq (g(e))^{n}$

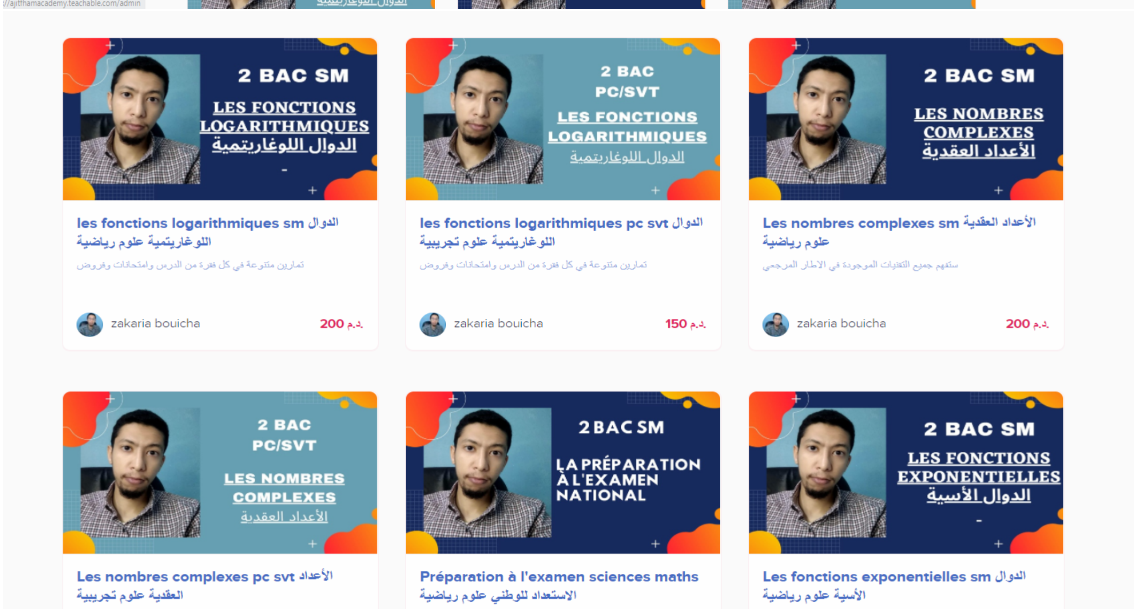
8) Sachant que $g(e)<0,6$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

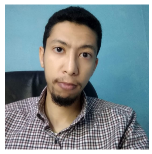
Examen National 2012 (Session De Rattrapage)

série 2BSM	Pr Zakaria Bouicha	2-BAC SM
la fonction exponentielle 2BACSM	Page facebook	
	Chaine Youtube	
	Whatsapp : 0617074062	
	plateforme	

Pour s'inscrire dans la plateforme et avoir la correction sous forme de videos il suffit de contacter 0617074062 sur wtsp





série 2BSM	Pr Zakaria Bouicha	2-BAC SM
la fonction exponentielle	Page facebook	
	Chaine Youtube	
2BACSM	Whatsapp : 0617074062	
	plateforme