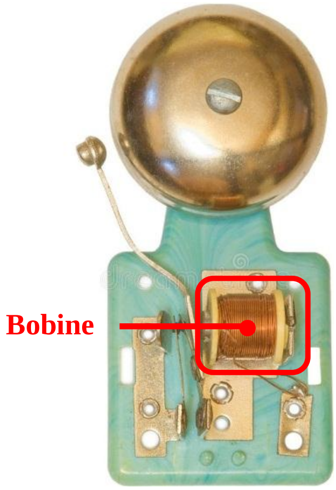
Leçon N°7 :
Dipôle RL

Introduction :



La bobine peut utiliser dans une large variété des montages électriques, comme la sonnette, les transformateurs électriques, le détecteur des métaux, les antennes, des montages de démarrage d'un moteur à essence, …

- **Qu'est-ce qu'une bobine ?**
- **Quelle est leur rôle dans le circuit électrique ?**
- **Comment se comporte-t-elle dans un circuit électrique ?**

I. La bobine

1. Définition et symbole d'une bobine

Une bobine est un dipôle électrique constitué d'un enroulement d'un fil métallique conducteur, généralement en cuivre, autour d'un cylindre isolant. Le fil est recouvert d'une gaine ou d'un vernis isolant.

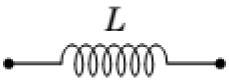
Exemple d'une bobine

Son symbole dans le circuit électrique est :

L : est une grandeur qui caractérise la bobine, elle s'appelle *inductance de la bobine*, son unité est *Henry* (*H*).
r : est la résistance interne de la bobine en (Ω).

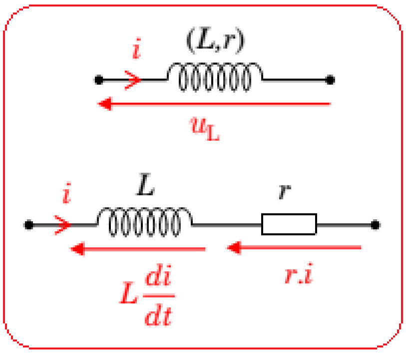
Remarque :

Si la résistance interne de la bobine est négligeable $\boldsymbol{r = 0}$, son symbole devient :



2. La tension aux bornes d'une bobine

La tension $\boldsymbol{u_L}$ aux bornes d'une bobine d'inductance L et de résistance interne r parcourue par un courant électrique d'intensité $\boldsymbol{i}$ est donnée par la relation suivante :



$$\boldsymbol{u_L(t) = L\frac{di}{dt} + ri}$$

- Si la résistance interne de la bobine est négligeable $r = 0$, la tension entre ses bornes devient :

$$\boldsymbol{u_L(t) = L\frac{di}{dt}}$$

- Si la bobine est parcourue par un courant d'intensité constante $\boldsymbol{i = Cte}$, alors :

$$\frac{di}{dt} = 0$$

Et :

$$u_L(t) = r \cdot i$$

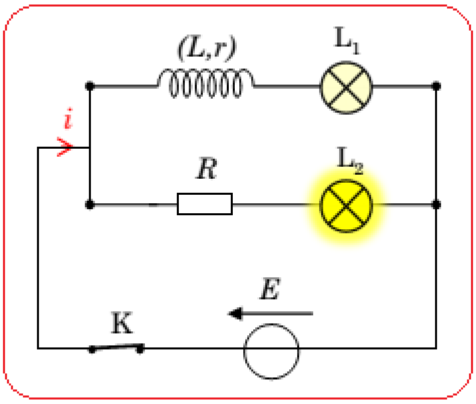
⇒ La bobine se comporte comme un *conducteur ohmique* de résistance r.

Remarque :

- Si l'intensité du courant électrique *varie très rapidement*, le terme $\frac{di}{dt}$ prend une *valeur très grande*, et ainsi $u_L(t)$, c'est le cas de l'ouverture d'un circuit comportant une bobine, alors on observe *une surtension* aux bornes de la bobine. Ce phénomène est utilisé par exemple pour provoquer des étincelles aux bornes de la bougie d'un moteur à essence.

3. L'influence d'une bobine sur le courant électrique dans un circuit

On réalise le montage expérimental ci-contre dans lequel les deux lampes (1) et (2) sont identiques, et la résistance de la bobine et celle du conducteur ohmique ont la même valeur $R = r$.



– Lorsqu'on *ferme* l'interrupteur K, on remarque que la lampe L_2 *s'allume avant* la lampe L_1.
– Lorsqu'on *ouvre* l'interrupteur K, on remarque que la lampe L_2 *s'éteint avant* la lampe L_1.

Conclusion :

La bobine *retarde l'établissement et l'annulation* de courant électrique dans le circuit électrique.

II. Réponse d'un dipôle *RL* à un échelon de tension

1. Définition

Le *dipôle* $\boldsymbol{RL}$ est l'association en série d'un conducteur ohmique de résistance $\boldsymbol{R}$ et d'une bobine d'inductance $\boldsymbol{L}$, et de résistance interne $\boldsymbol{r}$.

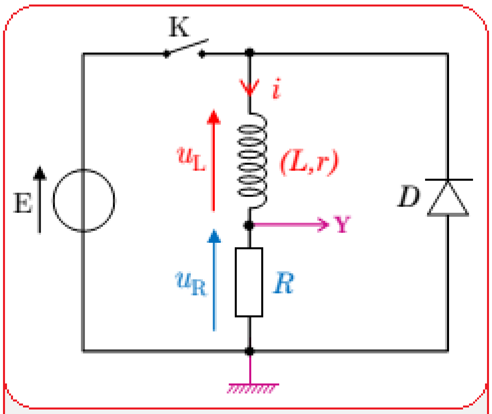
La résistance totale du dipôle $\boldsymbol{RL}$ est : $R_T = R + r$

2. Réponse d'un dipôle *RL* à un échelon de tension – étude expérimentale

On considère le montage électrique ci-contre.

On prend : $E = 6V$; $L = 0,2H$; $R_T = 100\Omega$

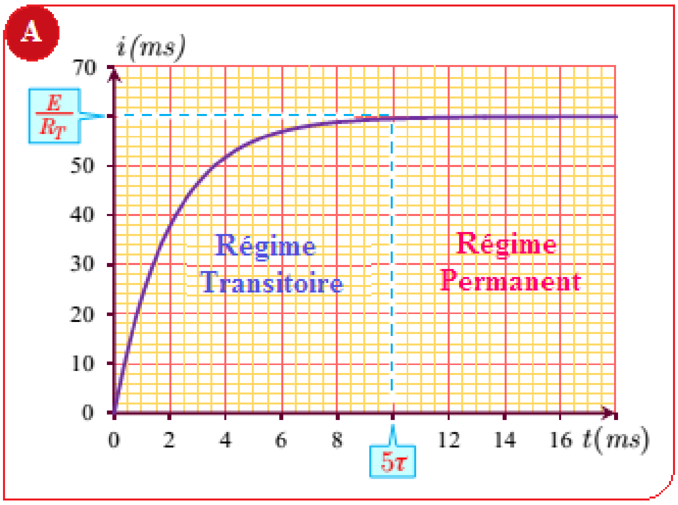
– A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K, et on visualise la variation de l'intensité du courant électrique i en fonction du temps t. On obtient la *courbe A* : le dipôle $\boldsymbol{RL}$ est soumis à un *échelon de tension montant* : **L'établissement du courant électrique**.
– Qu'on l'intensité du courant devient constante, on ouvre l'interrupteur K. On obtient la *courbe B* : le dipôle $\boldsymbol{RL}$ est soumis à un *échelon de tension descendant* : **L'annulation du courant électrique**.

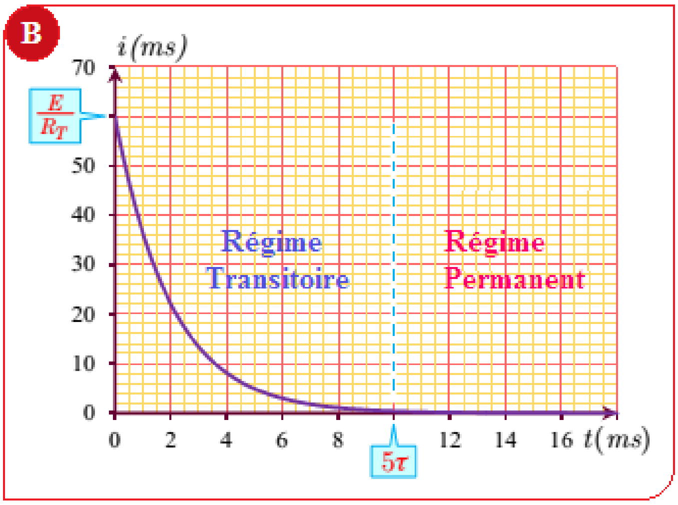


Réponce de RL à un échelon de tension

Remarque :

On utilise la diode (D) dans le circuit pour *éviter l'apparition d'étincelles* causées par la *surtension* entre les bornes de la bobine lors de l'ouverture de l'interrupteur K.





Observations expérimentales :

– La *durée de l'établissement* et de *l'annulation* du courant électrique est égale à $\boldsymbol{5\tau}$.

– On constate *2 régimes* :

☞ **Régime transitoire** : L'intensité $\boldsymbol{i}$ du courant augmente (dans le cas de l'établissement du courant) et diminue (dans le cas de l'annulation du courant). Il est obtenu quand $\boldsymbol{t < 5\tau}$.

☞ **Régime permanant** : L'intensité $\boldsymbol{i}$ du courant reste constante, et égale à $\boldsymbol{E/R_T}$ lors de l'établissement du courant, et **nulle** lors de l'annulation du courant. Il est obtenu quand $\boldsymbol{t \geq 5\tau}$.

3. Réponse *RL* à un échelon montant de tension (établissement du courant)- étude théorique

a. Équation différentielle vérifiée par l'intensité *i* du courant électrique

On considère le circuit $\boldsymbol{RL}$ ci-contre. A l'instant $\boldsymbol{t = 0}$, on ferme l'interrupteur K.

- D'après la loi d'additivité des tensions, on a :

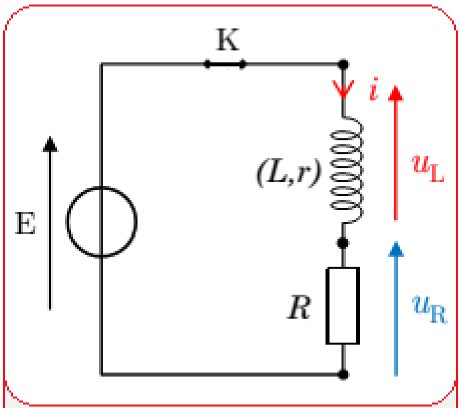
$$u_R + u_L = E$$

- Et d'après la loi d'Ohm :

$$u_R = R\,i$$

- La tension aux bornes de la bobine est :

$$u_L = L\,\frac{di}{dt} + r\,i$$



RL soumis à un échelon montant de tension

Donc :

$$R\,i + L\,\frac{di}{dt} + r\,i = E$$

$$L\,\frac{di}{dt} + (R + r)\,i = E$$

$$L\,\frac{di}{dt} + R_T\,i = E$$

$$\frac{L}{R_T}\,\frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R_T}$$

On pose : $\boldsymbol{\tau = \frac{L}{R_T}}$

L'équation différentielle devient :

$$\boldsymbol{\tau\,\frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R_T}}$$

Remarque :

On a :

$$u_R = R\,i$$

Donc :

$$i = \frac{u_R}{R}$$

Alors :

$$u_L = L\,\frac{d(\frac{u_R}{R})}{dt} + r\,\frac{u_R}{R}$$

On remplace dans loi d'additivité des tensions, on trouve :

$$u_R + \frac{L}{R}\frac{du_R}{dt} + \frac{r}{R}\,u_R = E$$

$$\frac{L}{R}\frac{du_R}{dt} + (\frac{r}{R} + 1)\,u_R = E$$

$$\frac{L}{R}\frac{du_R}{dt} + \frac{R_T}{R}\,u_R = E$$

Finalement :

$$\boldsymbol{\tau\frac{du_R}{dt} + u_R = E\frac{R}{R_T}}$$

C'est l'équation différentielle vérifiée par la tension u_R.

b. Solution de l'équation différentielle

On admet que la solution de l'équation différentielle $\tau\,\frac{di}{dt} + \ i = \frac{E}{R_T}$ s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{i(t) = Ae^{-\alpha t} + B}$$

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, et $\boldsymbol{\alpha}$ sont des constantes à déterminer.

➢ **Détermination de B et α en utilisant l'équation différentielle :**

On a :

$$i(t) = Ae^{-\alpha t} + B$$

Donc :

$$\frac{di}{dt} = -\alpha Ae^{-\alpha t}$$

On remplace les deux expressions précédentes dans l'équation différentielle :

$$-\tau\,\alpha\,Ae^{-\alpha t} + \ Ae^{-\alpha t} + B \ = \frac{E}{R_T}$$

$$Ae^{-\alpha t}(-\tau\,\alpha\ +\ 1) = \frac{E}{R_T} - B$$

Pour que cette expression soit vérifié, il faut que :

$$\begin{cases} -\tau\,\alpha\ +\ 1 = 0 \\ \dfrac{E}{R_T} - B = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha = \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{R_T}{L}} \\ \boldsymbol{B = \dfrac{E}{R_T}} \end{cases}$$

- **Détermination de A en utilisant les conditions initiales :**

A l'instant $t = 0$, on ferme K, ç-à-d : $i(t = 0) = 0$

Donc :

$$i(t=0) = Ae^{-\alpha\times 0} + \frac{E}{R_T} = 0$$

Alors :

$$A + \frac{E}{R_T} = 0$$

D'où :

$$\boldsymbol{A = -\frac{E}{R_T}}$$

Finalement, l'expression de l'intensité du courant $i(t)$ s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{i(t) = \frac{E}{R_T}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

Remarques :

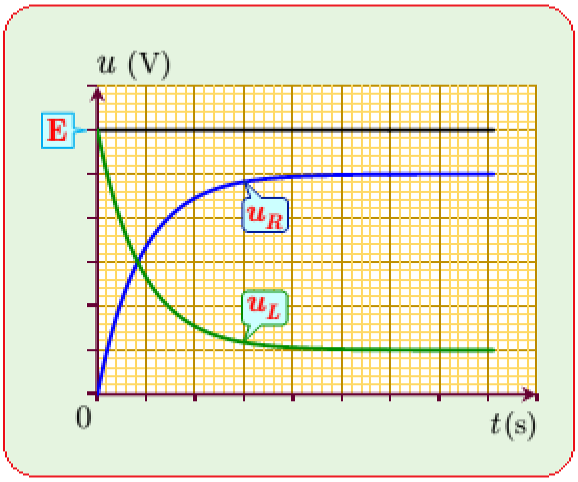
✓ **L'expression de la tension $u_R(t)$**

On a :

$$u_R(t) = R\,i(t)$$

Donc :

$$\boldsymbol{u_R(t) = \frac{E.R}{R_T}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$



✓ **L'expression de la tension $u_L(t)$**

On a :

$$u_R + u_L(t) = E$$
$$u_L(t) = E - u_R$$

Donc :

$$\boldsymbol{u_L(t) = E - \frac{E.R}{R_T}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

☞ Si $\boldsymbol{r}$ est négligeable devant $\boldsymbol{R}$, alors : $R_T \approx R$

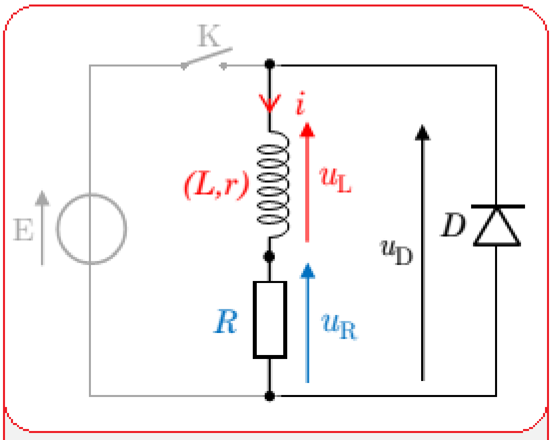
Donc :

$$\boldsymbol{u_L(t) = E\,e^{-\frac{t}{\tau}}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{u_R(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

4. Réponse *RL* à un échelon descendant de tension (annulation du courant) - étude théorique

a. Équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant *i*

On considère le circuit suivant, tel que l'intensité du courant est *constante* : $\boldsymbol{I_0 = \frac{E}{R_T}}$, à l'instant $\boldsymbol{t = 0}$, on ouvre l'interrupteur K. On considère que la diode (D) est idéale : $\boldsymbol{U_D = 0}$.



RL soumis à un échelon descendant de tension

- D'après la loi d'additivité des tensions, on a :

$$u_R + u_L = 0$$

- Et d'après la loi d'Ohm :

$$u_R = R.i$$

- La tension aux bornes de la bobine est :

$$u_L = L\,\frac{di}{dt} + r\,i$$

Donc :

$$R\,i + L\,\frac{di}{dt} + r\,i = 0$$

$$L\,\frac{di}{dt} + R_T\,i = 0$$

$$\frac{L}{R_T}\,\frac{di}{dt} + \ i = 0$$

On pose : $\boldsymbol{\tau = \frac{L}{R_T}}$

L'équation différentielle devient :

$$\boldsymbol{\tau\,\frac{di}{dt} + \ i = 0}$$

Remarque :

On a :

$$u_R = R\,i$$

Donc :

$$i = \frac{u_R}{R}$$

Alors :

$$u_L = L\,\frac{d(\frac{u_R}{R})}{dt} + r\,\frac{u_R}{R}$$

On remplace dans loi d'additivité des tensions, on trouve :

$$u_R + \frac{L}{R}\,\frac{du_R}{dt} + \frac{r}{R}\,u_R = 0$$

De même façon, on trouve que :

$$\boldsymbol{\tau\frac{du_R}{dt} + u_R = 0}$$

C'est l'équation différentielle vérifiée par la tension u_R.

c. Solution de l'équation différentielle

On admet que la solution de l'équation différentielle $\tau\,\frac{di}{dt} + \ i = 0$ s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{i(t) = Ae^{-mt}}$$

$\boldsymbol{A}$, et $\boldsymbol{m}$ sont des constantes à déterminer.

➢ **Détermination de m en utilisant l'équation différentielle :**

On a :

$$i(t) = Ae^{-mt}$$

Donc :

$$\frac{di}{dt} = -m\,Ae^{-mt}$$

On remplace les deux expressions précédentes dans l'équation différentielle :

$$-\tau\,m\,Ae^{-mt} + \ Ae^{-mt} \ = 0$$

$$Ae^{-mt}(-\tau\, m\ +\ 1) = 0$$

Pour que cette expression soit vérifié, il faut que :

$$-\tau\, m\ +\ 1 = 0$$

Donc :

$$\boldsymbol{m = \frac{1}{\tau} = \frac{R_T}{L}}$$

➢ **Détermination de *A* en utilisant les conditions initiales :**

A l'instant $\boldsymbol{t} = \ \mathbf{0}$, on a : $i(t=0) = I_0 = \frac{E}{R_T}$

Donc :

$$i(t=0) = Ae^{-\alpha\times 0} = \frac{E}{R_T}$$

Alors :

$$\boldsymbol{A = \frac{E}{R_T}}$$

Finalement, l'expression de l'intensité du courant $i(t)$ s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{i(t) = \frac{E}{R_T}\ e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Remarques :

✓ **L'expression de la tension $\boldsymbol{u_R}(\mathbf{t})$**

On a :

$$u_R(t) = R\ i(t)$$

Donc :

$$\boldsymbol{u_R(t) = \frac{E.R}{R_T} e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

✓ **L'expression de la tension $\boldsymbol{u_L}(\mathbf{t})$**

On a :

$$u_R + u_L(t) = 0$$
$$u_L(t) = -u_R$$

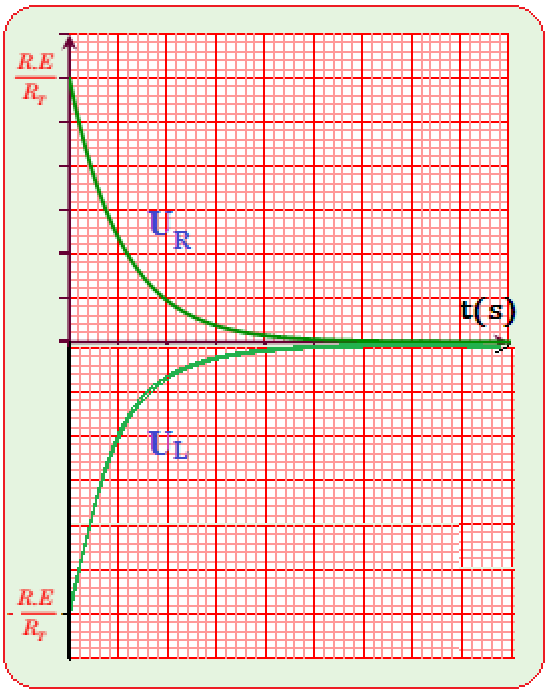
Donc :

$$\boldsymbol{u_L(t) = -\frac{E.R}{R_T}\ e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

☞ Si $\boldsymbol{r}$ est négligeable devant $\boldsymbol{R}$, alors : $R_T \approx R$

Donc :

$\boldsymbol{u_L(t) = -E\ e^{-\frac{t}{\tau}}}$ et $\boldsymbol{u_R(t) = E\ e^{-\frac{t}{\tau}}}$



5. Constante du temps τ

a. Définition

La constante du temps d'un dipôle RL est la grandeur :

$$\boldsymbol{\tau = \frac{L}{R_T} = \frac{L}{R+r}}$$

b. Analyse dimensionnelle de la constante du temps τ

– Pour une bobine idéale :

$$u_L = L\,\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{u_L}{\frac{di}{dt}}$$

Donc :

$$[L] = \frac{[u]}{\frac{[i]}{[t]}} = \frac{[u][t]}{[i]} = \frac{[u].T}{I}$$

– Pour le conducteur ohmique :

$$u_R = Ri \quad \Rightarrow \quad R = \frac{u_R}{i}$$

Donc :

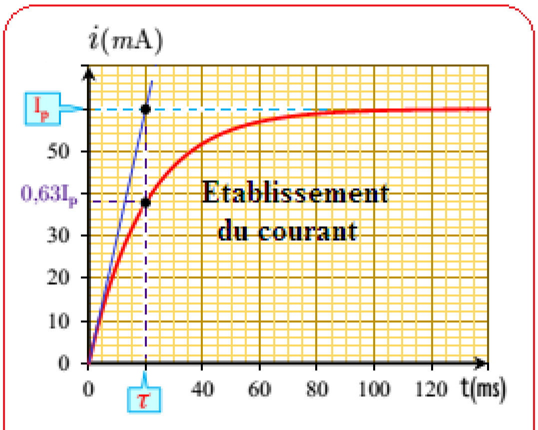
$$[R] = \frac{[u]}{[i]} = \frac{[u]}{I}$$

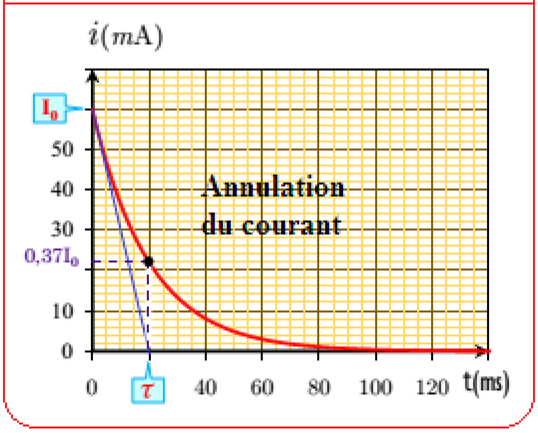
On en déduit que :

$$[\boldsymbol{\tau}] = \left[\frac{L}{R}\right] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{[u].T}{I} \times \frac{I}{[u]} = \boldsymbol{T}$$

La constante du temps $\boldsymbol{\tau}$ a *une dimension de temps*, elle s'exprime en *seconde* (s).

c. Détermination de la constante de temps





✂ **Etablissement du courant :** $\boldsymbol{i(t) = I_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$

- **Méthode ❶ :**

A $\boldsymbol{t = \tau}$, on a :

$$\boldsymbol{i(t=\tau) = I_0\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}\right) = I_0(1 - e^{-1}) = 0,63.I_0}$$

Donc : $\boldsymbol{\tau}$ représente *l'abscisse correspondante à l'ordonnée* $\boldsymbol{0,63.I_0}$.

- **Méthode ❷ :** $\boldsymbol{\tau}$ est *l'abscisse du point d'intersection* de la *tangente à la courbe* à $\boldsymbol{t = 0}$ avec *la droite* $\boldsymbol{i = I_0}$.

✂ **Annulation du courant :** $\boldsymbol{i(t) = I_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}}$

- **Méthode ❶ :**

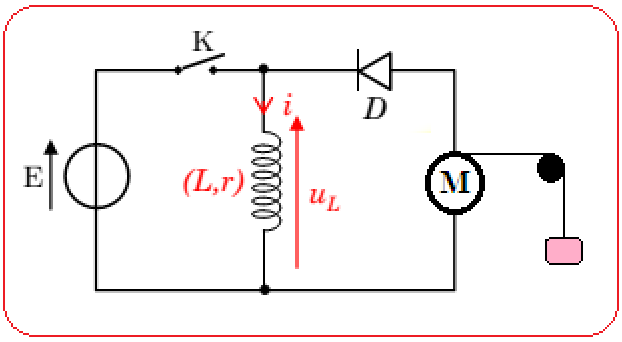
A $\boldsymbol{t = \tau}$, on a : $\boldsymbol{i(t=\tau) = I_0\, e^{-\frac{\tau}{\tau}} = I_0\, e^{-1} = 0,37.I_0}$

Donc : $\boldsymbol{\tau}$ représente *l'abscisse correspondante à l'ordonnée* $\boldsymbol{0,37.I_0}$.

- **Méthode ❷ :** $\boldsymbol{\tau}$ est *l'abscisse du point d'intersection* de la *tangente à la courbe* à $\boldsymbol{t = 0}$ avec *l'axe de temps*.

III. Energie emmagasinée dans une bobine

1. Mise en évidence expérimentale



🖂 Quand on ferme l'interrupteur K, un courant électrique se passe dans la bobine. La diode (D) bloque le courant de passer dans le moteur électrique.

🖂 Quand on ouvre l'interrupteur K, le moteur électrique (M) commence à tourner.

- ✉ La bobine *stocke une énergie magnétique* lorsque le circuit est fermé, et la libère au moteur électrique lorsque le circuit est ouvert.
- ✉ L'énergie emmagasinée dans la bobine augmente avec son inductance $\boldsymbol{L}$, ou avec l'intensité $\boldsymbol{i}$ du courant électrique qui la traverse.

2. Energie emmagasinée dans une bobine

- La puissance électrique reçue par une bobine est :

$$P = u_L . i$$

Pour une bobine idéale :

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

Donc :

$$P = L\, i \frac{di}{dt}$$

$$P = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L\, i^2\right)$$

Et puisque :

$$P = \frac{dE_m}{dt}$$

Donc l'énergie magnétique emmagasinée par une bobine est :

$$\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2} L\, i^2}$$

$\boldsymbol{E_m}$: En *joule* (*J*).
$\boldsymbol{L}$: En *Henry* (*H*).
$\boldsymbol{i}$: En *Ampère* (*A*).