Résumé : Les structures algébriques. البنيات الجبرية

Loi interne : Soit E un ensemble et "$*$" une loi de composition

E est stable par "$*$" $\iff \forall (x,y) \in E^2 \quad x*y \in E$

Exemple :

On considère l'ensemble :

$$E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

1) Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}); \times)$.

$\forall \big(M(x), M(y)\big) \in E^2 \quad M(x) \times M(y) \in E$ (à vérifier)

Groupe : en général dans les exercices on montre que $(E;*)$ est un groupe en montrant qu'il est un sous-groupe d'un groupe usuel

Groupe

on dit que $(G;*)$ est un groupe ssi :

- $*$ admet un élément neutre dans G.
- $*$ est associative dans G
- tout élément de G est symétrisable. (inverse)

(si $*$ est commutatif alors $(G;*)$ est un grp commutatif (abélien))

Sous-groupe : $H \subset E$ et $(E;*)$ est un groupe

- $H \neq \emptyset$
- $\forall (x,y) \in H^2 \quad x*y^{-1} \in H$

Ajitfham Academy
zakaria bouicha

Anneau : on dit que $(A;+;\times)$ si :

- $(A;+)$ grp commutatif .
- "$\times$" associative
- "$\times$" est distributive par rapport à "$+$"

(Si "$\times$" est commutatif alors $(A;+;\times)$ est un anneau comm

Anneau unitaire :

Si $(A;+;\times)$ est un anneau et "$\times$" admet un élément neutre alors $(A;+;\times)$ s'appelle un anneau unitaire .

Diviseurs de 0 dans un anneau :

Soit $(a,b)\in A^2$

Si $a\times b=0$ et $a\neq 0$ et $b\neq 0$

alors a et b sont des diviseurs de 0

Anneau intègre :

$(A;+;\times)$ est un anneau intègre s'il ne contient pas des diviseurs de 0

c.à.d : $\forall (a,b)\in A^2 \quad a\times b=0 \Rightarrow a=0$ ou $b=0$

Corps : $(A;+;\times)$ est un corps si :

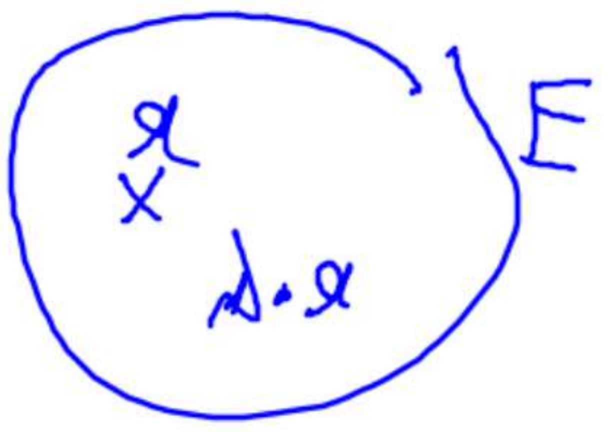
- $(A;+;\times)$ est un anneau unitaire
- tout élément de $A\setminus\{0\}$ admet un symétrique par "$\times$" dans A .

Si "$\times$" est commutatif alors $(A;+;\times)$ est un corps commutatif

Remarque : on peut m.q :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ (A;+) \text{ est un grp commutatif.} \\ \bullet\ (A-\{0\},\times) \text{ est un grp comm} \\ \bullet\ \times \text{ est dist } / + \end{array}\right\} \Rightarrow (A;+;\times) \text{ corps comm}$$

Loi de composition externe :



$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \times E \longrightarrow E$$

$$(\lambda , x) \longrightarrow \lambda \cdot x$$

C'est une loi de composition externe.

Espace vectoriel :

Définition 2

Un espace vectoriel réel (ou $\mathbb{R}$ -espace vectoriel) est un triplet $(E;+;\cdot)$ dans lequel E est un ensemble non vide muni :

(1) d'une loi de composition interne, notée $+$, telle que $(E;+)$ est un groupe commutatif,

∘ cette loi est l'addition de E ; ∘ son élément neutre est noté 0_E

(2) d'une loi de composition externe, application de $\mathbb{R} \times E$ dans E, appelée produit externe ou produit par un scalaire, notée $(\alpha;x) \mapsto \alpha \cdot x$, et possédant les propriétés suivantes :

- $(\forall(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2)\ (\forall x \in E)\quad (\alpha+\beta)\cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;
- $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\ (\forall(x;y) \in E^2)\quad \alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;
- $(\forall(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2)\ (\forall x \in E)\quad (\alpha\beta)\cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$;
- $(\forall x \in E)\quad 1 \cdot x = x$.

On appelle alors vecteurs les éléments de E et scalaires les éléments de $\mathbb{R}$.

Sous-espace vectoriel

Soit $(E;+;\cdot)$ un espace vectoriel et $F \subset E$

on dit que F est un sous espace vectoriel de $(E;+;\cdot)$ si :

- $F \neq \emptyset$
- $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\ \forall(x,y) \in F \quad \alpha x + \beta y \in F$

Remarque : Souvent utilisé dans les exercices

Exercice 8

Soit I et J les deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définies par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

On considère l'ensemble suivant :

$$E = \{ M(a;b) = aI + bJ \ / \ (a;b) \in \mathbb{R}^2 \}$$

1) a) Montrer que la famille $(I;J)$ est libre dans l'espace vectoriel réel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;\cdot)$.

b) Montrer que $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel de dimension 2.

Famille génératrice : $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ avec $f_1, f_2, \ldots, f_n \in E$

$$(\forall x \in E)\ (\exists \alpha_i \in \mathbb{R})_{(i=1,\ldots,n)} \quad x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$$

$\Leftrightarrow \quad \mathcal{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ est une famille génératrice de E.

Exercice 8

Soit I et J les deux matrices de $M_2(\mathbb{R})$ définies par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

On considère l'ensemble suivant :

$$E = \{M(a;b) = aI + bJ \ / \ (a;b) \in \mathbb{R}^2\}$$

1) a) Montrer que la famille $(I;J)$ est libre dans l'espace vectoriel réel $(M_2(\mathbb{R});+;\cdot)$.

b) Montrer que $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel de dimension 2.

(I, J) est une famille génératrice de E

Car : $\forall M(a,b) \in E$

$$M(a,b) = \underset{\alpha}{\underset{\shortparallel}{a}}\, I + \underset{\beta}{\underset{\shortparallel}{b}}\, J$$

$I = M(1,0) \in E \quad J = M(0,1) \in E$

Famille libre

$(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est une famille libre dans E

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0_E \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

$(\forall \alpha_i \in \mathbb{R})$ $\quad (\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0)$

Exercice 8

Soit I et J les deux matrices de $M_2(\mathbb{R})$ définies par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

On considère l'ensemble suivant :

$$E = \{M(a;b) = aI + bJ \ / \ (a;b) \in \mathbb{R}^2\}$$

1) a) Montrer que la famille $(I;J)$ est libre dans l'espace vectoriel réel $(M_2(\mathbb{R});+;\cdot)$.

b) Montrer que $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel de dimension 2.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$\alpha I + \beta J = 0$

$$\Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$

donc (I, J) est libre.

Une base

On dit que $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ est une base de $(E;+;\cdot)$ e.v.r

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ est génératrice et libre

$\Longleftrightarrow$ $(\forall x \in E)(\exists!\,(\alpha_i) \in \mathbb{R})\quad x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$

3) Soit α un nombre complexe non réel.

a) Montrer que la famille $(1;\alpha)$ est une base de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C};+;\bullet)$.

La dimension d'un espace vectoriel réel

Si $B = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ est une base de E

$$\dim(E) = \mathrm{Card}(B) = n$$

Morphisme de Groupes

$$f : (E;*) \longrightarrow (F;\top)$$
$$x \longmapsto f(x)$$

on dit que f est un morphisme $\underset{=\text{Homomorphisme}}{}$ si

$$\forall (x,y) \in E \qquad f(x*y) = f(x) \top f(y)$$

isomorphisme = morphisme + bijection.

Morphisme de Groupes

$$f : (E ; *) \longrightarrow (F ; T)$$
$$x \longmapsto f(x)$$

on dit que f est un morphisme si'
= homomorphisme

$$\forall (x,y) \in E \quad f(x * y) = f(x) \, T \, f(y)$$

isomorphisme = morphisme + bijection.

Remarques

- Soit f un morphisme d'un groupe $(G;*)$ dans un groupe $(F;\mathrm{T})$. On dit aussi :
  - f est un isomorphisme de groupes si f est bijectif.
  - f est un endomorphisme de groupe $(G;*)$ si f est défini de $(G;*)$ dans $(G;*)$.
  - f est un automorphisme de groupe $(G;*)$ si f est un endomorphisme bijectif.
- Si le morphisme f est surjectif ou un isomorphisme de groupes alors $f(G) = F$, et dans ce cas, l'image du groupe $(G;*)$ par f est le groupe $(F;\mathrm{T})$. On dit alors que le morphisme f transfère « la structure du groupe $(G;*)$ » en celle du groupe $(F;\mathrm{T})$.
- Si f est un isomorphisme de $(G;*)$ dans $(F;\mathrm{T})$, alors $(G;*)$ et $(F;\mathrm{T})$ ont la même structure.

  En particulier :
  - Si $(G;*)$ est un groupe, alors $(F;\mathrm{T})$ est un groupe.
  - Si $(G;*)$ est un groupe commutatif, alors $(F;\mathrm{T})$ est un groupe commutatif.

  Ce résultat est très utile en pratique.