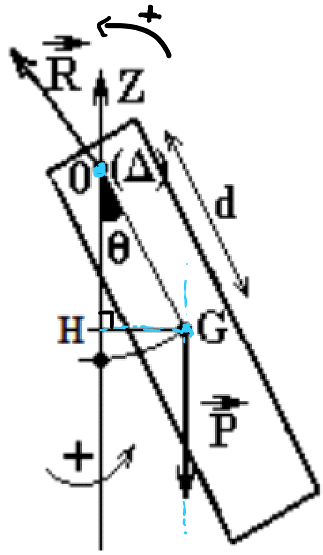
PENDULE PESANT

- On appelle pendule pesant tout solide mobile autour d'un axe (Δ) (en principe horizontal) ne passant pas par son centre de gravité et placé dans un champ de pesanteur
- Le solide est en mouvement de rotation autour de l'axe (Δ)



❖ Etude dynamique :

L'éq. diff.

Système : le solide (S)

Bilan des forces :
- $\vec{R}$: La réaction de l'axe (Δ)
- $\vec{P}$: Poids du solide (S)

PFD en rotation : $\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{ext}) = J_\Delta . \ddot{\theta}$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$\vec{R}$ se coupe avec (Δ) alors $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$

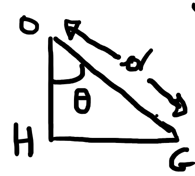
$$-P.\,HG = J_\Delta . \ddot{\theta}$$

$$-m.g\,d.\sin\theta = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \left(J_\Delta \ddot{\theta} + m.g.d.\sin\theta = 0\right) \times \frac{1}{J_\Delta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{m.g.d}{J_\Delta}.\sin\theta = 0}$$

Prenons le triangle OHG



HG = d.sinθ

❖ Cas des faibles oscillations :

Dans le cas de faibles oscillations on a sin(θ)= θ pour des angles θ ≤ 15° ou θ ≤ 0.26rad

L'éq. diff : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{m.g.d}{J_\Delta}.\theta = 0}$ (1)

❖ Equation horaire ou solution de l'équation différentielle

$$\theta = \theta m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$$

* La détermination de l'expression de T_0

$\dot{\theta} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)\theta_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

$$\dot{\theta} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right).\theta_m.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$

$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.\theta_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$

$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.\theta \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta}+\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.\theta = 0} \quad (1)$$

Identification $\frac{m.g.d}{J_\Delta} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{m.g.d}{J_\Delta}} \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{m\,g\,d}}}$$

✓

* La détermination de θ_m et φ :

on écarte le solide (S) de sa position d'équilibre d'angle $\theta_0 > 0$ et on le libère sans vitesse initiale.

On a $\begin{cases} \theta(0) = \theta_m\cos(\varphi) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = \frac{-2\pi}{T_0}\theta_m\sin(\varphi) = 0 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} \theta_m.\cos\varphi = \theta_0 & (a) \\ \sin\varphi = 0 & (b) \end{cases}$

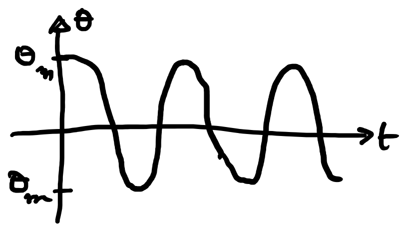
à partir de (b) : $\cos\varphi = \pm 1 \Rightarrow \varphi = \pi$ ou $\varphi = 0$.

et à partir de (a) $\theta_m > 0$ et $\theta_0 > 0$ Alors $\cos\varphi > 0$

Alors : $\cos\varphi = 1$ donc $\varphi = 0$

et par conséquent $\theta_m = \theta_0$.

✓



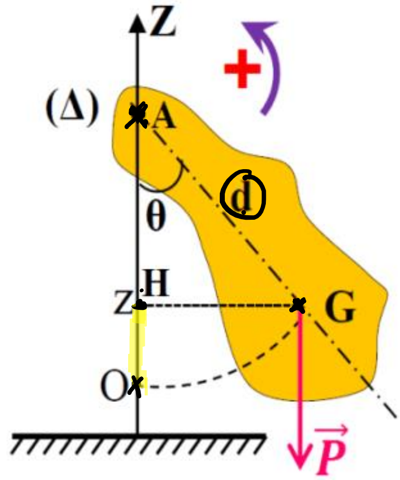
Étude énergétique d'un pendule pesant

Energie potentielle de pesanteur

L'énergie potentielle de de pesanteur E_{pp} d'un pendule pesant est donnée par la relation suivante : $E_{pp} = mgz + cte$.

- cte : Est une constante qui dépend du choix de l'état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur en (j) .
- z : La cote du centre d'inertie G du solide dans un repère d'axe (OZ) , dirigé vers le haut
- m : La masse du solide en (Kg) .
- g : L'intensité du pesanteur en $(N.Kg^{-1})$ ou $(m.s^{-2})$
- E_{pp} : L'énergie potentielle de pesanteur (j)

L'expression de E_{pp} en fonction de m , g , d et θ



$E_{pp} = m.g.z + cte$

triangle : AHG

$AH = d.\cos\theta$

$z = OH = OA - AH$

$= d - AH$

$z = d - d.\cos\theta$

$\Rightarrow z = d(1 - \cos\theta)$

Finalement on trouve : $E_{pp} = mgd(1 - cos(\theta)) + cte$

é

Cas des oscillations faibles : $1 - \cos(\theta) = \frac{\theta^2}{2}$

Donc l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur devient : $E_{pp} = \frac{1}{2}mgd.\theta^2 + Cte$

Remarque :

$\Delta E_{pp}(AB) = E_{pp}(B) - E_{pp}(A)$

$= m.g.z_B + cst - (mgz_A + cst)$

$= m.g z_B + \cancel{cst} - mgz_A - \cancel{cst}$

$\boxed{\Delta E_{pp}(AB) = mg(z_B - z_A)}$

La variation de l'énergie potentielle de pesanteur ne dépend pas de l 'état de référence

Energie mécanique du pendule pesant

$\cancel{\frac{1}{2}mv^2}$

$\boxed{E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2}$

❖ Définition :

L'énergie mécanique E_m d'un pendule pesant est égale à la somme de l'énergie potentielle de pesanteur et l'énergie cinétique :$E_m = E_C + E_{pp} = \frac{1}{2}J_\Delta.\dot{\theta}^2 + mgz + cte$.

Cas des oscillations non amorties ''sans frottements''

Mq : $\underline{E_m = cst}$

$(f^2)' = 2.ff'$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2\right) + \frac{d}{dt}\left(mgz + cst\right)$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} \times \cancel{2} J_\Delta . \dot{\theta}\,\ddot{\theta} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m.g.d.\theta^2 + cst\right)$$

$$= J_\Delta.\dot{\theta}\ddot{\theta} + \cancel{\frac{1}{2}} \times \cancel{2} \times m.g.d.\dot{\theta}\theta$$

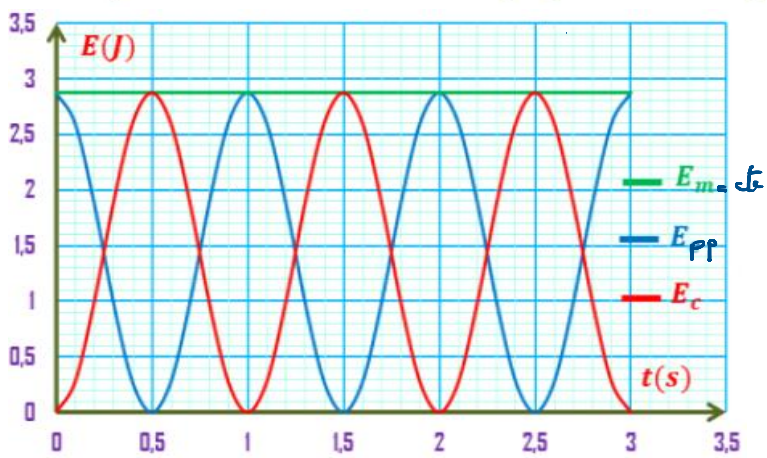
$$= \dot{\theta}\left(J_\Delta\ddot{\theta} + m.g.d.\theta\right)$$

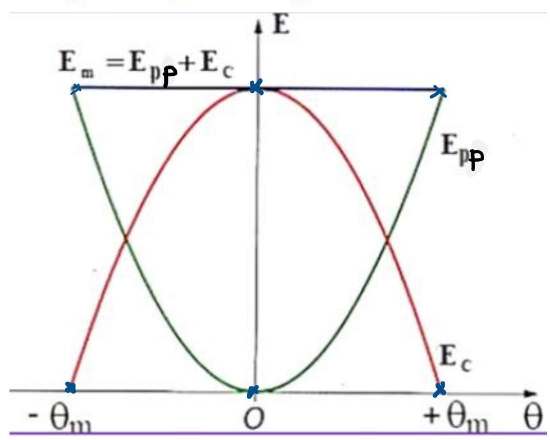
$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{\dot{\theta}}{J_\Delta}\left(\underbrace{\ddot{\theta} + \frac{m.g.d}{J_\Delta}\theta}_{=0}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dE_m}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{E_m = ct}$$

Alors l'énergie mécanique se conserve.

Lorsque les frottements sont négligeable , l'énergie mécanique du pendule pesant se conserve





$E_{pp} = f(z)$

$\boxed{E_{pp} = \alpha \cdot z}$ fct linéaire

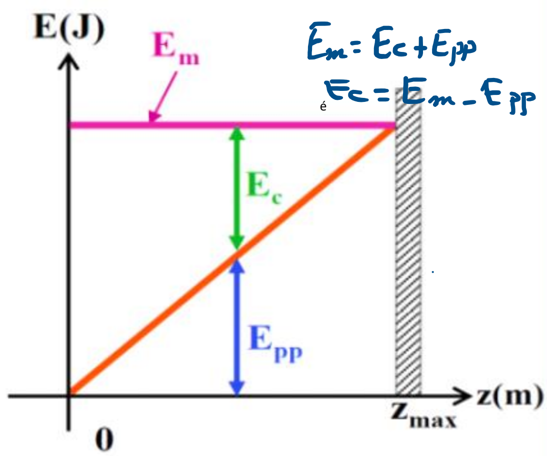
$E_{pp} = mgz + \cancel{cte}^{\,0}$

$\boxed{E_{pp} = m \cdot g z}$

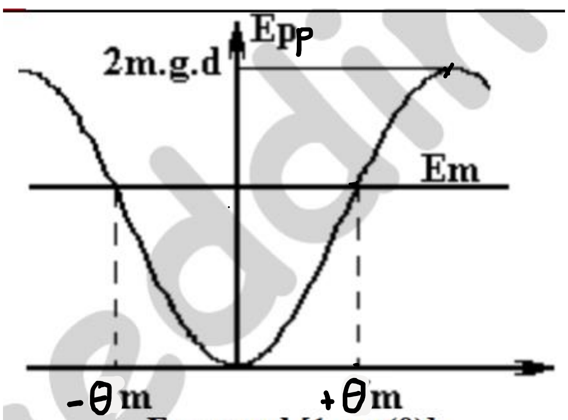
Analogie $\underline{\alpha = m \cdot g}$.

$E_m = E_c + E_{pp}$

$E_c = E_m - E_{pp}$



$\Delta E_c = -\Delta E_{pp}$

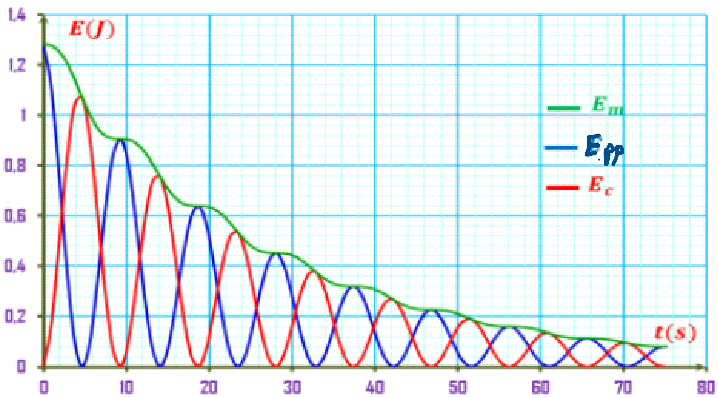


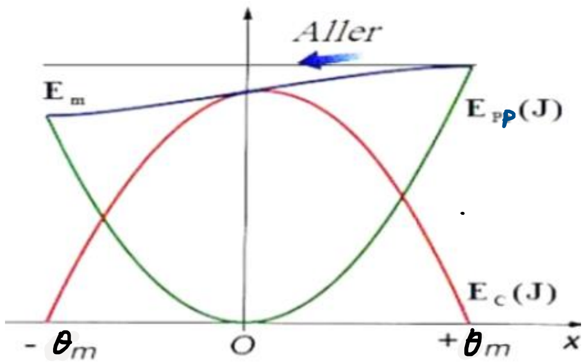
Ep=m.g.d.[1-cos(θ)]

Em < 2.m.g.d : Le système est un oscillateur
Em >2.m.g.d : Le système est en rotation autours de l'axe (Δ)

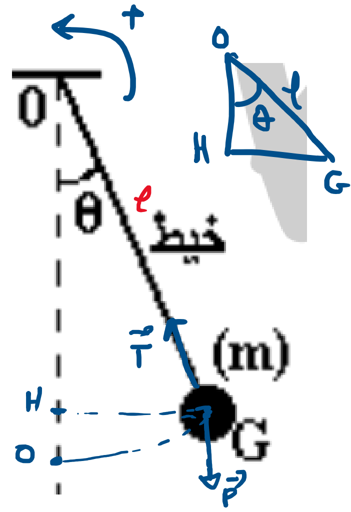
Cas des oscillations amorties "avec frottements":

L'amplitude des oscillations décroit au cours du temps , le régime est pseudopériodique de pseudo-période *T* .
L'énergie mécanique du système diminue au cours du temps , elle est dissipée par un transfert thermique .





Pendule simple



Le **pendule simple** est une masse ponctuelle fixée à l'extrémité d'un fil inextensible de masse négligeable, et oscillant sous l'effet de la pesanteur.

$\boxed{d=\ell}$ et $\boxed{J_\Delta = m.\ell^2}$ ← Très importants.

Eq. diff.

SE : {Le solide (S)}

BF : $\vec{P}$: Le poids.

$\vec{T}$: La tension du fil.

RFD en rotation $\sum \cancel{M_\Delta(\vec{T})} + M(\vec{P}) = J_\Delta \ddot{\theta}$; $\vec{T}$ se coupe avec (Δ).

$$-P.HG = J_\Delta \ddot{\theta} \Rightarrow -m.g.\ell \sin\theta = J_\Delta . \ddot{\theta}$$

$\sin\theta \simeq \theta$ pour les faibles oscillation

$$-\cancel{m}.g.\cancel{\ell}\theta = \cancel{m}\,\cancel{\ell}\ell\ddot{\theta} \Rightarrow -g\theta = \ell\ddot{\theta}$$

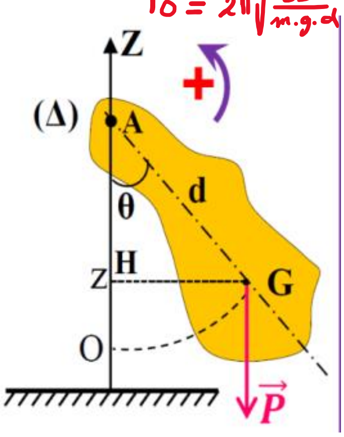
$$\Rightarrow (\ell\ddot{\theta} + g\theta = 0) \times \frac{1}{\ell} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

L'éq. diff.

L'expression de $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

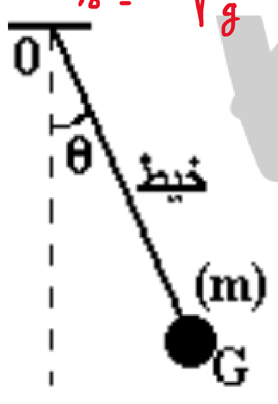
- La longueur du pendule simple synchrone avec le pendule pesant (ont même période propre T_0)

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{m.g.d}}$



é

$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$



Les pendules sont synchrones : $T_0' = T_0$

é

$$\cancel{2}\pi\sqrt{\frac{\ell}{\cancel{g}}} = \cancel{2}\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{m\cancel{g}d}} \Rightarrow \boxed{\ell = \frac{J_\Delta}{m.d}}.$$