Unité 2

Mouvements de chutes verticales

Mécanique

Situation-problème

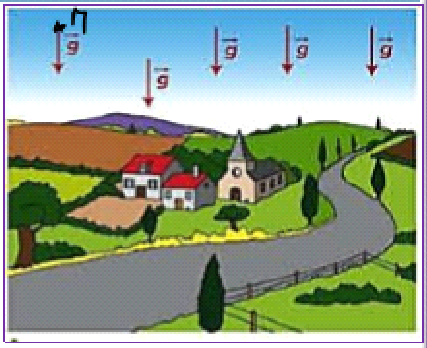
Grâce à l'influence de l'air, le parachutiste réussit à faire un saut

Une telle chute dans le vide aurait-elle les mêmes les propriétés ?

Objectifs

- Connaitre les forces exercées par un fluide sur un solide immergé dedans.
- Connaitre les caractéristiques du mouvement d'un solide en chute libre
- Savoir appliquer la deuxième loi de Newton pour établir les équations horaires du mouvement d'un solide en chute libre .
- Savoir appliquer la deuxième loi de Newton pour établir l'équation différentielle du mouvement d'un solide dans un fluide .
- Savoir exploiter la méthode d'Eluer pour résoudre l'équation différentielle du mouvement .

I Chute libre verticale d'un corps solide



① Le champ de pesanteur uniforme

Dans un domaine de l'espace dont les dimensions sont limitées à quelques kilomètres , le vecteur $\vec{g}$ est quasiment le même en tout point : le champ de pesanteur y est uniforme .

❖ Les caractéristiques du vecteur $\vec{g}$ en un point M de l'espace

- Direction : la verticale passant par M
- Sens : de M vers le bas
- Intensité : $g = 9,81 m.s^{-2}$ $N.Kg^{-1} = m.s^{-2}$

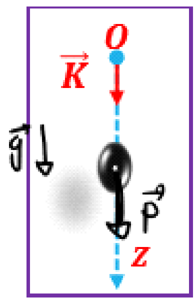
② La chute libre

Un corps solide est en chute libre s'il soumit uniquement à son poids .
Lorsque la trajectoire du corps en chute libre est rectiligne on dit que le corps est en chute libre verticale .

③ Étude du mouvement d'un solide en chute libre verticale

❖ Activité

On lâche une bille d'acier de mass m sans vitesse initiale , dans l'air .
Etudions le mouvement de la bille dans un repère $R(O,\vec{K})$ lié à un référentiel terrestre supposé galiléen . (la figure ci-contre)
La courbe ci-contre représente l'évolution de la vitesse V_z du centre d'inertie G de la bille, au cours du temps .



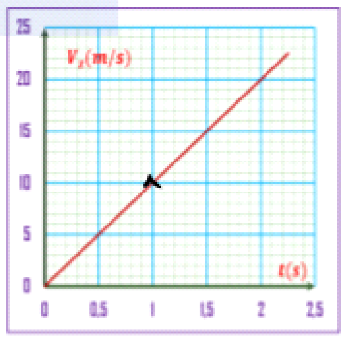
- **Exploitation**

❶ Exploitante la courbe ci-contre :

a – Déterminer la nature du mouvement de G centre d'inertie de la bille .

b – Déterminer l'accélération a_z du centre d'inertie G de la bille

c – Comparer l'accélération a_z avec la valeur du champ de pesanteur $g = 10 ms^{-2}$



❷ En appliquant la deuxième loi de Newton trouver l'expression de l'accélération a_z (on néglige la résistance de l'air)

❸ L'accélération d'un solide en chute verticale libre dépond-elle de sa masse ?

❹ Déterminer les équations horaires du mouvement .

1

a- Puisque la trajectoire est rectiligne , et $a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = cte \neq 0$
Alors le MRUV.

b- $a_z = \frac{\Delta V_z}{\Delta t} = \frac{10 - 0}{1 - 0} \Rightarrow a_z = 10 m/s^2$

c- on $g = a_z$

2) SE : {La bille} ; BF : $\vec{P}$: Poids de la bille.
Appliquons la PFD : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} = m\vec{a}$ (1)

$P = m.a_z$ (La projection sur $(O\vec{z})$)

$\Rightarrow mg = ma_z \Rightarrow \boxed{a_z = g}$

③ a_z ne dépend de la masse du solide.

④ MVRU : $v_z = gt + v_{0z}$

$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0$ $(a = g)$.

❖ Résumé

- En chute libre verticale on a : $\vec{a} = \vec{g}$ et $a = g$
- L'accélération a ne dépend pas de la masse du solide.
- le mvt est R.U.V.
- $\boxed{v_z(t) = gt + v_0}$ et $\boxed{z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0.t + z_0}$

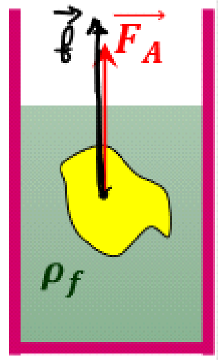
II Chute verticale d'un corps solide dans un fluide

① Les forces exercées par un fluide

❖ La poussée d'Archimède

Tout corps immergé totalement ou partiellement dans un fluide (liquide ou gaz) est soumis de la part de celui-ci à une force pressante $\vec{F_A}$ appelée poussée d'Archimède

▪ Les caractéristiques de la poussée d'Archimède



Point application : centre de la partie immergé du solide .
Direction : la direction du mouvement .
Sens : vers le haut
Intensité : $F_A = m_f.g = \rho_f.V_s.g$

- F_A : poussée d'Archimède en N
- m_f : masse du fluide déplacé en kg
- V_s : volume du solide (ou volume du fluide déplacé) en m^3
- g :l'intensité de pesanteur en $m.s^{-2}$

$\uparrow (t)$ $\downarrow \vec{f}$

❖ La force de frottement fluide

La force de frottement fluide $\vec{f}$ est une force de contact répartie , appliquée par un fluide sur un solide qui se déplaçant par rapport à lui .

▪ Les caractéristiques de la force de frottement fluide

Point application : ..Centre d'inertie du solide G..............
Direction : ..La direction du mvt.......................................
Sens : .....L'opposé du mvt..................................
Intensité : ... $f = k.v^n$ ... ... $n = 1$ ... ; $n = 2$ ... ...

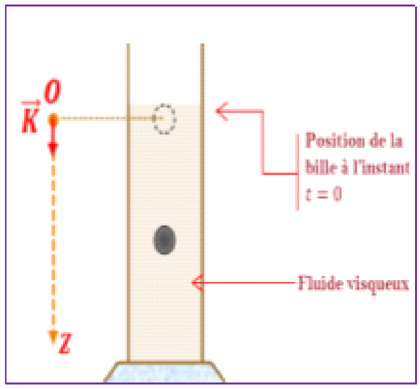
v = la vitesse
V = le volume .

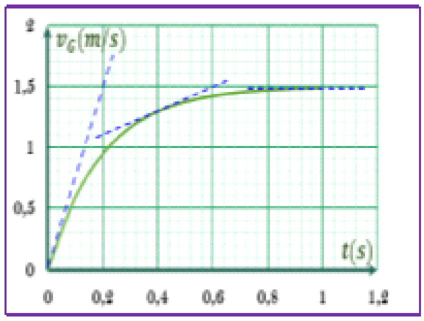
- k est un coef qui caractérise le fluide.
- v la vitesse du solide

$n = 1$ si v est faible.
$n = 2$ si v est élevée.

② Étude du mouvement d'un solide dans fluide

On remplit une éprouvette graduée avec un liquide visqueux et transparent de masse volumique ρ_f et on y fait tomber une bille homogène de masse volumique ρ et de volume V et de centre d'inertie G , sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$, puis on enregistre le mouvement de la bille par un système d'acquisition convenable et on trace les variations de la vitesse v_G du centre d'inertie G de la bille en fonction du temps .(la courbe ci-contre),





I-Exploitation de la courbe de vitesse

❶ Décrire la variation de la vitesse v_G en fonction du temps

❷ Déterminer les valeurs de l'accélération a_0 , a_1 et a_2 aux instants $t_0 = 0s$, $t_1 = 0,4s$ et $t_2 = 1s$

❸ Décrire la variation de l'accélération a_G en fonction du temps

❹ On appelle le temps caractéristique du mouvement τ ; c'est l'intersection de la tangente à la courbe $v_G = f(t)$ à $t = 0$ et l'asymptote à la courbe $v_G = f(t)$. Déterminer la valeur du τ .

II-L 'équation différentielle du mouvement

❶ En appliquant la deuxième loi de Newton , montrer que l'équation différentielle du mouvement du centre de la bille s'écrit sous la forme $\frac{dV_G}{dt} = A - BV_G^n$,en précisant les expressions de A et B en fonction de : ρ ,V ,g , ρ_f et K

❷ On appelle vitesse limite v_L ; c'est la vitesse du centre d'inertie G de la bille en régime permanent .Trouver l'expression de v_L en fonction de : g , k , ρ , ρ_f , n et V .

❸ Exprimer l'accélération a_0 en fonction de : ρ , ρ_f et g .

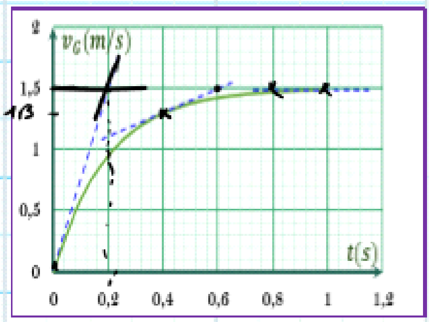
I-

1) La vitesse augmente au cours du temps et tend vers une valeur limite et constante.

2) $a_0 = \left(\frac{\Delta V_G}{\Delta t}\right)_0 = \frac{1,5-0}{0,2-0} = 7,5\ m/s^2$

$a_1 = \left(\frac{\Delta V_G}{\Delta t}\right)_{t_1} = \frac{1,5-1,3}{0,6-0,4} = 1\ m/s^2$

$a_2 = \left(\frac{\Delta V_G}{\Delta t}\right)_{t_2} = \frac{1,5-1,5}{0,8-1} = 0\ m/s^2$



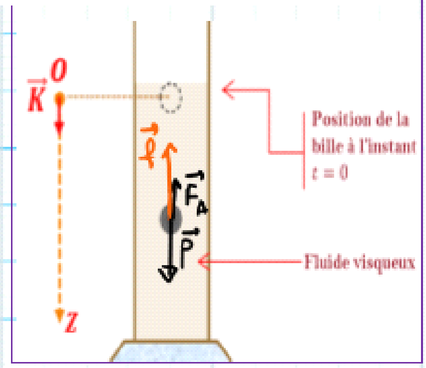
3) L'accélération décroit au cours du temps : $a_0 > a_1 > a_2$.

4) Graphiquement $\tau = 0,2 s$.

II –

❶ En appliquant la deuxième loi de Newton , montrer que l'équation différentielle du mouvement du centre de la bille s'écrit sous la forme $\frac{dV_G}{dt} = A - BV_G^n$,en précisant les expressions de A et B en fonction de : ρ ,V ,g , ρ_f et K

- SE : {la bille}
- BF : $\vec{P}$: le poids
  $\vec{F_A}$: la poussée d'Archimed
  $\vec{f}$: la force de frottement fluide.



- Dans le repère $R(O,\vec{k})$ lié à un référentiel terrestre supposé galiléen on applique le PFD :

$$\vec{P} + \vec{F_A} + \vec{f} = m\vec{a} \quad ①$$

Projection de ① sur $(O\vec{z})$: $P - F_A - f = ma_z$ $\quad a_z = a_G$

$$mg - \rho_f.V.g - K.v_G^n = ma_G$$

$$a_G = \frac{mg}{m} - \frac{\rho_f V g}{m} - \frac{K}{m}v_G^n$$

$$\frac{dv_G}{dt} = g - \frac{\rho_f.V.g}{\rho.V} - \frac{k}{m}.v_G^n$$

$$\frac{dv_G}{dt} = g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right) - \frac{k}{m}v_G^n$$

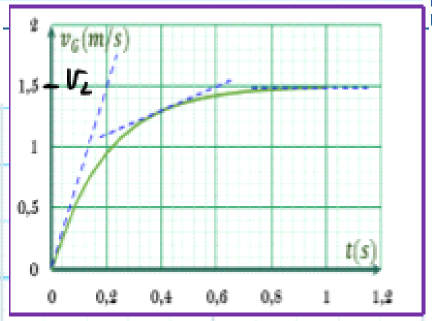
on pose :

$$A = g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right)$$

$$B = \frac{k}{m}$$

d'où : $\boxed{\frac{dv_G}{dt} = A - B.v_G^n}$ l'éq diff du mvt.

❷ On appelle vitesse limite v_L ; c'est la vitesse du centre d'inertie G de la bille en régime permanent .Trouver l'expression de v_L en fonction de : g , k , ρ , ρ_f , n et V .



on a $v_L = cte \Rightarrow \frac{dv_G}{dt} = 0$

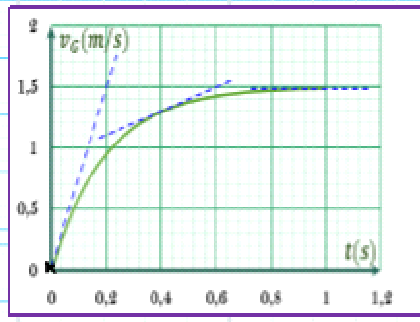
donc $0 = A - B.v_G^n$

$$\Rightarrow Bv_G^n = A \Rightarrow v_G^n = \frac{A}{B} \Rightarrow v_G = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}$$

$$v_L = \sqrt[n]{\frac{g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right)}{\frac{k}{m}}} = v_L = \sqrt[n]{\frac{g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right)}{\frac{k}{\rho V}}}$$

$$\Rightarrow v_L = \sqrt[n]{\frac{g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right)\rho V}{k}} \Rightarrow \boxed{v_L = \sqrt[n]{\frac{g(\rho - \rho_f)V}{k}}}$$

❸ Exprimer l'accélération a_0 en fonction de : ρ , ρ_f et g .



d'où : $\frac{dv_G}{dt} = A - B.v_G^n$

$a = A - B.v_G^n$

à $t=0$: $v_0 = 0$

donc $a_0 = A - \cancel{B v_0^n}$

$a_0 = A$

$$\boxed{a_0 = g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right)}$$

Résumé :

Au cours de la chute verticale d'un solide dans un fluide visqueux.
on a :

- L'accélération diminue au cours du temps et tend vers 0.
- L'accélération est maximale à $t=0$.
- La vitesse augmente au cours du temps jusqu'à une valeur limite v_L.
- L'éq diff du mvt : $\frac{dv_G}{dt} = A - B.v_G^n$

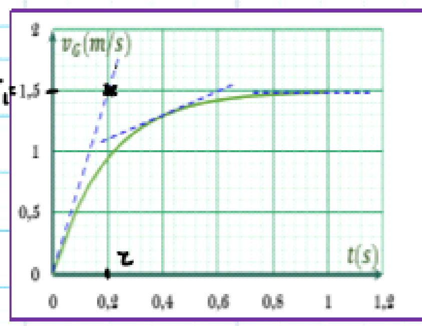
• $v_{lim} = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}$; $A = g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right)$ et $B = \frac{K}{m}$

• $a_0 = A$

• le temps caractéristique τ :

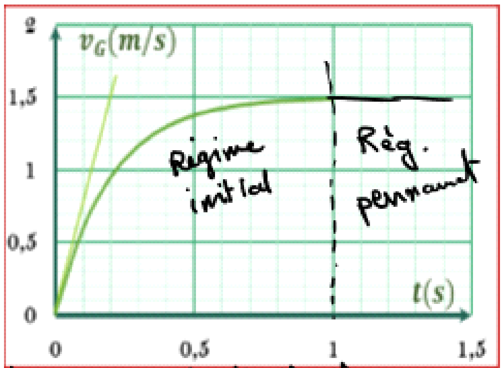
$a_0 = \frac{v_{lim} - 0}{\tau - 0} \Rightarrow a_0 = \frac{v_{lim}}{\tau}$

$$\boxed{\tau = \frac{v_{lim}}{a_0}}$$



❖ Les grandeurs caractérisant le mouvement

▪ L'évolution de la vitesse du centre d'inertie de la bille



L'étude expérimentale permet de tracer la courbe de variation de la vitesse au cours du temps .

La courbe ci-contre montre qu'il y a deux régimes du mouvement

- Un régime ..transitoire... (.initial...) dans lequel la vitesse v_G augmente.... de .0 jusqu'à une valeur limite v_L., et l'accélération a_G diminue de a_0 jusqu'à .0. . Pendant ce régime le mouvement du solide est .accéléré.............. .
- Un régime permanent dans lequel la vitesse v_G .est..devenue...constante...$v_G = v_L$...... et l'accélération a_G est .nulle..... . Pendant ce régime le mouvement de du solide est ..R. uniforme....................

▪ La vitesse limite du solide

On a l'équation différentielle du mouvement : ....$\frac{dv_G}{dt} = A - B v_G^n$.........

En régime permanent on a : ...$\frac{dv_G}{dt} = 0$..............................

D'ou l'expression de la vitesse limite est : ....$v_L = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}$.....................

▪ L'accélération initiale du solide

On a l'équation différentielle du mouvement est : . .$\frac{dv_G}{dt} = a = A - Bv_G^n$........

à $t = 0$ l'équation différentielle devient:....$v_0 = 0 \Rightarrow a = A = g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right)$

Et puisque : ...$a = \frac{dv_G}{dt}$.....donc l'équation différentielle devient ...$a = A - B.v_G^n$.......

▪ La constante du temps

Graphique , la asymptote à la courbe $v_G = f(t)$ et la tangente à $t = 0$ se croisent à un instant ... ... τ.. ... ..appelée Constante du temps

La constant du temps τ permet d'estimer la durée du régime transitoire tel que ... $\Delta t = 5\tau$

④ Résolution de l'équation différentielle par la méthode d'Euler

La méthode d'Euler est une méthode numérique itérative permettant de donner une solution approchée de l'équation différentielle du mouvement de G , lors d'une chute verticale avec frottement .

Pour résoudre l'équation différentielle du mouvement par la méthode d'Euler il faut connaitre:

- L'équation différentielle du mouvement : $\frac{dv_G}{dt} = -Bv_G^n + A$ $\Rightarrow a = -B.v_G^n + A$
- La vitesse initiale v_0 .
- Le pas de résolution : $\Delta t = t_{i+1} - t_i$

On peut déterminer les grandeurs cinétiques (vitesses et accélérations) en utilisant les deux équations suivantes :

- L'équation différentiel à l'instant t_i : $a_i = A - Bv_i^n$.
- L'expression de la vitesse : $v_{i+1} = a_i\Delta t + v_i$

temps	vitesse	accélération
t_0	v_0	a_0
t_1	v_1	a_1
t_2	v_2	a_2
t_3	v_3	a_3
⋮	⋮	⋮
t_n	v_n	a_n .