page
1 / 4
***E
γ

امتحان اقليمي تجريبي للبكالوريا

الدورة العادية 2022

- الموضوع -

Royaume du maroc
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ

Ministère de l'Education Nationale
du préscolaire & des sports
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵉⵏⵏⵉⵜ

EA-01	SSSSSSSSSSSSSSSSSS

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

INSTRUCTIONS GENERALES

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Problème d'analyse	9.5 points
Exercice 2	Arithmétique	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	4 points
Exercice 4	Structure	3.5 points

Exercice 1: 9.5 points

I- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(0)=1$ et $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x}$; si $x>0$.

0,50 1. (a) *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.*

(b) *En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :*

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right):(x+1)e^{-x}-1<0.$$

0,50

0,50 (c) *En déduire le sens de variations de f sur $\mathbb{R}^+$.*

2. *Soit $n\in\mathbb{N}^*$, et soit F_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :*

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+}\right);F_n(x)=\frac{e^{-x}}{n!}\cdot\int_0^x t^n e^t dt.$$

0,25 (a) *Montrer que: $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+}\right);F_1(x)=x-1+e^{-x}$.*

0,50 (b) *Montrer que: $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+}\right);F_{n+1}(x)=\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}-F_n(x)$.*

(c) *En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, On a :*

0,50 $$F_2(x)=\frac{x^2}{2}-x+1-e^{-x}\quad et\quad F_3(x)=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+x-1+e^{-x}.$$

0,50 3. *Montrer que: $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+}\right);\dfrac{-x}{2}\leq f(x)-1\leq\dfrac{-x}{2}+\dfrac{x^2}{6}$.*

II- On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^+$ par:

$$F(0)=1 \text{ et } F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt;\ si\ x>0.$$

0,50 1. (a) *Montrer que: $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right);1-\dfrac{x}{4}\leq F(x)\leq 1-\dfrac{x}{4}+\dfrac{x^2}{18}$.*

0,50 (b) *En déduire que F est dérivable à droite en 0 en précisant $F'_d(0)$.*

0,50 2. (a) *Montrer que: $\left(\forall x\in[1;+\infty[\right);0\leq F(x)\leq\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}\cdot\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.*

0,50 (b) *En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)$, puis interpréter géométriquement cette limite.*

0,50 3. (a) *Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right);F'(x)=\dfrac{f(x)-F(x)}{x}$.*

0,50 (b) *Montrer que F est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.*

0,50 4. *Construire la courbe (C_F) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.*

III- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, On pose : $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{e^x}{e^{nx}\left(1+e^x\right)}dx$.

0,25 1. (a) *Calculer l'intégrale I_0.*

0,50 (b) *Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,en déduire qu'elle est convergente.*

0,50 (c) *Montrer que: $(\forall n\in\mathbb{N});I_n+I_{n+1}=f(n)$, puis en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n$.*

2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, *On pose:* $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \cdot f(k)$.

0,50 (a) *Montrer que:* $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})\,;(\forall x \in \mathbb{R});\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k e^{-kx} = \dfrac{(-1)^{n-1}e^x}{e^{nx}(1+e^x)} - \dfrac{1}{1+e^x}$.

0,50 (b) *Justifier que:* $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})\,; S_n = (-1)^{n-1} \cdot I_n + \ln\left(\dfrac{1+e}{2e}\right)$.

0,50 (c) *En déduire que la suite* $(S_n)_{n\geq 2}$ *est convergente en précisant sa limite.*

Exercice 2: 3 pt

I- On considère dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ *l'équation:*

$$(E) : 9x^2 + 15x + 7 \equiv 0[19].$$

0,25 1. *Montrer que:* $(\forall x \in \mathbb{Z}); 9x^2 + 15x + 7 \equiv (3x-7)^2 - 4[19]$.

2. *En déduire que l'ensemble des solutions de* (E) *est :*
0,50 $S = \{19k + 3/k \in \mathbb{Z}\} \cup \{19k + 8/k \in \mathbb{Z}\}$.

II- Soit $p \geq 2$ *un entier naturel premier. On suppose qu'il existe* $a \in \mathbb{Z}$ *tel que:*
$9a^2 + 15a + 7 \equiv 0[p]$.

0,25 1. (a) *Vérifier que:* $9a^2 + 15a + 7 = 3(a+1)(3a+2) + 1$.
0,25 (b) *Montrer que:* $p \geq 5$.

0,50 2. (a) *Montrer que:* $(3a+2)^3 \equiv 1[p]$.
0,25 (b) *En déduire que:* $(3a+2) \wedge p = 1$.

0,50 3. *En utilisant le théorème de Fermat, montrer que:* $p \equiv 1[3]$.

4. *On considère dans* $\mathbb{Z}$ *l'équation* $(F) : 9x^2 + 15x + 7 \equiv 0[149]$.

0,25 (a) *Montrer que l'entier naturel 149 est premier.*
0,25 (b) *Déterminer, en justifiant la réponse, l'ensemble de solutions de* (F).

Exercice 3: 4pt

soit m *un nombre complexe non nul.*
Partie I
on considère dans $\mathbb{C}$ *l'équation* $(E) : 2z^2 - 2(m+1-i)z + m^2 + (1-i)m - i = 0$.

0,25 1. *Vérifier que le discriminant de* (E) *est* $\Delta = (2mi)^2$.

0,50 2. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* (E).

0,50 3. *Déterminer les valeurs possibles de* m *pour que l'une des solutions soit nulle.*

Partie II *Dans la suite, on suppose que* $m \in \mathbb{C} - \{1, -1, i, -i, 0\}$.
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, *on considère les points* $A(1), B(-i), M(m), M_1(z_1)$ *et* $M_2(z_2)$, *où* z_1 *et* z_2 *sont les solutions de l'équation* (E) *telles que* AMM_2 *et* BMM_1 *soient des triangles rectangles isocèles avec :*

$$\overline{\left(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1B}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ et } \overline{\left(\overrightarrow{M_2A}, \overrightarrow{M_2M}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi].$$

0,75 1. *Montrer que* $z_1 = \dfrac{1-i}{2}(m+1)$ *et* $z_2 = \dfrac{1+i}{2}(m-i)$

2. *Vérifier que* $\dfrac{z_2}{z_1} = i\dfrac{(m-i)}{(m+1)}$, *et en déduire la forme exponentielle de* m *pour laquelle*
0,50 OM_1M_2 *soit un triangle équilatéral direct.*

0,25 3. *Montrer que* M_2 *est l'image de* M_1 *par la rotation de centre* $\Omega\left(\dfrac{1-i}{2}\right)$ *et d'angle* $\dfrac{\pi}{2}$.

0,75 4. *Vérifier que* $\dfrac{z_2 - m}{z_1 - m} = -i\dfrac{(m-1)}{(m+i)}$.

5. *En déduire l'ensemble des points* $M(m)$ *pour que* $\Omega\left(\dfrac{1-i}{2}\right)$, M, M_1 *et* M_2 *soient*
0,50 *cocycliques.*

Exercice 4: 3.5 pt

On munit $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ *de deux lois* $*$ *et* T *définies par :*

$$\forall (x,y) \in I^2, x * y = \arctan(\tan x + \tan y)$$
$$\forall (x,y) \in I^2, xTy = \arctan(\tan x \cdot \tan y)$$

1. (a) *Vérifier que* $*$ *est une loi de composition interne sur* I.
0,75 (b) *Montrer que* $(I, *)$ *est un groupe abélien.*

2. (a) *Vérifier que* T *est une loi interne sur* I, *et prouver que* T *est commutative et associative*
0,50 *sur* I.

0,25 (b) *Montrer que* $\varepsilon = \dfrac{\pi}{4}$ *est l'élément neutre dans* (I, T).

0,25 (c) *Montrer que* T *est distributive par rapport à* $*$ *dans* I.

3. *Soit l'application* $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que:* $\forall x \in I : \varphi(x) = \tan(x)$

0,50 (a) *Montrer que:* φ *est un isomorphisme de* (I, T) *dans* $(\mathbb{R}, \times)$.

0,50 (b) *En déduire la structure de* $(I, *, T)$, *et préciser l'inverse de chaque élément* $x \in I$.

0,50 (c) *Pour tout* $a \in I$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose:* $a^{(n)} = \underbrace{aTaT\ldots Ta}_{n \text{ fois}}$. *Calculer* $a^{(n)}$.