

Les Applications (Résumé)

Soit E et F deux ensembles non vides.

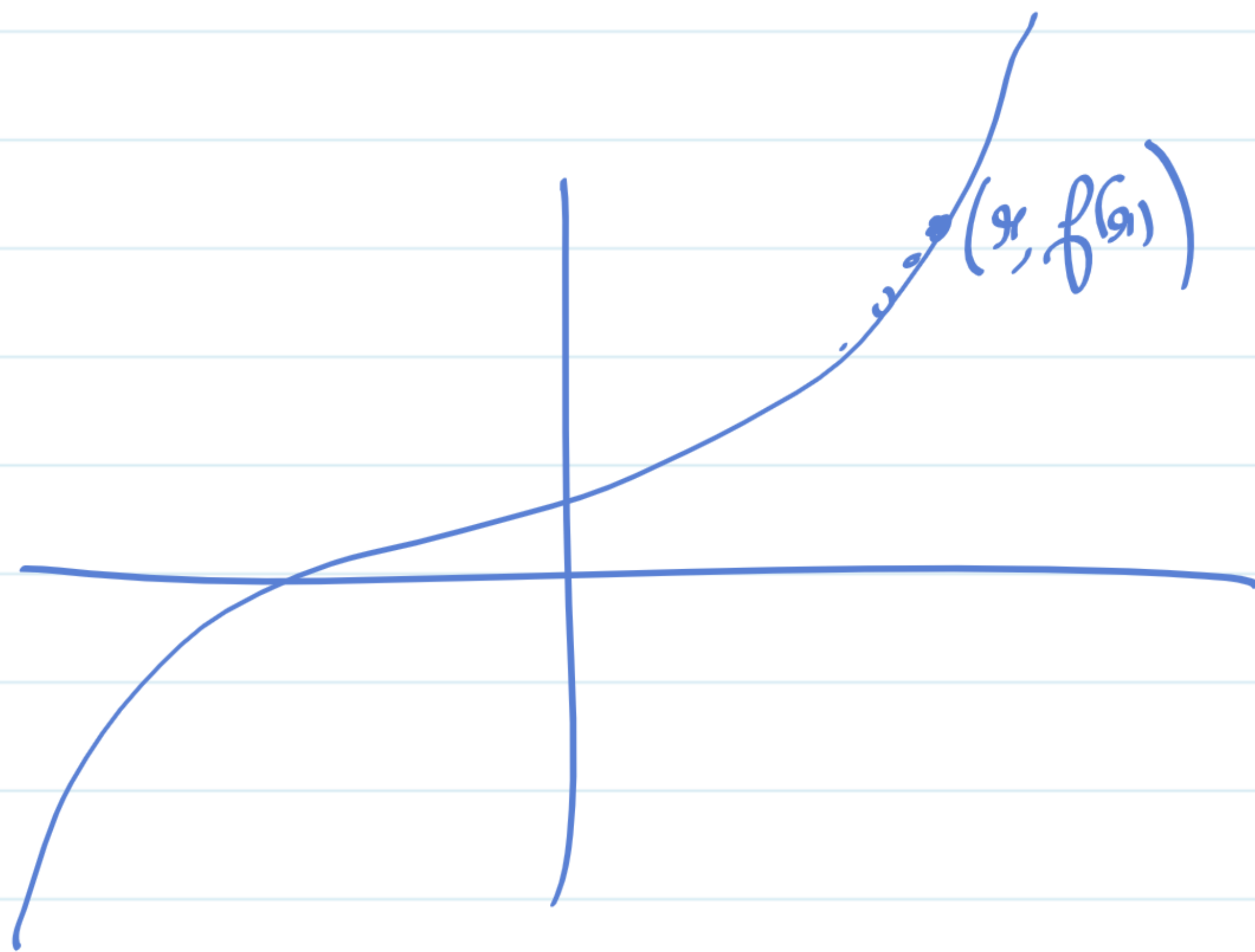
$$f: E \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto f(x) = y$$

f est une application $\Leftrightarrow \forall x \in E \exists ! y \in F \quad f(x) = y$

- E s'appelle ensemble de départ.
- F s'appelle d'arrivée.
- y s'appelle l'image de x .
- x s'appelle l'antécédent de y .

$$G(f) = \{ (x, f(x)) / x \in E \}.$$

↑
graphe de f .



Exemples :

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

C'est une application car $\forall x \in \mathbb{R}_+ \exists ! y \in \mathbb{R} / \sqrt{x} = y$.

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \{-1, 1\}$$
$$n \longmapsto (-1)^n$$

Égalité de deux applications

$$f: E \rightarrow F \\ x \mapsto f(x)$$

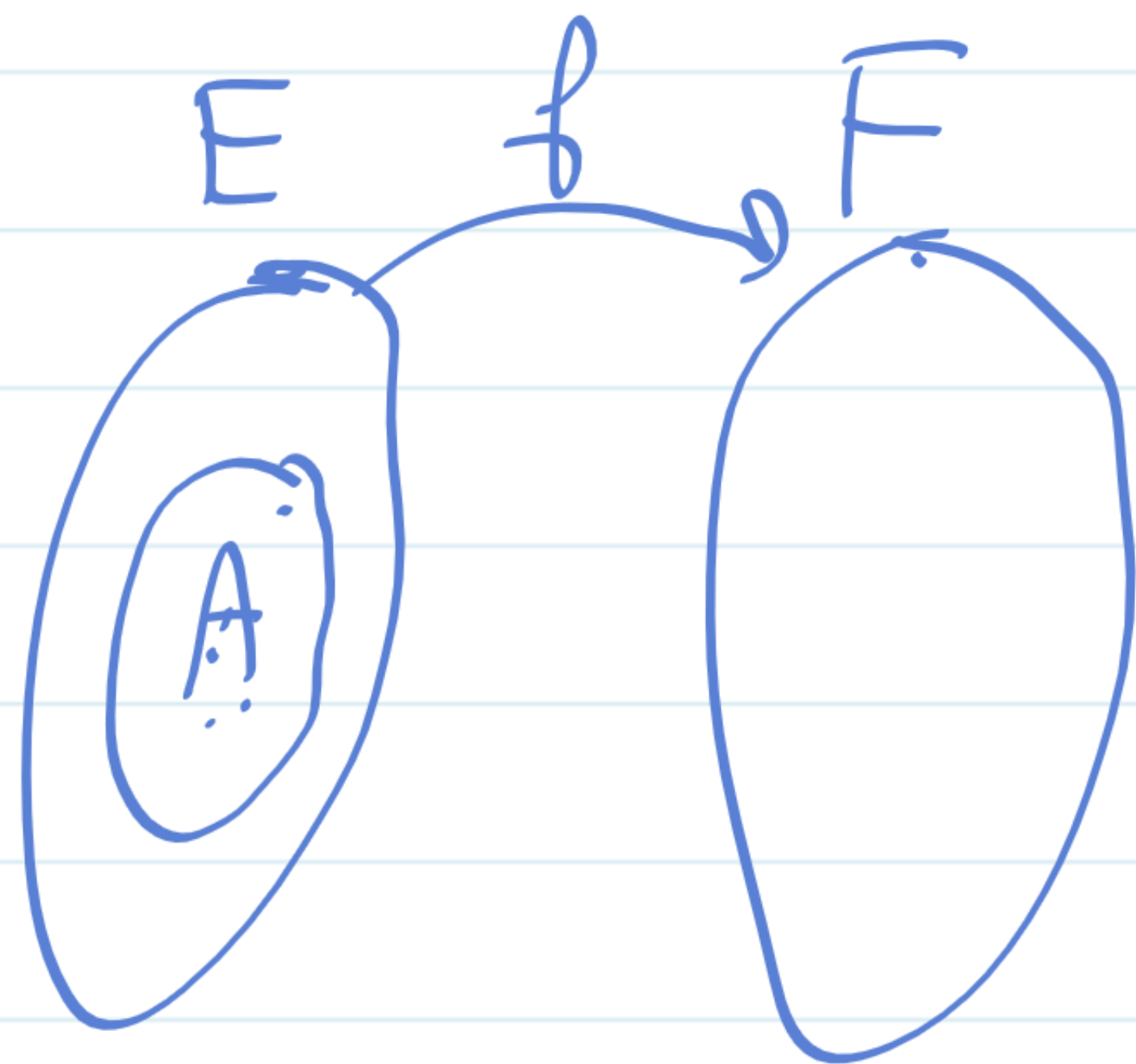
$$\text{et } g: E' \rightarrow F' \\ x \mapsto g(x)$$

$$f = g \iff E = E' \text{ et } F = F' \text{ et } f(x) = g(x)$$

Image directe d'un ensemble:

$$f(A) = \{ f(x) / x \in A \}$$

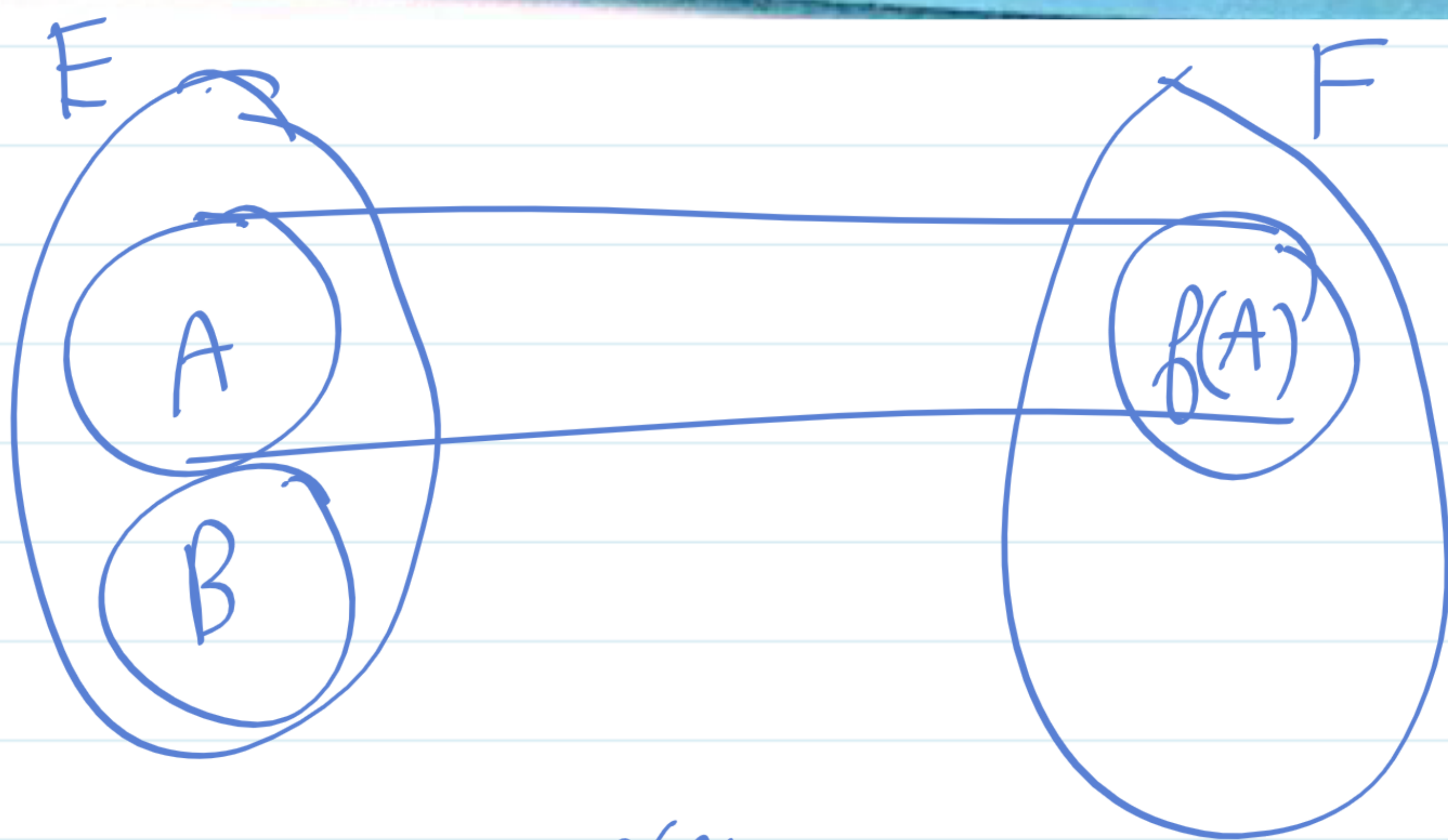
$$y \in f(A) \iff (\exists x \in A) \quad f(x) = y$$



Proposition

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F et A et B deux parties de E . Alors :

- 1) $f(A) \subset F$; 2) $A = \emptyset \iff f(A) = \emptyset$; 3) $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$
- 4) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$; 5) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$



$$3) \quad A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$$

Supposons que $A \subset B$

$$y \in f(A) \implies \exists x \in A \quad f(x) = y$$

$$\implies \exists x \in B \quad f(x) = y$$

$$\implies y \in f(B)$$

$$(A \subset B)$$

$$\text{Du } f(A) \subset f(B)$$

$$\text{Donc : } A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$$

$$4) f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\Leftrightarrow \exists x \in A \cup B \quad f(x) = y \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in A \quad f(x) = y) \text{ ou } (\exists x \in B \quad f(x) = y) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \text{ ou } y \in f(B) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$5) f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Rightarrow \exists x \in A \cap B \quad f(x) = y \\ &\Rightarrow (\exists x \in A \quad f(x) = y) \text{ et } (\exists x \in B \quad f(x) = y) \\ &\Rightarrow y \in f(A) \text{ et } y \in f(B) \\ &\Rightarrow y \in f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B), \text{ (on peut exemplifier)}$$

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2$$

$$A = [-2, -1]; B = [1, 2]$$

$$f(A) = [1, 4] = f(B)$$

$$A \cap B = \emptyset \text{ alors } f(A \cap B) = \emptyset$$

$$f(A) \cap f(B) = [1, 4] \cap [4, 4] = [1, 4]$$

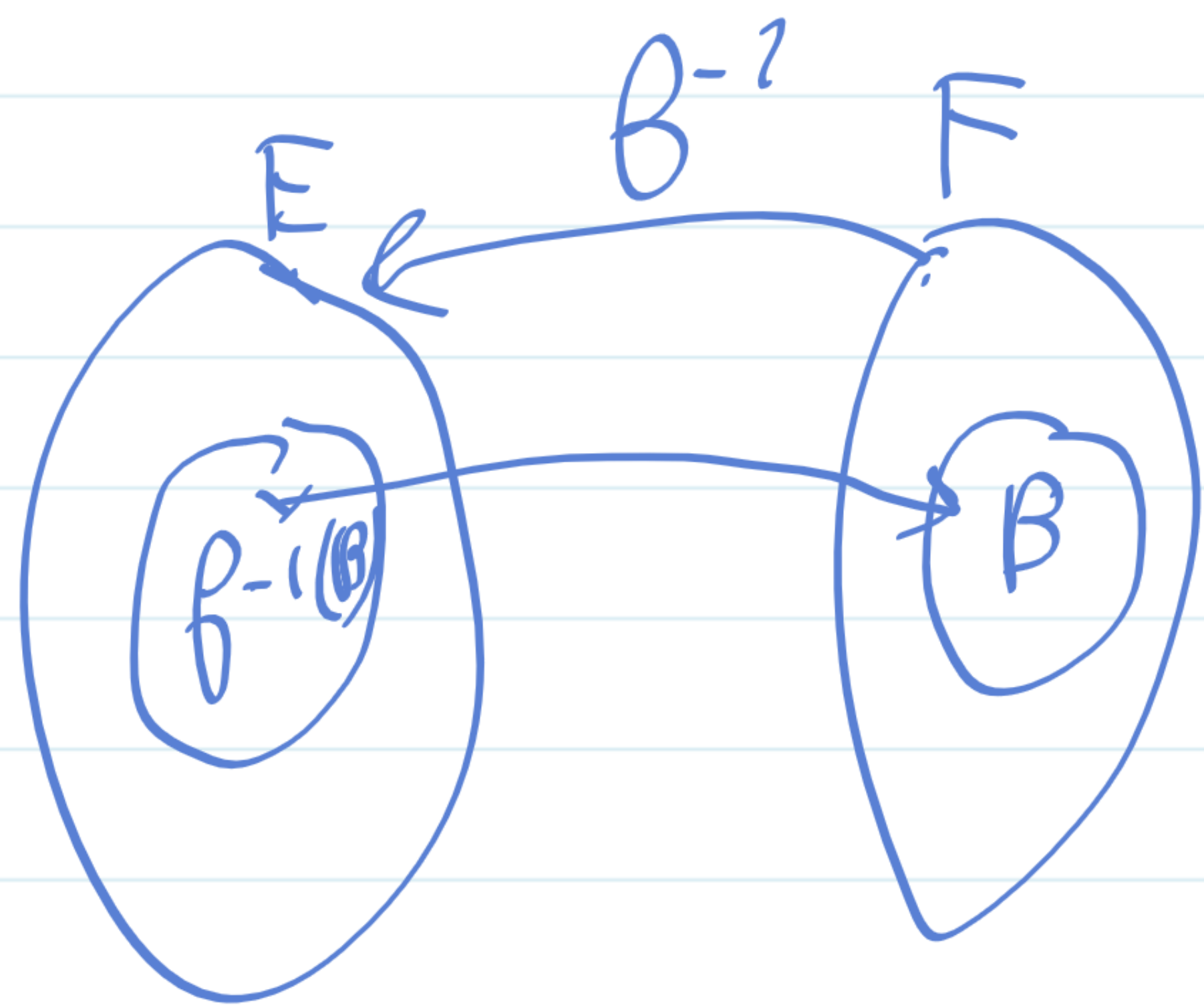
$$\neq [1, 4].$$

Image réciproque d'un ensemble:

$$B \subset F$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$$



Exemple:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{1, 2, 3\}) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \{1, 2, 3\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in \{1, 2, 3\}\} \\ &= \{-1, 1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}. \end{aligned}$$

Proposition

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F et A et B deux parties de F . Alors:

- 1) $f^{-1}(A) \subset E$; 2) $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$
- 3) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$; 4) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

$$2) A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$$

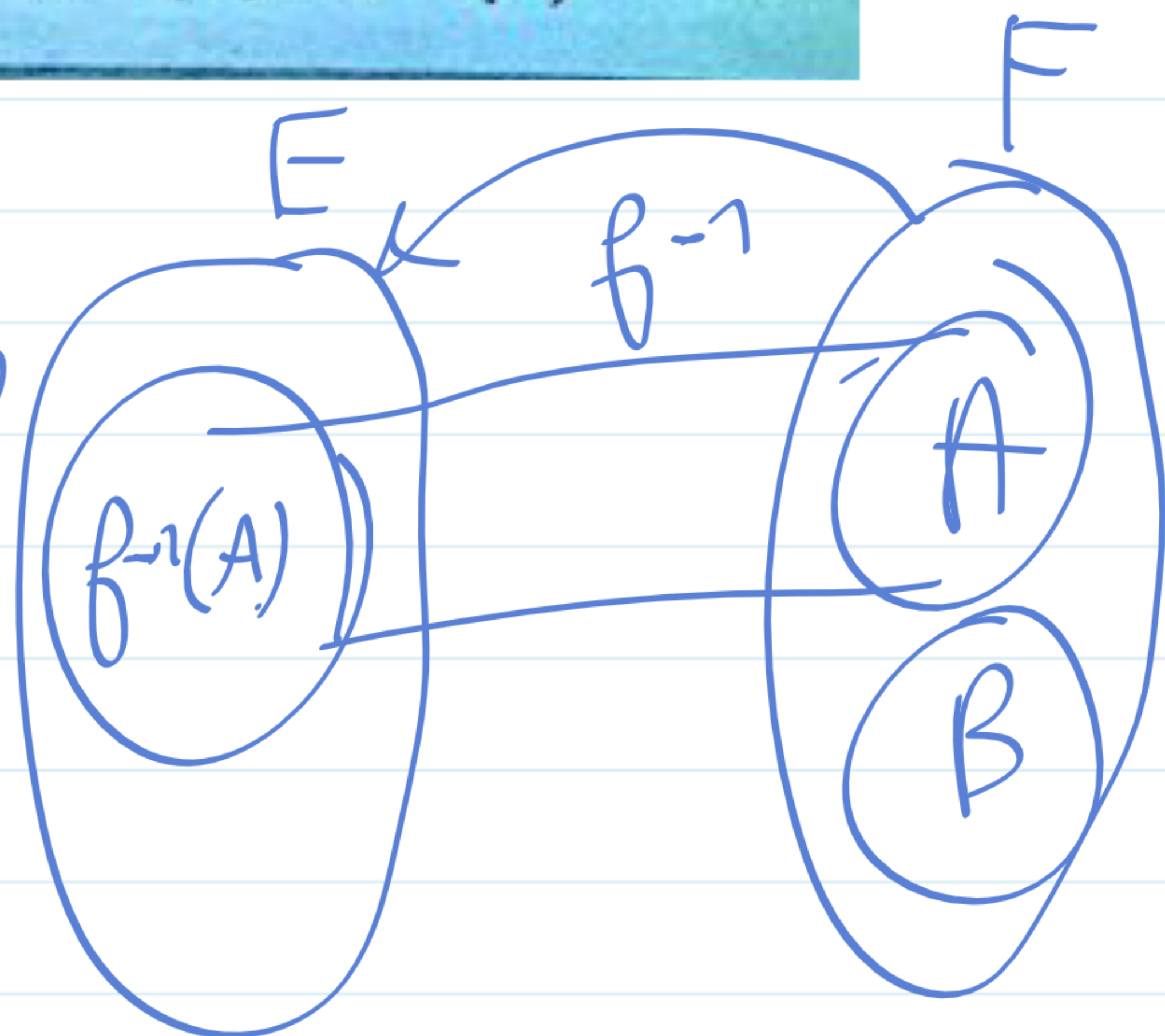
Supposons que $A \subset B$ et m.q. $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

$$x \in f^{-1}(A) \Rightarrow f(x) \in A \subset B$$

$$\Rightarrow f(x) \in B$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(B)$$

$$\text{Alors } f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$$



$$3) f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

$$x \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cup B$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in A \text{ ou } f(x) \in B$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \text{ ou } x \in f^{-1}(B)$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

Donc l'égalité !

$$4) f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

$$x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cap B$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in A \text{ et } f(x) \in B$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \text{ et } x \in f^{-1}(B)$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

Donc l'égalité !

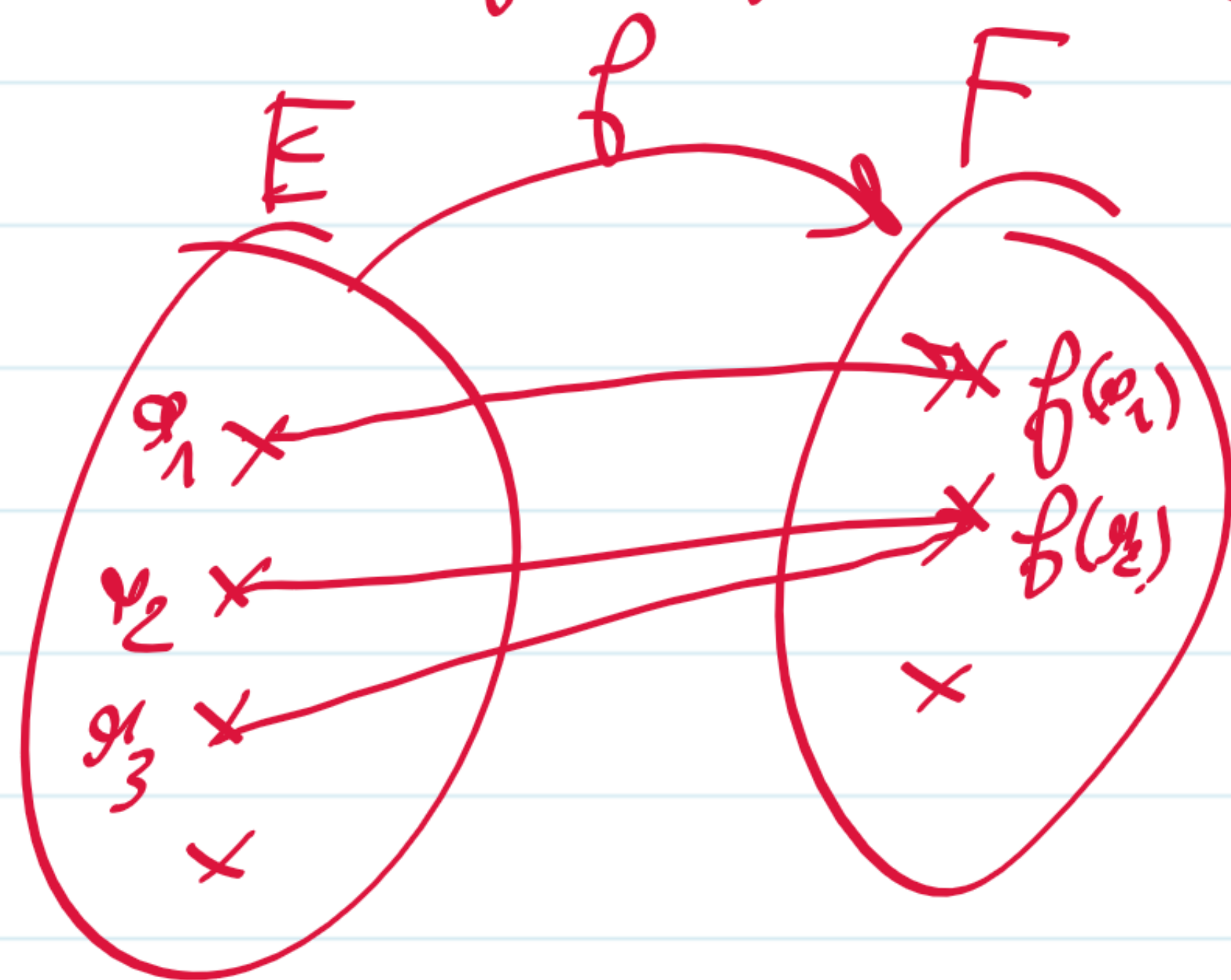
Injection, Surjection et bijection

f est injective $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2 \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$\exists (x, y) \in E^2 \quad f(x) = f(y) \text{ et } x \neq y$



f n'est pas injective



Exemples:

1) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \longmapsto x^2$

$f(-1) = 1$ et $f(1) = 1$ (1 a deux antécédents)

$f(-1) = f(1)$ et $-1 \neq 1$

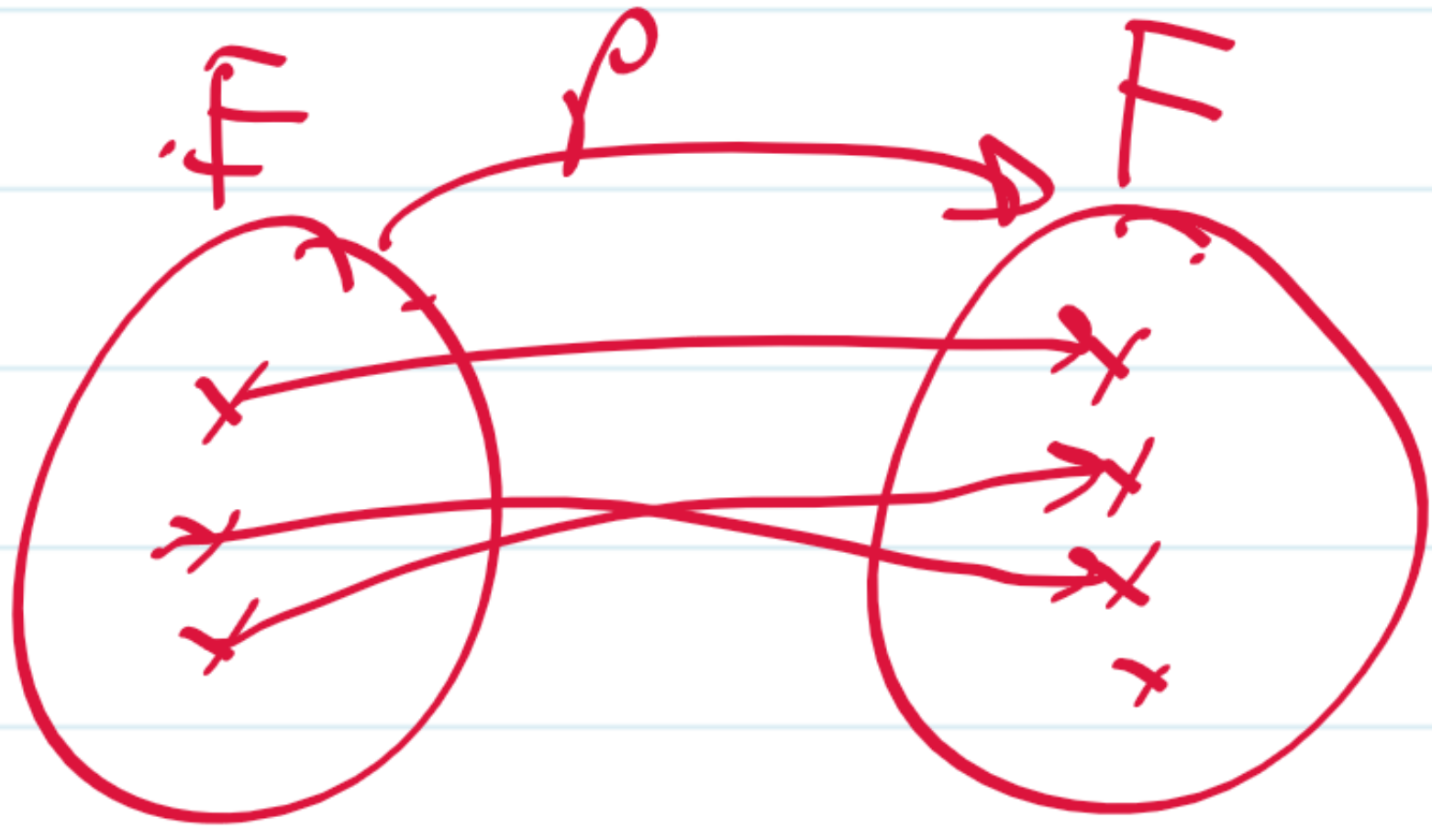
Alors f n'est pas

2) $f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \longmapsto x^2$

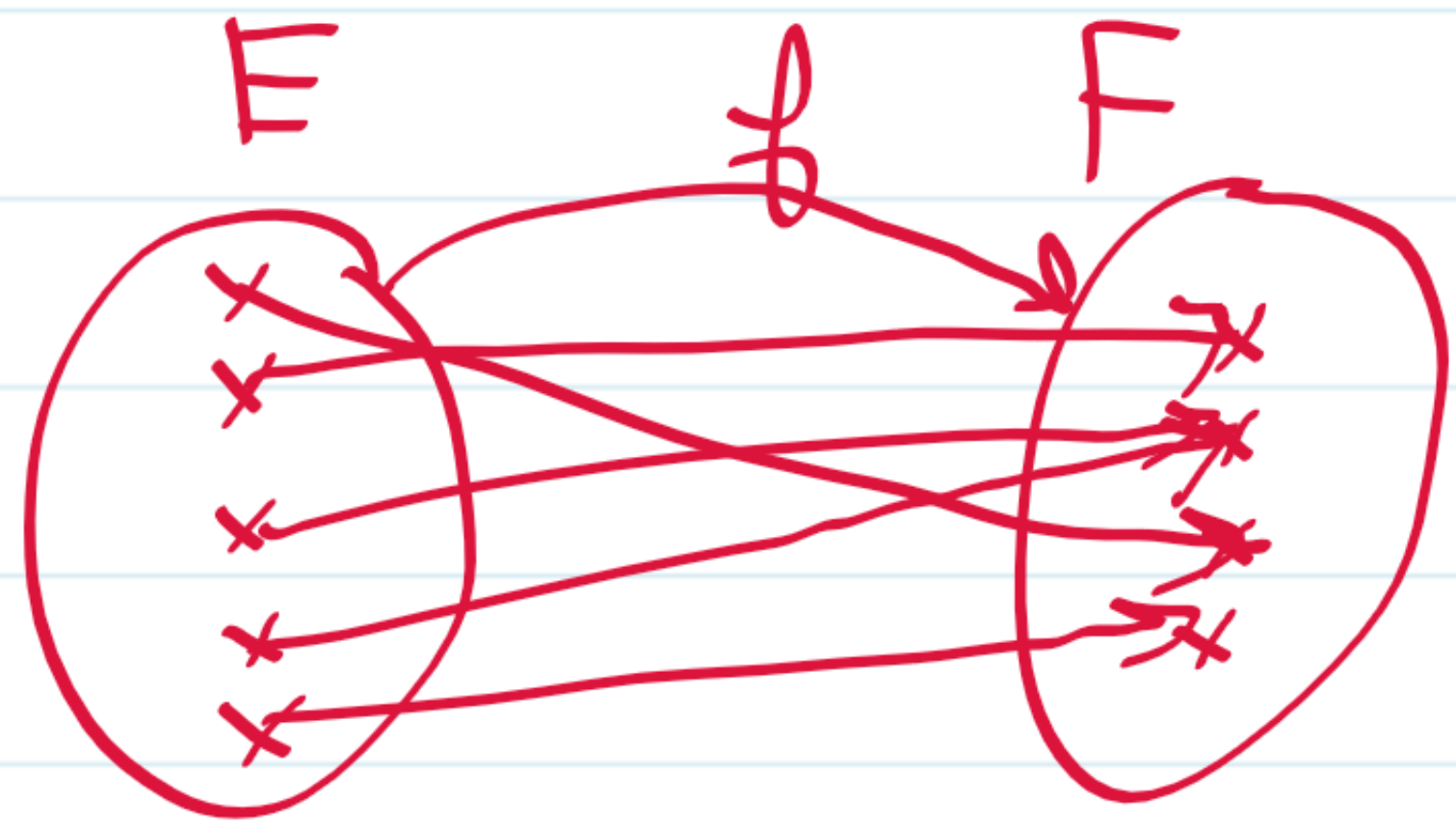
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
 Alors f est injective.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ \Rightarrow x^2 &= y^2 \\ \Rightarrow x &= y \text{ ou } -y \\ \Rightarrow x &= y \end{aligned}$$

f est surjective $\Leftrightarrow (\forall y \in F)(\exists x \in E) f(x) = y$

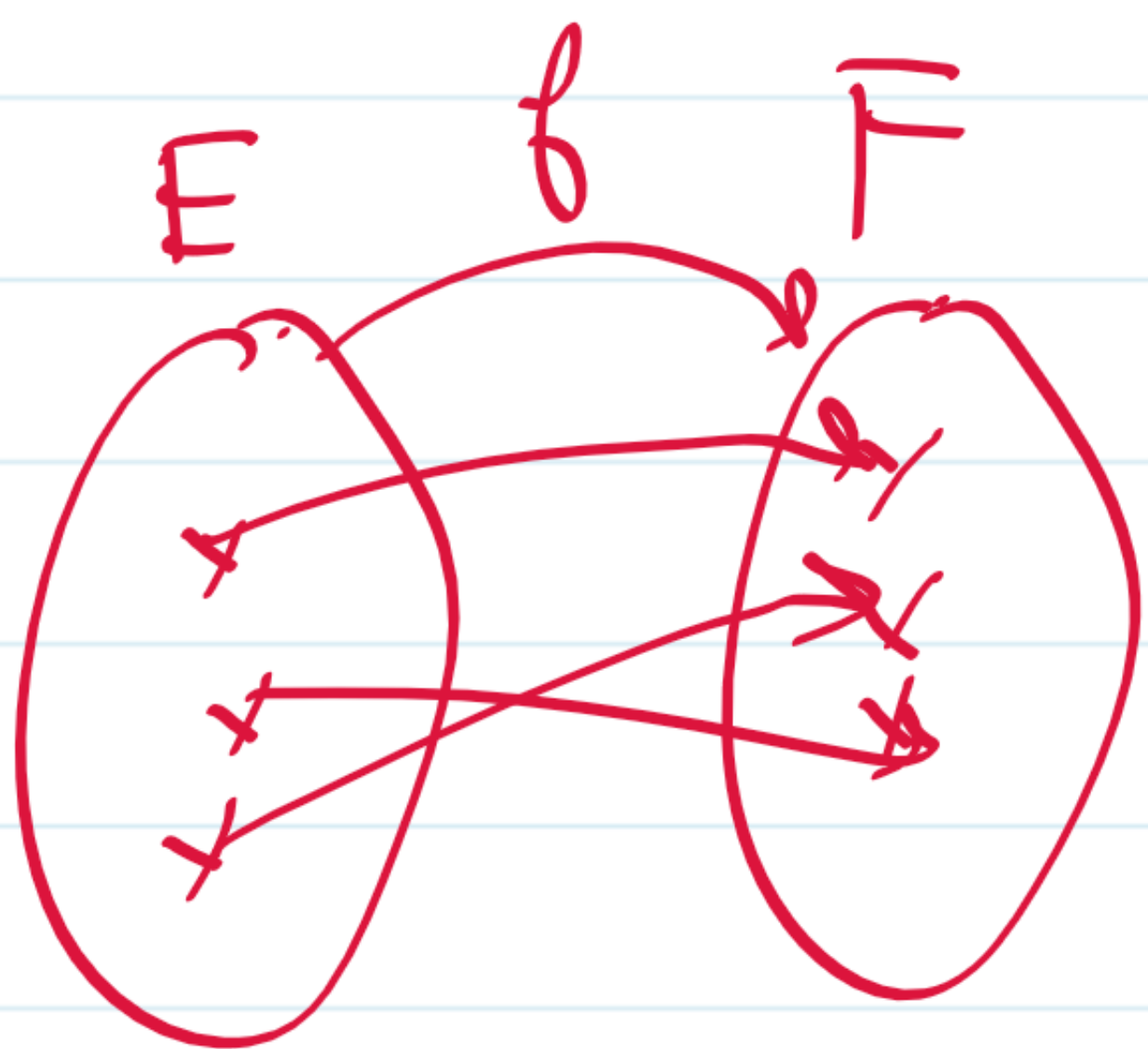


f n'est pas surjective
 f est injective

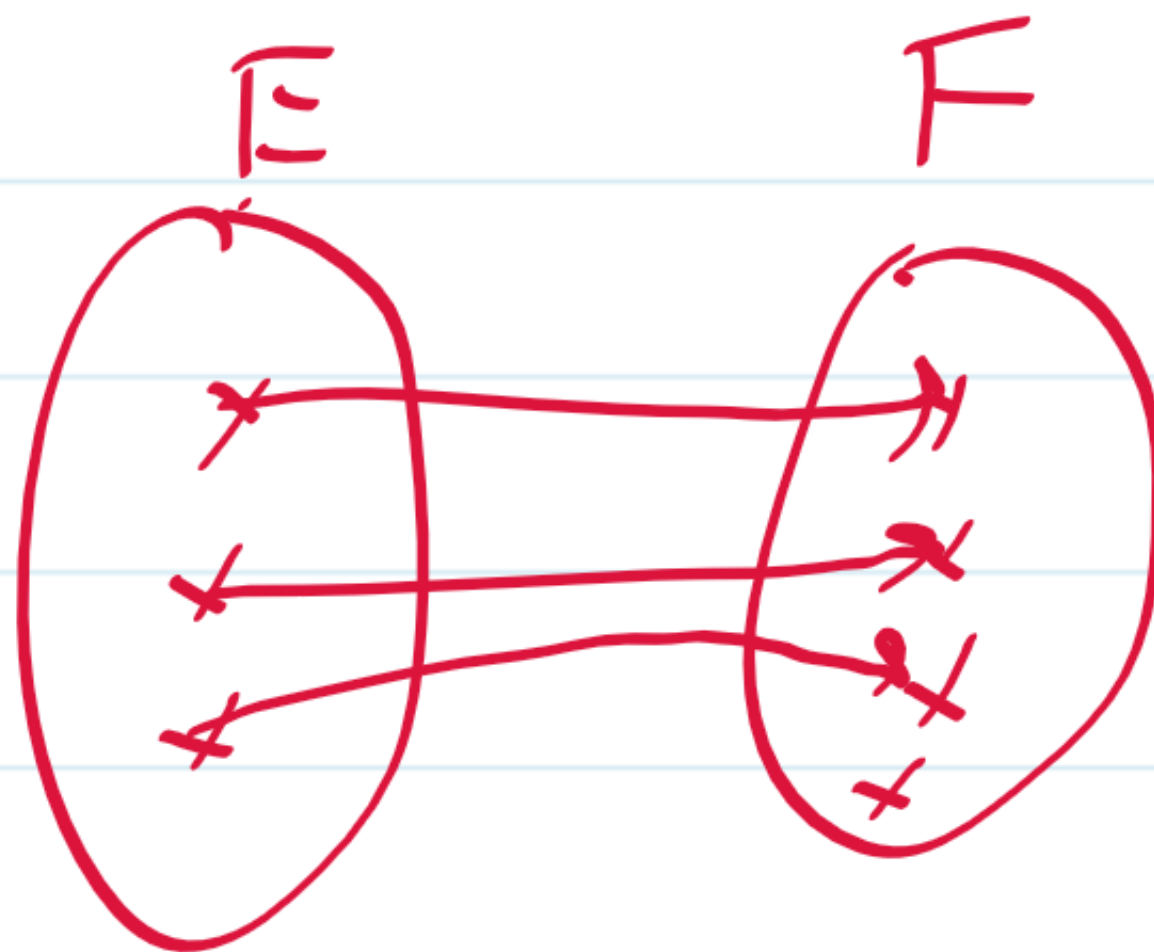


f est surjective
 f n'est pas injective

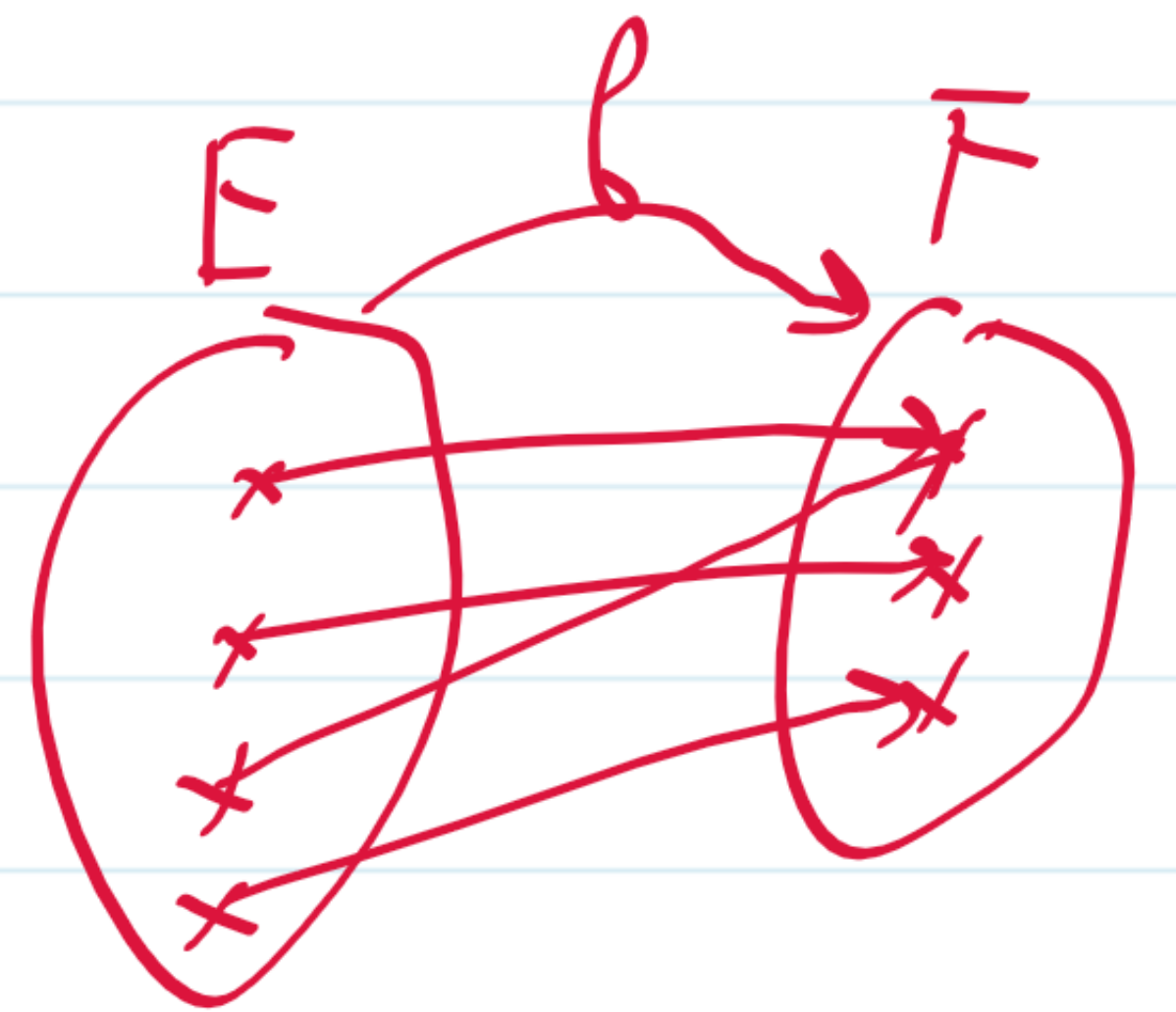
f est bijective $\Leftrightarrow f$ est injective et surjective.



f est bijective



f est injective
 f n'est pas surj
 $\Rightarrow f$ n'est pas bijective

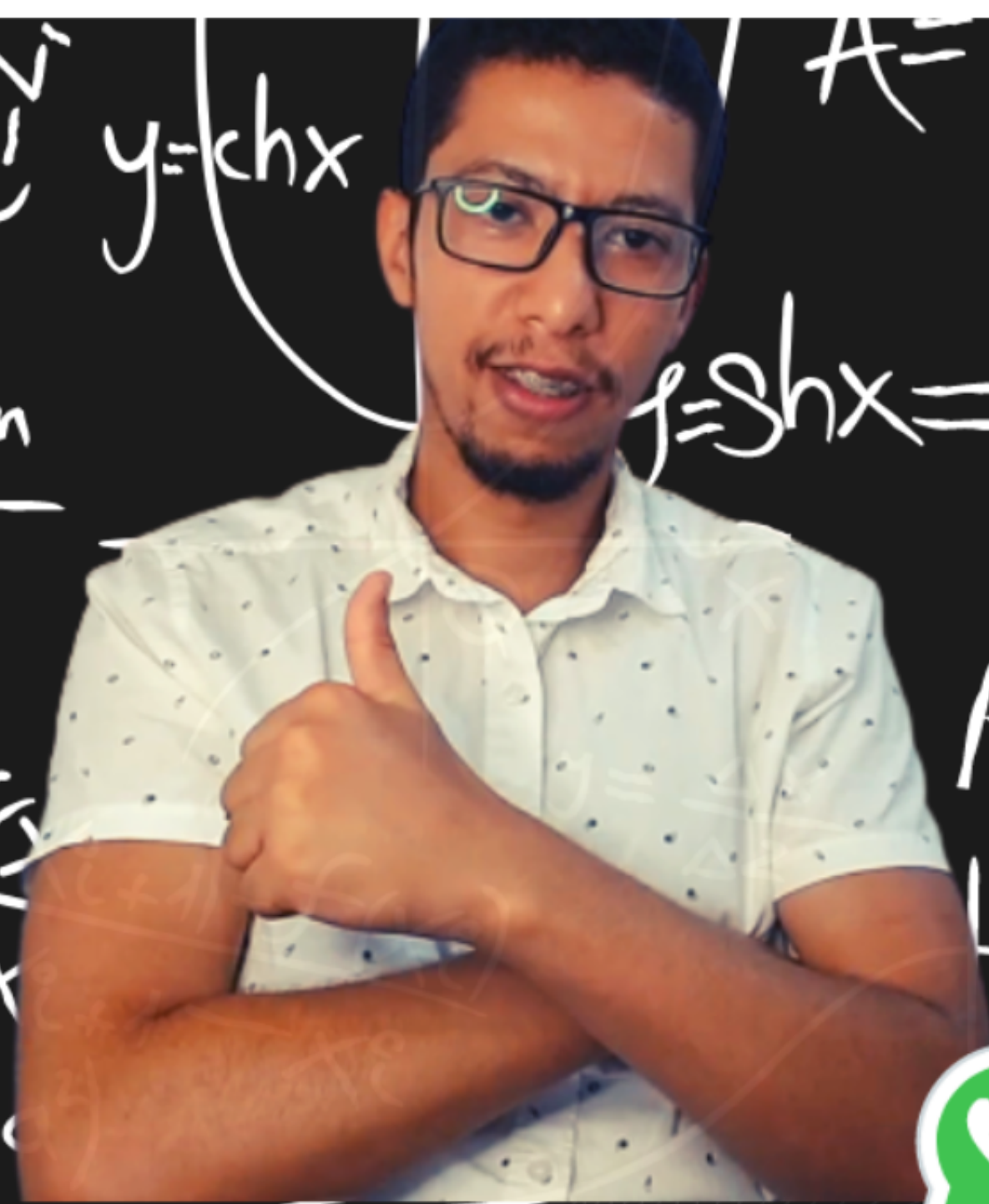


f n'est pas injective
 f est surjective
 $\Rightarrow f$ n'est pas bijective



zakaria bouicha

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES



0617074062