I :

Q1 :

Soit $\lambda \in sp(M)$ alors

$$\det(M - \lambda I_n) = 0$$

or $\det\left({}^t(M - \lambda I_n)\right) = \det(M - \lambda I_n)$

$\Leftrightarrow \det({}^tM - \lambda I_n) = \det(M - \lambda I_n)$

$= 0$

D'où $\lambda \in sp({}^tM)$

D'où $sp(M) \subset sp({}^tM)$

$\subset sp({}^t({}^tM)) = sp(M)$

Par conséquent $sp(M) = sp({}^tM)$.

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Q2) M, N.

$\chi_M = \chi_N \to M$ ~~diag $\Leftrightarrow N$ est diag.~~

$\chi_{I_2} = (X-1)^2$. $\quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-X & 0 \\ 0 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2 = \chi_{I_2}.$$

Q2: M est diagonalisation

$\exists D$ diagonale et $P \in GL_n(K)$ tq.

$M = PDP^{-1}$

$$\Rightarrow M = {}^tP^{-1}\,{}^tD\,{}^tP = {}^tP^{-1} D\, {}^tP$$

D'où M est semblable à D.

M est diagonalisable.

$C({}^t M)$

$\boxed{Q3}$

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$+ \quad - \quad +$

C_n

$$\chi_{C_P} = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & X & & & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$(-1)^{n-1}$

$(-1)^{n-2}$

On développe % à C_n.

$$(-1)^{n-1} a_0 \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & x & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{n-1}}_{(-1)^{n-1}}$$

$$+(-1)^{n-2} a_1 \underbrace{\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & \vdots \\ 0 & & \ddots & x \\ \vdots & & & -1 \\ & \cdots & & 0 \end{vmatrix}_{n-1}}_{x(-1)^{n-2}}$$

$$(-1)^{n-n}(x+a_{n-1}) \begin{vmatrix} x & 0 & & \\ -1 & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -1 \quad x \end{vmatrix}$$

$x^{n-1}(-1)^0$

$$(X + a_{n-1})X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \dots + a_1 X + a_0$$

$$= X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$$

$$= Q.$$

Q4) $\lambda \in sp({}^tC_Q) = sp(C_Q)$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & & C_{n-1} & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & \lambda & & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \lambda & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\lambda \in sp(C_Q) \Rightarrow rg(\lambda I_n - C_Q) < n$$

$$\operatorname{rg}(\lambda I_n - C_Q) = \underline{\underline{n-1}}$$

$$\dim \operatorname{Ker}(\lambda I_n - C_Q) = 1$$

$$\boxed{\dim E_\lambda = 1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda x_0 \\ x_2 = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} = \lambda x_{n-2} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} -a_k x_k = \lambda x_{n-1} \end{cases}$$

$$x_{n-1} = \lambda^{n-1} x_0$$

$$x_{n-2} = \lambda^{n-2} x_0$$

$$\vdots$$

$$x_1 = \lambda x_0$$

$$E_\lambda = \text{Vect}(1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1})$$

Q5) f est cyclique

$\exists x_0 \in E \ \underbrace{(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))}$ est base de E

D'où la base $B = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-2}(x_0), f^{n-1}(x_0))$

On a $\text{Mat}_B f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

$x = \underbrace{f^n(x_0)} \in E = \text{Vect}(B)$

$$f^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$$

$x \in E = \text{Vect}(e_1 \quad e_n)$

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

D'où l'existence de la base

tq $\underset{B}{\text{Mat}} f = C_Q$.

$$\Leftarrow \text{ si } \underset{B}{\text{Mat}} f = C_Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & & & \\ 0 & & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$f(e_0) \quad f(e_1) \quad f(e_{n-1})$

$B = (e_0, \quad e_{n-1})$

On a $f(e_0) = e_1$, $f(e_1) = e_2$

$f(e_k) = e_{k+1}$ pour $k \leq n-2$

Ce qui prouve f est cyclique

<u>Q6)</u> f est cyclique

f est diagonalisable

$\Leftrightarrow$ χ_f est scindé à racine simple.

$\Leftarrow$ évident

$\Rightarrow$ On a $\dim E_\lambda = 1$. $\forall \lambda \in sp(f)$

alors f est diagonalisable

f est diagonalisable ssi

$$E = \bigoplus_{i=1}^{q} E_{\lambda_i} \qquad E_{\lambda_i} + E_{\lambda_j}$$

$(i \neq j)$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

CQFD $\dim E = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(E_{\lambda_i})}_{= 1}$

Q7) si f est cyclique

$\Rightarrow (Id, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est libre

soit $(\alpha_0 \ldots \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tq

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k = 0$$

f est cyclique donc $\exists x_0 \in E$

tq $(x_0, \ldots f^{n-1}(x_0))$ est une base de E

D'où $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_0) = 0$

Puisque $(h_0 \quad f^{n-1}(h_0))$ est base de E, alors elle est libre

D'où $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ $\alpha_k = 0$

$(I_d, f, \quad f^{n-1})$ est libre

$\deg \Pi_f = n$.

si $\deg \Pi_f = p < n$

$\exists (a_0 \quad a_p)$ $\Pi_f = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$

$\Pi_f(f) = 0 \Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{p} a_k f^k = 0$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$\Rightarrow (Id, f, \dots, f^p)$ est liée.

or $\underbrace{(Id, f, \dots, f^{p})}_{\text{libre}} \subset \underbrace{(Id, f, f^{p})}_{\text{libre}}$

Ce qui est absurde.

D'où $p = n$

Q8 :

$F = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$

est une famille de E

et $n = \dim E$.

On a F est soit libre soit liée.

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

si F est libre alors $p = n \geq 1$

si F est liée, on peut extraire une famille libre de F

$(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ la plus grande famille libre de F ds cette ordre.

1er $(x, f(x))$: libre d'ok

2ème $(x, f(x), f^2(x))$ libre OK

$\vdots$

$(x, f(x), f^2(x), \cancel{f^3(x)})$ liée

$p = 3$

$$f^3(x) = \sum_{k=0}^{2} \lambda_i f^k(x)$$

Rq $\exists p>0$ tq

$(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre

et $(x, f(x), \dots, f^p(x))$ est liée

on a la famille (x) est libre.

si $(x, f(x))$ est libre on passe

à $f^2(x)$, et on vérifie que

$(x, f(x), f^2(x))$ est libre si oui

On passe à $f^3(x)$, jusque arrivée à $f^{p-1}(x)$. on obtient $\left(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\right)$ est libre.

mais $\left(x, f(x), \dots, f^{p}(x)\right)$ est liée

D'où l'existence.

Q9) $F = \text{Vect}\left(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\right)$ est stable par f.

soit $y \in F$ on a.

$$y = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(x)$$

et on a $f(y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^{k+1}(x)$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$$= \sum_{k=1}^{p} \lambda_{k-1} f^{k}(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_{k-1} f^{k}(x) + \lambda_{p-1} f^{p}(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_{k-1} f^{k}(x) + \lambda_{p-1} \circ \sum_{k=0}^{p-1} -\alpha_k f^{k}(x)$$

$$= -\alpha_0 x + \sum_{k=1}^{p-1} \left(\lambda_{k-1} - \lambda_{p-1}\alpha_k\right) f^{k}(x)$$

$$\in \text{Vect}(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$$

Q10) On a

D'après Q8

$$R = \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k + X^p.$$

On a R est unitaire et annulateur de f. et puisque $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre alors $(Id, f, \dots, f^{p-1})$ est libre.

D'où il n'existe aucun polynôme annulateur de f de degré $< p-1$

Donc $R = \Pi_f$.

Par la suite R / χ_f

Q11) On a d'après Q10

$\chi_f = R \circ Q$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$$\chi_f(f) = R(f) \circ Q(f)$$
$$= Q(f) \circ \underbrace{R(f)}_{0} = 0$$

Q12 : f nilpotente

si f est cyclique alors

$\exists x_0 \in E$ $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{r-1}(x_0))$

A libre.

Donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ $f^k(x_0) \neq 0$

et $f^r = 0$

D'où $r \geq \underline{\underline{n}}$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{r = n}}$

f est nilpotente f CR $\Rightarrow$ $f^{n = \dim E} = 0$

$\Leftarrow$ Si $r = n$.

On a $f^{n-1} \neq 0$

alors $\exists x_0 \in E$ tq $f^{n-1}(x_0) \neq 0$

Mq $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est libre

Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0$$

Soit p le plus grand indice tq $\lambda_p \neq 0$ et $\forall k < p$ $\lambda_k = 0$

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^{k}(x_0) = \sum_{k=p}^{n-1} \lambda_k f^{k}(x_0) = 0$$

D'où

$$f^{n-1-p}\left(\sum_{k=p}^{n-1} \lambda_k f^{k}(x_0) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow f^{n-1-p}\left(\lambda_p f^{p}(x_0) + \sum_{k=p+1}^{n-1} \lambda_k f^{k}(x_0) \right)$$

$$\Rightarrow \lambda_p \underbrace{f^{n-1}(x_0)}_{\neq 0} + \sum_{k=p+1}^{n-1} \lambda_k \underbrace{f^{n-1-p+k}(x_0)}_{=0} = 0 \qquad n-1-p+k \geq n$$

$\Rightarrow \lambda_p = 0$ ce qui est absurde

$(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre

$\Rightarrow$ <u>Base</u> $\Rightarrow$ f est cyclique

Q13) $F_k = \operatorname{Ker}\left((f - \lambda_k Id)^{m_k}\right)$

1er Ne F_k st stable par f.

soit $x \in F_k$. donc

$$(f - \lambda_k Id_E)^{m_k}(x) = 0$$

$$(f - \lambda_k Id_E)^{m_k}(f(x)) =$$

$$(f - \lambda_k Id_E)(f - \lambda_k Id_E) \dots (f - \lambda_k Id_E)(f(x))$$

$$= f\left(\underbrace{(f - \lambda_k Id_E)^{m_k}(x)}_{0}\right) = 0$$

$$(f - \lambda_k Id) \circ f = f \circ (f - \lambda_k Id_E)$$

$$\underbrace{(f-\lambda_k I_d)^{m_k} \circ f} = \underbrace{f \circ (f-\lambda_k I_d)^{m_k}}$$

D'où F_k est stable par f

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$$

(1) $\forall x \in E$. $x = x_1 + x_2 + \dots + x_p$

(2) Si $x = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$ ✓

$$F_k = \ker (f - \lambda_k I_d)^{m_k}$$

$$\chi_f = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

$$\chi_f(f) = 0$$

$\forall x \in E \quad \chi_f(f)(x) = 0$

$$\Rightarrow \prod_{k=1}^{p} (f - \lambda_k I_d)^{n_k}(x) = 0$$

2ème méthode :

$$E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$$

$$F_i \cap \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} F_k\right) = \{0\}$$

et $\dim E = \sum_{i=1}^{p} \dim F_k.$

$$\dim F_k = n_k$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515