Examen Blanc 2
2021-2022
-Sujet-

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة مراكش - آسفي
Lycée d'excellence de Benguerir Établissement privé
LYCEE D'EXCELLENCE DE BENGUERIR
ثانوية التميز التأهيلية الخصوصية ابن جرير

Matière	**Mathématiques**	**Durée**	**4h**
Filière	**2 Bac SM A et B**	**Coefficient**	**9**

INSTRUCTION GENERALE

√ L'utilisation de la calculatrice non autorisée.

√ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient.

√ L'utilisation de couleur rouge lors de la rédaction des solutions est *à éviter*.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Les structures	4 points
Exercice 2	Arithmétiques	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	3 points
Problème	Étude d'une fonction numérique Les suites - Calcul intégral	10 points

√ ln désigne la fonction logarithme népérien

EXERCICE 1 :(4 points)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et que $(M_2(\mathbb{R});+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.Considérons la matrice $J=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-1\end{pmatrix}$ et le sous-ensemble $E=\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x+y&3y\\-y&x-y\end{pmatrix}/(x;y)\in\mathbb{R}^2\}$ de $M_2(\mathbb{R})$.

0.5 1) Montrer que $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

0.5 2)a)Montrer que la famille $(I;J)$ est une base de E.

0.5 b)Calculer J^2 puis montrer que $\times$ est une loi de composition interne dans E.

0.5 c)Montrer que $(E;+;\times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

0.5 3)a)Montrer que tout élément de $E-\{0\}$ admet un inverse dans E qu'on déterminera.

0.5 b)Déduire la structure algébrique de $(E;+;\times)$.

4)Munissons l'ensemble $F=\mathbb{R}^2-\{(0;0)\}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :$(\forall(x;y)\in F)(\forall(a;b)\in F):(a;b)*(x;y)=(ax-2by;ay+bx)$ et considérons l'application φ de $E-\{0\}$ vers F qui à chaque matrice $M(x;y)$ de $E-\{0\}$ fait correspondre le couple $(x;y)$ de F.

0.5 a)Montrer que φ est un isomorphisme de $(E-\{0\};\times)$ vers $(F;*)$.

0.5 b)Déduire la structure algébrique de $(F;*)$.

EXERCICE 2 :(3 points)

On considère dans l'ensembe $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$(E):z^2+(1-3i)mz-4m^2=0 \qquad \text{tel que } m\in\mathbb{C}^*$$

0.25 1)a)Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta=((3-i)m)^2$.

0.5 b)Déterminer les solutions z_1 et z_2 de l'équation (E) .

0.25 c) Calculer $arg(z_1)$ et $arg(z_2)$ en fonction de $arg(m)$

2)Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$

On considère les points A,B, C et D d'affixes respectives z_1, z_2, m et 1+3i .

0.5 a)Montrer que $(OA) \perp (OB)$.

0.5 b)Montrer que les points O,C et D sont alignés $\Leftrightarrow arg(z_1 + z_2) \equiv 0[\pi]$

1 3)Soit A' le point image de A par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et B' le point image de B par la rotation R' de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{2}$

Montrer que les points A,B ,A' et B' sont cocycliques.

EXERCICE 3 :(3 points)

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $187x - 255y = 68$

0.25 1)a) vérifier que le couple $(-1;-1)$ est une solution particulière de (E)

0.5 b)Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) en indiquant les étapes de la résolution.

0.5 2)Soit n un entier naturel non nul et soit p un nombre premier positif qui ne divise pas n et $p > 2$.

Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}; n^{(p-1)k} \equiv 1[p]$

0.5 3)a)Soient x et y deux entiers naturels non nuls tels que $x \equiv y[p-1]$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : n^x \equiv n^y[p]$

0.5 b)Déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* : n^x \equiv n^y[2p]$

0.75 4)Soit x et y deux entiers naturels tels que le couple $(x;y)$ soit solution . de l'équation E.

Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ les nombres n^x et n^y ont le même chiffre d'unité dans le système de numération décimal.

Problème :(10 points)

Partie : I

Considérons la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = xln(x) - x + 1$

0.25 1)Montrer que g est dérivable sur $]0;+\infty[$.

0.5 2)Montrer que $(\forall x \in]0;+\infty[) : g(x) \geq 0$.

Partie : II

Considérons la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$(\forall x \in]0;+\infty[-\{1\})\ f(x) = \frac{x-1}{ln(x)}\ ,\ f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1$$

0.5 1)Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.

0.75 2)a) Montrer que f est dérivable sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$ et que

$$(\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[) : f'(x) = \frac{g(x)}{x(ln(x))^2}$$

0.25 **b)Déduire la monotonie de f sur $[0;+\infty[$.**

0.5 **3)a)Montrer que le signe de $f''(x)$ sur $]0;1[$ est celui de $ln(x)h(x)$ où h est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = -xln(x) - ln(x) + 2x - 2$**

0.25 **b)Montrer que $(\forall x \in]0;1[) : h(x) > 0$.**

0.25 **c)En déduire que f' est strictement décroissante sur $]0;1[$.**

0.5 **4)Montrer que : $(\exists \alpha \in]0;1[) : f'(\alpha) = 1$.**

5)Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :$\alpha < u_0 < 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = f(u_n)$.

0.75 **a)Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n < 1$ et que $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.**

0.5 **b)Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - 1| \leq f'(u_0)|u_n - 1|$.**

0.5 **c)Déterminer la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$.**

Partie : III

Considérons la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$(\forall x \in]0;+\infty[-\{1\}) : \; F(x) = \int_x^{x^2} f(t)dt \text{ et } F(0) = F(1) = 0.$$

0.5 **1)Montrer que : $(\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[) : (x^2 - x)f(x) \leq F(x) \leq (x^2 - x)f(x^2)$.**

0.5 **2)Déterminer la branche infinie de (C_F) , la courbe de F au voisinage de $+\infty$.**

0.5 **3)a)Montrer que F est dérivable en 0 à droite et dérivable en 1.**

0.5 **b)Interpréter géométriquement les résultats précédents.**

0.25 **c)Donner l'équation de la tangente à (C_F) au point d'abscisse 1.**

0.25 **4)a)Montrer que F est dérivable sur $[0;+\infty[$.**

0.5 **b)Montrer que le signe de F' sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ est celui de $P(x) = x^2 + x - 1$**

0.5 **c)Dresser le tableau des variations de F.**

1 **5)Tracer (C_F) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.**

On donne :$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq 0,6$ et $F(\frac{\sqrt{5}-1}{2}) \simeq -0,2$.

Bon courage Les Lydexiens