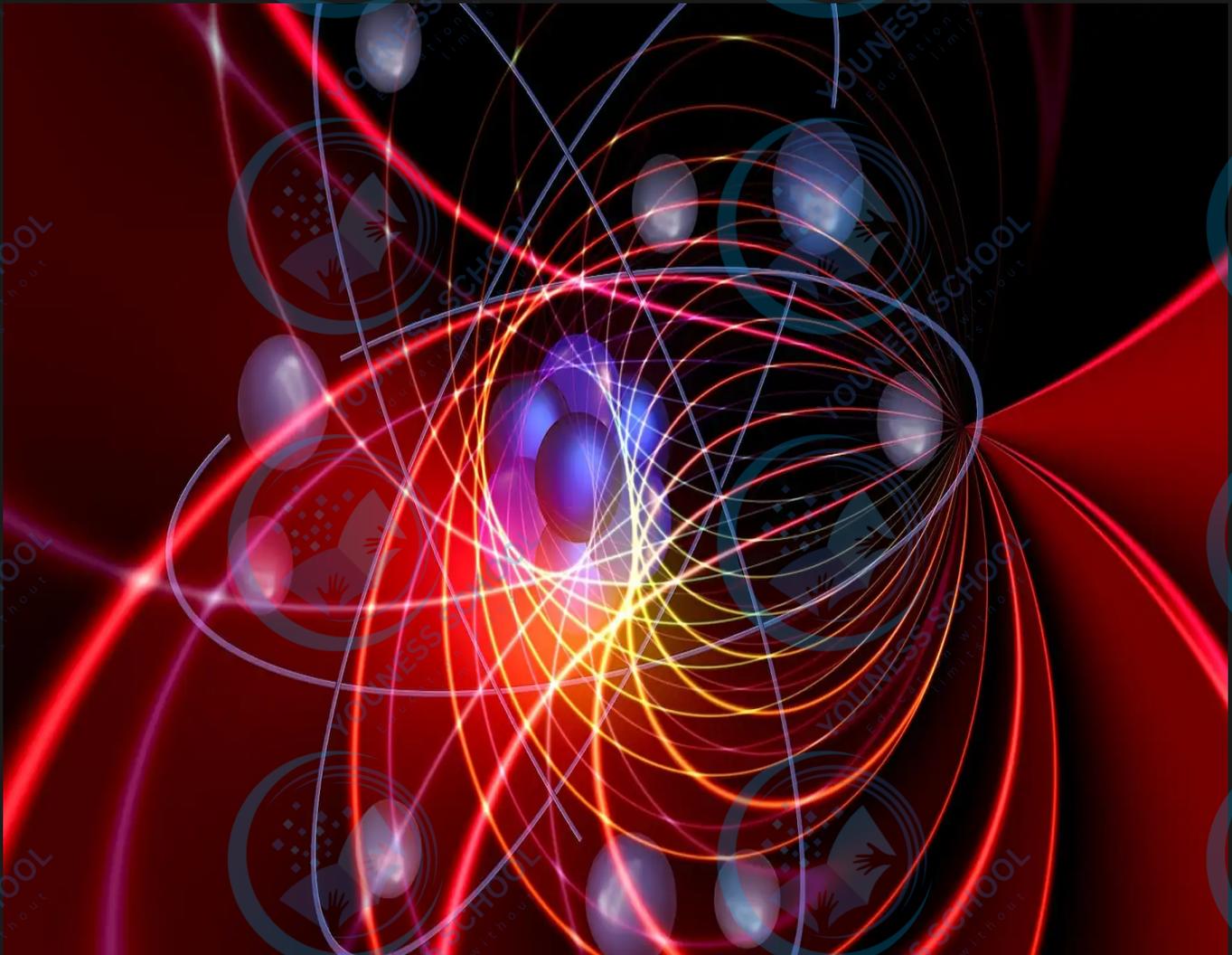




obsessed with perfection

Les classiques en Electromagnétisme I



HASSAN ADOCH

Professeur agrégé au Lycée Ibn Timiya

Classes préparatoires aux grandes écoles, Marrakech

Exercice 1 (Distributions de charge (X 1993)):

On considère un repère orthonormé $OXYZ$, de vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Une droite fixe le long de l'axe OZ uniformément chargée avec une densité de charge par unité de longueur $\lambda > 0$.

- 1) Quelle est la symétrie de cette distribution de charge?
- 2) Établir l'expression du vecteur champ électrostatique \vec{E} sur l'axe OX à la distance x de l'origine O en fonction de λ, x et \vec{i} de deux manières (directement par la loi de Coulomb et puis par l'application de théorème du Gauss).

La droite chargée est remplacée par un cylindre vertical d'axe OZ , de rayon a avec une charge positive uniformément répartie en surface avec une densité σ par unité de surface.

- 3) En appliquant le théorème de Gauss, trouver la valeur de σ en fonction de a et λ pour que le champ électrique soit le même, pour $x > a$, que celui de la distribution linéique étudiée précédemment.
- 4) Quelle est l'expression du champ électrique au voisinage immédiat de la surface du cylindre? Interpréter ce résultat.

On superpose à cette distribution en surface une distribution de charges négatives uniformément répartie dans tout l'espace à partir de la distance $r > a$ de l'axe OZ avec une densité $-\rho_0$ par unité de volume.

- 5) Donner l'expression vectorielle du champ \vec{E} en $(x, 0, 0)$ pour l'ensemble de la distribution en fonction de σ, ρ_0, a, x et \vec{i}

Exercice 2 (Distribution de charge non uniforme (X 1993)):

On considère une distribution de charge répartie dans tout l'espace, en utilisant le système de coordonnées sphérique (r, θ, φ) d'origine O , l'expression du potentiel en un point M à la distance r de O est :

$$V(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

Les constantes Q_0 et a sont respectivement une charge positive et une longueur positive.

- 1) Compte tenu de l'expression du potentiel, quelle est la symétrie de la distribution de charges?
- 2) Donner l'expression du vecteur champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en fonction de Q_0, a de la distance r et du vecteur unitaire \vec{e}_r de la direction \vec{OM} .
- 3) Rappeler l'énoncé du théorème de Gauss et l'appliquer pour trouver l'expression de $q(r)$ de la quantité de charge totale se trouvant à l'intérieur d'une sphère de centre O et de rayon r .
- 4) Représenter graphiquement la variation de $q(r)$ en fonction de r .
- 5) En déduire la charge totale de la distribution et que cette distribution peut être décomposée en une charge ponctuelle q_0 située en O , dont l'on précisera la valeur, à laquelle est superposée une charge Q_1 répartie dans tout l'espace. Représenter graphiquement en fonction de la charge $q_1(r)$ qui correspond à la charge répartie et se trouve dans une sphère de centre O et de rayon r .
- 6) Rappeler la définition de la densité de charge volumique pour une répartition de charge non uniforme. Pour une distribution à symétrie sphérique, quel volume élémentaire peut-on utiliser dans cette définition?
- 7) Établir pour $r > 0$ l'expression de la densité volumique de charge $\rho(r)$ qui correspond à la charge Q_1 répartie dans tout l'espace.
- 8) Donner, sans calcul, la valeur de la charge totale correspondant à cette densité.

Exercice 3 (Condensateur plan (CCP 2010)):

On considère un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique σ positive.

- 1) Énoncer le théorème de Gauss relatif au flux sortant du champ électrostatique \vec{E} à travers une surface fermée S contenant la charge électrique Q_{int} .
- 2) En considérant les propriétés de symétrie de la distribution de charges, montrer que le champ électrostatique créé par un plan infini est orthogonal au plan.
- 3) Démontrer que \vec{E} est tel que sa norme vaut :

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Représenter sur un schéma le vecteur \vec{E} de part et d'autre du plan. On indiquera avec précision la surface de Gauss choisie.

- 4) Soit un condensateur plan constitué par deux plans infinis, parallèles, uniformément chargés et séparés par une distance d . Le plan supérieur étant chargé avec une densité surfacique $\sigma > 0$ et le plan inférieur étant chargé avec $-\sigma$.

4-1) En utilisant le théorème de superposition, déduire de la question précédente le champ électrostatique en tout point de l'espace.

4-2) Déterminer la différence de potentiel U entre les deux plans du condensateur. On exprimera U en fonction de σ , ϵ_0 et d . Identifier clairement, en le justifiant, le plan dont le potentiel est le plus élevé.

4-3) Définir et déterminer la capacité C du condensateur par unité de surface. On exprimera C en fonction de ϵ_0 et d .

Exercice 4 (condensateur cylindrique CCP 2010):

On considère un condensateur cylindrique composé de deux armatures coaxiales de hauteur H et de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$ et placées dans l'air. L'armature interne porte de charge électrique $Q > 0$. L'armature externe porte une charge totale $-Q$.

Les potentiels électriques des armatures sont respectivement V_1 et V_2 . Soit un point M situé à la distance $r = KM$ de l'axe : $R_1 < r < R_2$, K est la projection orthogonale du point M sur l'axe du condensateur.

Soit \vec{u} le vecteur unitaire de la droite (KM) dirigé de K vers M . On admettra que le champ électrostatique \vec{E} créé au point M est radial et sa norme ne dépend que de r . On écrit donc :

$$\vec{E} = E(r) \vec{u}$$

On néglige les effets de Bord.

- 1) En appliquant le théorème de Gauss à une surface S que l'on précisera, déterminer l'expression de $E(r)$. On exprimera $E(r)$ en fonction de Q , ϵ_0 , r et H . On distinguera les cas selon que $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ ou $r > R_2$.
- 2) En déduire le potentiel $V(r)$ à une distance r de l'axe lorsque $R_1 < r < R_2$. On exprimera $V(r)$ en fonction de Q , H , V_1 , R_1 , ϵ_0 et r . En déduire la différence de potentiel $U = V_1 - V_2$ entre les deux armatures du condensateur en fonction de Q , ϵ_0 , H , R_1 et R_2 .
- 3) Déterminer la capacité du condensateur en fonction de ϵ_0 , H , R_1 et R_2 .
- 4) On peut associer au champ électrostatique une densité volumique d'énergie :

$$u_{el} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

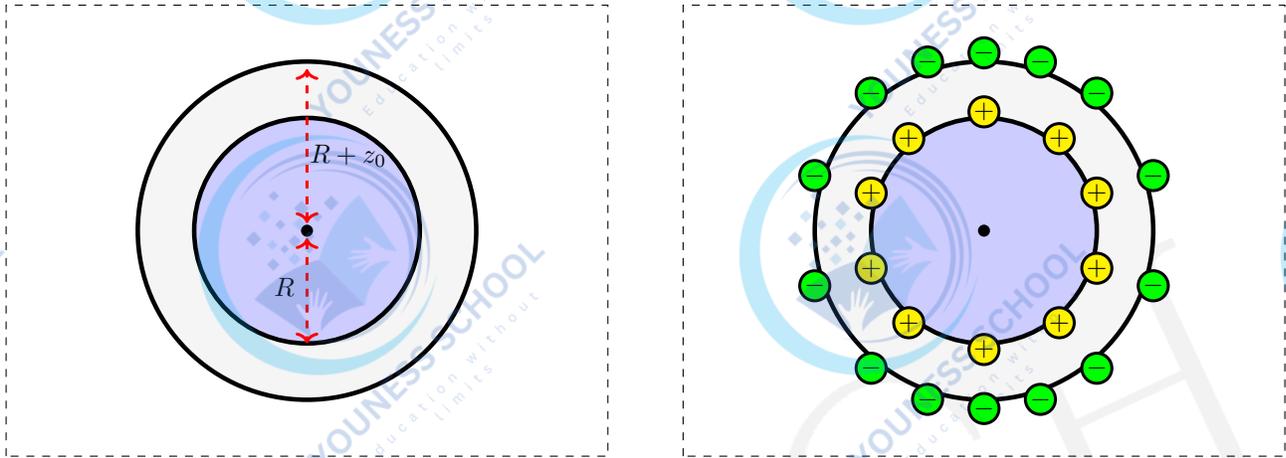
En utilisant l'expression de $E(r)$ déterminée précédemment et en intégrant l'expression de u_{el} , déterminer l'énergie W_{cond} accumulée par le condensateur; On exprimera W_{cond} en fonction de Q , ϵ_0 , H , R_1 et R_2 . En déduire l'expression de W_{el} en fonction de Q et C .

- 5) En effectuant un développement limité de l'expression de la capacité déterminée à la question 3, montrer que si les rayons des armatures sont très proches, c'est-à-dire si $R_2 - R_1 = e \ll R_1$, le condensateur cylindrique est équivalent à un condensateur plan dont on précisera les caractéristiques (surface, distance et capacité).

Exercice 5 (Condensateur sphérique (CCP 2007)):

On représente l'ensemble Terre-ionosphère comme un volumineux condensateur sphérique qui peut être modélisé par le schéma de la figure ci-dessous. La Terre, de rayon R , se comporte comme un conducteur parfait de potentiel nul et porte une charge négative $-Q$ ($Q > 0$) uniformément répartie sur sa surface, tandis que l'ionosphère représentée par une surface équipotentielle sphérique de rayon $R + z_0$, de potentiel V possède une charge totale $+Q$. On suppose que l'atmosphère a la permittivité du vide avec :

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ (S.I)}$$



- 1) Exprimer le champ électrostatique $E(z)$ à l'altitude z ($0 < z < z_0$) en fonction de Q , R , z et ϵ_0 (vecteurs unitaires en coordonnées sphériques : $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$).
- 2) En déduire le potentiel V , puis la capacité C du système en fonction de R , z_0 et ϵ_0 .
- 3) Des mesures à l'altitude $z_0 = 60 \text{ km}$ ont permis d'évaluer le potentiel à environ 360 kV . Justifier que dans ces conditions le système se comporte comme un condensateur plan. Calculer la capacité C et l'énergie électrostatique W_{el} du système, ainsi que la valeur du champ E au niveau du sol, le rayon terrestre valant 6000 km .
- 4) Donner la valeur de la densité surfacique à la surface de la Terre et en déduire sa charge totale $-Q$.
- 5) Lors d'un orage, la tension passe à $V_1 = 10^8 \text{ V}$ pour le système formé par le sol et la base des nuages d'altitude $z_1 = 1 \text{ km}$. Déterminer les nouvelles valeurs σ_1 et E_1 . Sachant qu'en temps normal, l'atmosphère est partiellement ionisée et parcourue par de faibles courants électriques verticaux dont l'effet principal est de décharger le système Terre-atmosphère, quelle est l'incidence 'un orage sur ces transferts de charges.

Exercice 6 (Dipôle électrostatique (CNC 2011 MP)):

Un dipôle électrostatique est constitué de deux charges ponctuelles $-q$ et $+q$ placées sur l'axe OZ . La charge $-q$ est située en $N(z = -\frac{a}{2})$ et l'autre charge $+q$ est placée en $P(z = +\frac{a}{2})$, $a > 0$.

- 1) Donner l'expression du moment dipolaire électrique \vec{p}_0 de la distribution décrite ci-dessus en fonction des données. Quelle est son unité?
- 2) Donner l'expression du potentiel électrostatique $V_+(M)$ créé au point M de l'espace par la charge ponctuelle $+q$.
- 3) En fixant, par convention, le potentiel à l'infini égal à 0, donner l'expression du potentiel électrostatique $V(M)$ créé par les deux charges au point M .
- 4) Justifier clairement que le champ électrostatique créé par les deux charges au point M s'écrit sous la forme :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta) \vec{e}_r + E_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad V(M) = V(r, \theta)$$

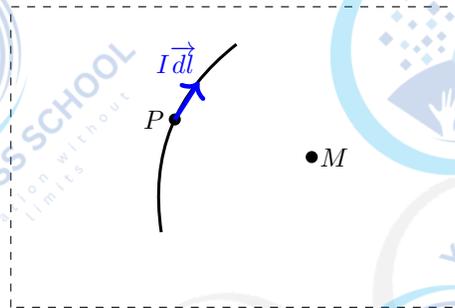
- 5) Les deux charges sont maintenant très proches l'une de l'autre, et l'on s'intéresse à l'expression du potentiel électrostatique en un point M tel que $r \gg a$. Établir alors l'expression approchée du potentiel $V(M)$. On se limitera à l'ordre 1 en $\frac{a}{r}$.

- 6) En déduire les composantes radiale et orthoradiale du champ électrostatique créé au point M par le dipôle loin de celui-ci.
- 7) Établir l'équation des lignes de champ loin du dipôle en coordonnées sphériques.
- 8) Dessiner l'allure des lignes de champ dans le plan $\varphi = cte$ en n'oubliant pas de les orienter.

Exercice 7 (Fil infini (CCP 2003)):

Soit un élément de courant $d\vec{C}$ centré sur le point P , associé à un élément de longueur $d\vec{l}$ d'un circuit parcouru par un courant d'intensité I . La loi de Biot et Savart donne, en régime stationnaire, l'expression de la contribution $d\vec{B}$ au champ magnétostatique de l'élément de courant $d\vec{C}$ en un point M .

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{C} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$



- 1) Compléter le schéma ci-dessus en mettant les vecteurs $d\vec{B}$ et \overrightarrow{PM} . On veillera à respecter l'orientation des vecteurs.
- 2) Soit un fil rectiligne de longueur infini parcouru par un courant d'intensité I et placé dans le vide.

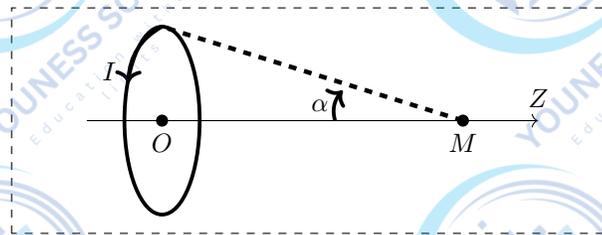
2-1) En appliquant le théorème d'Ampère, établir l'expression du champ magnétostatique créé par ce fil à une distance r du fil. Réaliser un schéma et préciser l'orientation du champ magnétostatique.

2-2) En supposant que le fil est parcouru par une intensité de $2,5 \text{ A}$, à quelle distance du fil le champ magnétostatique créé par le fil aura-t-il la même valeur que la composante horizontale du champ magnétique terrestre qui est de $B_0 = 2 \times 10^{-5} \text{ T}$. Conclure.

On donne $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ (S.I)}$

Exercice 8 (Spire circulaire (CNC 2022)):

On considère une spire circulaire de rayon a , de centre O et d'axe OZ . Cette spire est contenue dans le plan OXY orthogonal à l'axe OZ . Elle est parcourue par un courant électrique d'intensité constante I .



- 1) Montrer, par un raisonnement rigoureux, que le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par la spire au point M de son axe OZ est porté par \vec{e}_z .
- 2) Montrer que ce champ magnétique est donné par l'expression :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2a} \sin^3(\alpha) \vec{e}_z$$

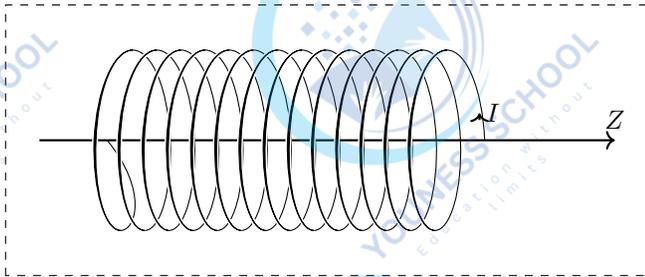
Où α est l'angle sous lequel la spire est vue depuis le point M . Exprimer le champ magnétique au centre O de la spire.

- 3) Représenter l'allure du champ $B(M)$ en fonction de $z = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_z$.
- 4) Application numérique : on fixe $a = 5 \text{ cm}$. Calculer $B(O)$ pour $I = 1 \text{ A}$. Puis calculer la valeur de I pour un avoir un champ $B(O) = 1 \text{ T}$. Commenter.
- 5) Citer deux systèmes qui permettent d'obtenir un champ magnétique intense.

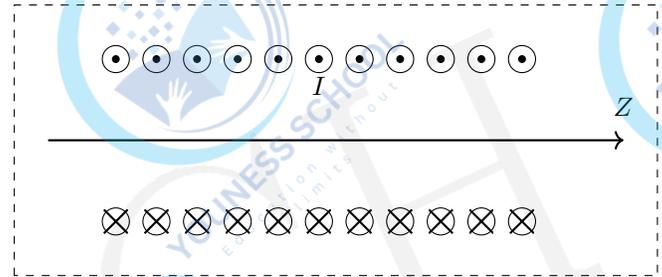
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$$

Exercice 9 (Bobine et solénoïde (CNC 2022)):

On forme une bobine simple en enroulant un fil conducteur électrique sur un cylindre isolant d'axe OZ , de rayon a et de longueur L . Le fil, de diamètre négligeable, est enroulé en formant N spires circulaires jointives de rayon a d'axe OZ . La bobine est parcourue par un courant d'intensité I constante. On désigne par n le nombre de spires jointives par unité de longueur.



Représentation complète de solénoïde



Représentation symbolique

- 1) Rappeler le champ magnétique $\vec{B}_{sp}(M)$ créée -en un point de l'axe OZ - par une spire circulaire parcourue par un courant constant I de même direction que le courant de la bobine.
- 2) Montrer que le champ magnétique créé par la bobine au point M de l'axe OZ est donné par :

$$\vec{B}_{sol}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2)) \vec{e}_z$$

- 3) Dédire le champ magnétique créé par la bobine supposée de longueur infinie en un point M de son axe OZ .
- 4) Dans toute la suite, on fait l'hypothèse que la bobine, constituée de n spires jointives par unité de longueur, de rayon a et d'axe OZ , est suffisamment longue pour pouvoir négliger les effets de bord. On note $\vec{B}(M)$ le champ magnétique créé par la bobine de longueur infinie en tout point M de l'espace.

4-1) Justifier que le champ magnétique s'écrit sous la forme :

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_z$$

4-2) Montrer que le champ magnétique $\vec{B}(M)$ est uniforme à l'intérieur de la bobine. On note sa norme B_{int} .

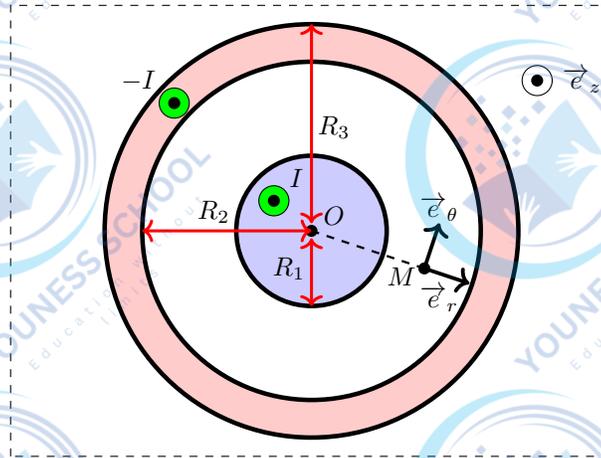
4-3) Montrer que le champ magnétique $\vec{B}(M)$ est uniforme à l'extérieur de la bobine. On note sa norme B_{ext} . Que peut-on dire sur B_{ext} loin de la bobine?

4-4) Dédire l'expression de $\vec{B}(M)$ en tout point M de l'espace.

4-5) Calculer le flux de $\vec{B}(M)$ à travers les N spires de la bobine.

Exercice 10 (Câble coaxial (CCP 2002)):

On considère un câble coaxial cylindrique de longueur supposée infinie, constitué d'un conducteur central plein de rayon R_1 parcouru par un courant uniforme I et d'un conducteur périphérique évidé, de rayon inférieur $R_2 > R_1$ et de rayon supérieur R_3 et parcouru par un courant uniforme également d'intensité I mais circulant en sens inverse par rapport au courant du conducteur central. Soit un point M situé à une distance r de l'axe du câble.



1) Énoncer le théorème d'Ampère relatif à la circulation d'un champ magnétostatique \vec{B} le long d'un contour fermé C constitué de points M et s'appuyant sur une surface S .

2) Montrer que le champ magnétostatique \vec{B} créé au point M est orthoradial.

3) Montrer qu'il peut se mettre sous la forme :

$$\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$$

Où $B(r)$ est une fonction de r uniquement.

4) Préciser alors la forme des lignes de champ.

5) Montrer que le champ magnétostatique \vec{B} créé au point M est nul si $r > R_3$.

6) Expliquer alors l'intérêt du câble coaxial par rapport à un fil simple parcouru par un courant de même intensité.

7) Calculer les densités de courant \vec{j}_1 et \vec{j}_2 respectivement du conducteur central et du conducteur périphérique en fonction des courants I_1 et I_2 et des rayons R_1 , R_2 et R_3 .

8) En appliquant le théorème d'Ampère à un contour C que l'on précisera, donner l'expression de la composante $B(r)$ du champ magnétostatique créé au point M en fonction de μ_0 , I , r , R_1 , R_2 et R_3 , dans chacun des trois cas suivants :

- a) $r < R_1$
- b) $R_1 < r < R_2$
- c) $R_2 < r < R_3$

9) Justifier puis vérifier la continuité du champ B pour $r = R_1$ puis pour $r = R_2$;

10) Dessiner le graphe de la fonction $B(r)$.

Exercice 11 (bobines de Helmholtz (Mines 2008)):

Une méthode classique de production d'un champ magnétique uniforme est l'utilisation des bobines de Helmholtz. Les questions suivantes vont permettre d'expliciter leurs caractéristiques.

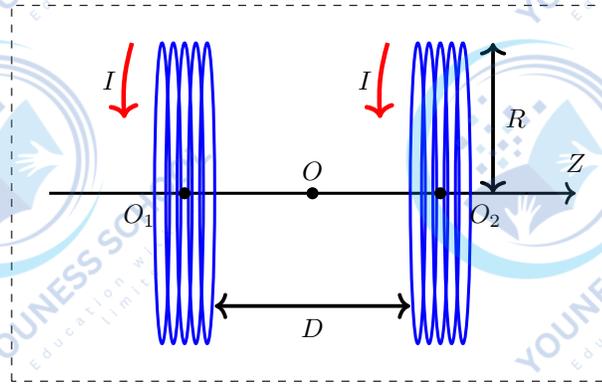
On considère le montage de la figure ci-dessous constitué de deux bobines plates d'épaisseur négligeable, composées chacune de N spires circulaires de rayon R , de même axe de symétrie OZ . Ces deux bobines ont pour centres de symétrie respectifs O_1 et O_2 , elles sont parcourues par des courants identiques d'intensité $I = cte$. Les extrémités de ces bobines sont séparées d'une distance $D = 2d$. La configuration d'Helmholtz est obtenue lorsque $d = \frac{R}{2}$.

On appelle \vec{B}_{coz} le champ magnétostatique créé par la une spire en un point de son axe OZ à la cote z . Son expression est donnée par :

$$\vec{B}_{coz}(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \frac{1}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515



1) On pose $u = \frac{z}{R}$, déterminer le champ magnétostatique $\vec{B}_{hoz}(u)$ créé par la configuration de la figure 1 en un point situé sur l'axe OZ à la coté z . Représenter sur un même graphique les fonctions $\frac{\|\vec{B}_{coz}(u)\|}{\|\vec{B}_{coz}(0)\|}$ et $\frac{\|\vec{B}_{hoz}(u)\|}{\|\vec{B}_{hoz}(0)\|}$ que constatez-vous lorsque $u \simeq 0$?

2) On note $g(u) = \|\vec{B}_{hoz}(u)\|$. Justifier physiquement le faite que la fonction $g(u)$ est paire. Écrire en fonction de u et la constante $\gamma = \frac{8N\mu_0 I}{5R\sqrt{5}}$, le développement limité $\bar{g}(u)$ de $g(u)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0. On donne :

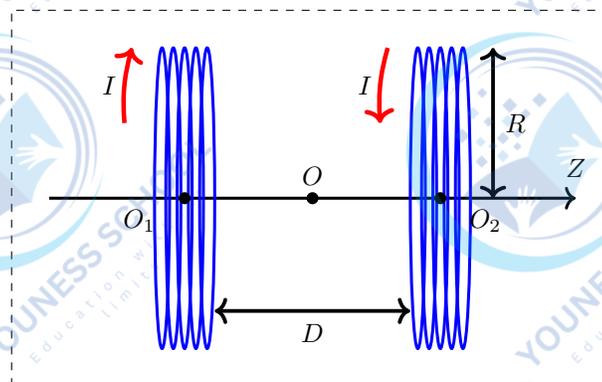
$$\left(1 + \left(x \pm \frac{1}{2}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \simeq \frac{8}{5\sqrt{5}} \left(1 \mp \frac{6}{5}x \pm \frac{32}{25}x^3 - \frac{144}{125}x^4\right)$$

3) Déterminer l'amplitude de l'intervalle centré sur l'origine sur lequel la fonction $\bar{g}(u)$ ne varie pas de plus de 2% en erreur relative.

Un détecteur de particules chargées nécessite la production d'un champ magnétique uniforme et permanent de norme $B = 0,5 T$ dans un volume cylindrique de hauteur $H = 4 m$ et de diamètre $D = 4 m$. On veut comparer les deux sources décrites précédemment. Les spires sont réalisées avec un matériau conducteur de section carrée de $2 mm$ de côté et l'intensité du courant I est limitée à $100 A$.

4) Pour l'utilisation des bobines de Helmholtz, on souhaite que le champ magnétique ne varie pas de plus de 2% le long de l'axe OZ sur toute la hauteur H . Déterminer le rayon des spires à utiliser puis calculer le nombre N de spires pour chaque bobine. En déduire la longueur totale de fil conducteur que l'on doit utiliser. Commenter.

On reprend la configuration de Helmholtz mais avec deux courants de même intensité circulant en sens contraire conformément à la Figure ci-dessous avec maintenant $d = \frac{3}{2}R$. Cette configuration inversée est appelée "bobines de Mholtzhel". On s'intéresse au champ magnétostatique \vec{B}_{moz} créé par ces bobines sur l'axe OZ au voisinage de O .



Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

On donne :

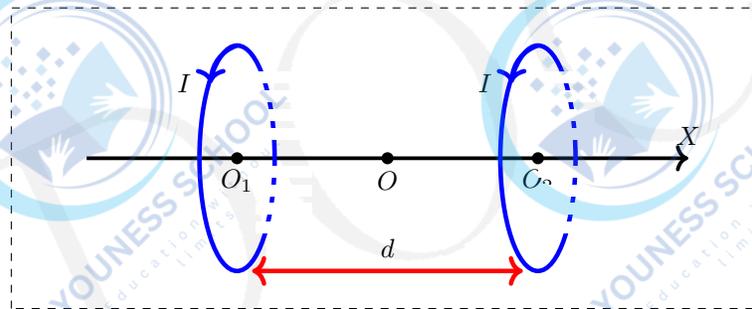
$$\left(1 + \left(x \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \simeq \frac{8\sqrt{7}}{49} \left(1 \mp \frac{6\sqrt{3}}{7}x + \frac{48}{49}x^2 - \frac{240}{343}x^4 \pm \frac{1056\sqrt{3}}{2401}x^5\right)$$

- 5) En utilisant toujours la variable réduite u , établir l'expression du champ \vec{B}_{moz} créé sur l'axe OZ en un point de cote z .
- 6) Montrer que le champ magnétique créé par une bobine de Helmholtz au voisinage de l'origine est très proche d'un champ linéaire de la forme :

$$\vec{B}_{moz} = az \vec{e}_z$$
- On exprimera la constante a en fonction de N , μ_0 , I et R .
- 7) Déterminer l'amplitude de l'intervalle contenu dans OZ et centré sur O sur lequel $\vec{B}_{moz}(z)$ est approximable à moins de 2% d'erreur relative par un champ linéaire de pente a .
- 8) On souhaite réaliser un champ linéaire de pente $a = 10 \text{ T.m}^{-1}$ en utilisant un courant permanent d'intensité $I = 10 \text{ A}$ et des bobines de Helmholtz de 10 cm de rayon. Calculer le nombre de spires N à utiliser.

Exercice 12 (Bobines de Helmholtz (CCP 2003)):

Soient deux bobines plates identiques circulaires, de N spires chacune et de rayon R . Ces deux bobines sont placées dans deux plans parallèles. Leur axe commun est O_1O_2X , en notant O_1 le centre d'une bobine et O_2 le centre de l'autre. Soit O le point situé au milieu des deux points O_1 et O_2 . La distance entre les centres des deux bobines est d . Soit x l'abscisse d'un point M de l'axe OX telle que $OM = x$.



Nous nous proposons de montrer que, pour une distance $d = R$, le champ magnétique est « quasi-uniforme » sur l'axe au voisinage du point O . On donne :

$$R = 0,2 \text{ m} ; \quad I = 10 \text{ A} ; \quad N = 100 \quad \text{et} \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ (S.I)}$$

- 1) Montrer que l'expression du champ magnétique au point M peut se mettre sous la forme :

$$B(x) = f\left(x + \frac{d}{2}\right) + f\left(\frac{d}{2} - x\right)$$

Où f est une fonction que l'on précisera.

- 2) En effectuant un développement limité de $B(x)$ au voisinage de zéro, montrer que pour $d = R$, le champ magnétique peut se mettre sous la forme :

$$B(x) = 2f\left(\frac{d}{2}\right) + o(x^3)$$

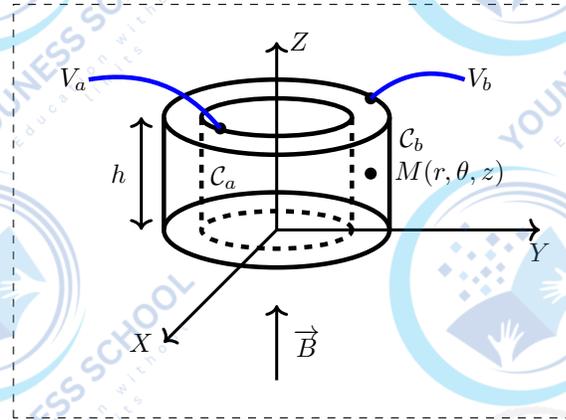
Où $o(x^3)$ représente une fonction de x négligeable devant les termes du troisième ordre lors du développement de $f(x)$.

Compte tenu du résultat précédent, indiquer l'intérêt pratique des bobines de Helmholtz.

- 3) Calculer la valeur du champ magnétique $B(O_1)$ au point O_1 , $B(O_2)$ au point O_2 et $B(O)$ au point O .
- 4) Déterminer le taux de variation du champ $\frac{\Delta B}{B}$ lorsqu'on passe du point O au point O_1 ou du point O au point O_2 .

Exercice 13 (Effet Corbino (CNC 2007 MP)):

On considère un matériau conducteur ohmique de conductivité électrique contenu entre deux cylindres coaxiaux C_a et C_b , parfaitement conducteurs, de rayons respectifs a et b ($a < b$). Les deux cylindres sont supposés être suffisamment longs pour permettre de négliger tout effet de bord. Le cylindre C_a est porté au potentiel électrostatique V_a et le cylindre C_b est porté au potentiel électrostatique V_b . Dans toute la suite, on supposera que $V_a > V_b$. On repère un point M de l'espace par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) habituelles et on note $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ la base locale de ce système de coordonnées.



On considère d'abord le cas d'un champ magnétique nul ($B = 0$).

1) Montrer que le champ électrostatique entre les deux cylindres est radial et s'écrit :

$$\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$$

2) En utilisant le théorème de Gauss, exprimer $E(r)$ entre les deux cylindres C_a et C_b en fonction de la densité surfacique de charge ρ_a^s de C_a , a , r et ϵ_0 .

3) Que vaut le champ électrique E_a en $r = a$.

4) Exprimer ρ_a^s en fonction de ϵ_0 , a , b , $V_{ab} = V_a - V_b$.

5) En déduire l'expression de \vec{E} en tout point de l'espace en fonction de V_{ab} , r , a et b et tracer l'évolution de $E(r)$ en fonction de r .

6) Déterminer la valeur de E_b de $E(r)$ en $r = b$ et montrer qu'elle s'exprime simplement en fonction de la densité surfacique de charge ρ_b^s de C_b et ϵ_0 . On admettra que les deux surfaces C_a et C_b sont en état d'influence totale.

7) Tracer les lignes de champ de \vec{E} . Quelle est la forme des lignes de courant électrique?

8) On rappelle que pour un conducteur soumis à un champ électrique \vec{E} , on aura une densité volumique de courant donnée par :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Exprimer l'intensité du courant électrique I_0 qui traverse une surface cylindrique C_h coaxiale à C_a et C_b et de hauteur h placée entre les deux cylindres en fonction de σ , h , a , b et V_{ab} .

9) En déduire l'expression de la résistance R_0 de la tranche de hauteur h du milieu conducteur. Commenter les variations de R_0 en fonction de h et du rapport $\frac{b}{a}$.

Le milieu est soumis à présent à l'action d'un champ magnétostatique uniforme et permanent $\vec{B} = B \vec{u}_z$. On admettra que les lignes de courant restent planes en présence de \vec{B} .

10) Montrer à l'aide d'une construction graphique, que les lignes de courant, font un angle θ_h avec les lignes de champ électrostatique. On rappelle que :

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma} \vec{j} + R_h \vec{B} \wedge \vec{j}$$

11) Exprimer $\tan(\theta_h)$ en fonction de a , R_h et B .

12) Montrer qu'en coordonnées cylindriques, la ligne de courant passant par le point de coordonnées (r_0, θ_0, z_0) peut s'écrire sous la forme :

$$r(\theta) = r_0 \exp(f(\theta)) \quad (*)$$

Où $f(\theta)$ est une fonction analytique de θ à déterminer. Que devient la relation (*) en champ nul ($B = 0$)? Commenter le résultat obtenu.

13) On note \vec{j} le vecteur courant électrique en présence du champ magnétique \vec{B} et j_0 le module du vecteur courant électrique en l'absence du champ magnétique.

13-1) Exprimer le module j de \vec{j} en fonction de j_0 , σ , R_h et B .

13-2) En déduire l'expression de la composante radiale j_r de \vec{j} en fonction des mêmes paramètres.

14) On note I l'intensité du courant qui traverse une surface cylindrique C_h coaxiale à C_a et C_b et de hauteur h placée entre les deux cylindres.

14-1) Exprimer I en fonction de σ , R_h , B et I_0 intensité du courant en l'absence du champ magnétique.

14-2) En déduire l'expression de la résistance électrique R de la tranche de hauteur h du milieu conducteur en présence du champ magnétique B en fonction de σ , B , R_h et R_0 .

14-3) Exprimer la variation relative de résistance $\delta = \frac{R - R_0}{R_0}$ en fonction de σ , R_h et B . Commenter le résultat obtenu.

14-4) Déterminer la valeur numérique de la variation relative de résistance δ sous un champ magnétique $B = 1 \text{ T}$ dans le cas du cuivre pour lequel : $R_h = -0,7 \times 10^{-10} \text{ m}^3 \cdot \text{C}^{-1}$ et $\sigma = 6 \times 10^7 \text{ } \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$

14-5) Répondre à la même question dans le cas d'un semi-conducteur comme l'arséniure d'indium pour lequel : $R_h = +0,7 \text{ m}^3 \cdot \text{C}^{-1}$ et $\sigma = 1 \text{ } \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ Commenter en comparant les valeurs obtenues.

Exercice 14 (Dipôle électrostatique (CCP 2008 MP)):

On considère un ensemble de n charge ponctuelles q_i , situées aux points S_i dans un volume fini \mathcal{V} , telle que $\sum_{i=0}^n q_i = 0$. On désigne par $\vec{p} = \sum_{i=0}^n q_i \vec{OS}_i$ le moment dipolaire de cette distribution, supposé non nul, O étant un point fixe appartenant à \mathcal{V} . On donne :

$$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \quad 1D = \frac{1}{3} 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$$

A-Doublet électrostatique-Moment électrique d'un dipôle

1) Vérifier que l'expression du moment dipolaire de cette distribution est indépendante du choix de l'origine O .

2) En déduire le moment dipolaire d'un doublet formé de deux charges ponctuelles $-q$ en S_1 et $+q$ en S_2 ($q > 0$).

3) Dans la molécule HF , la distance entre le noyau d'hydrogène et le noyau de fluor vaut $d = 0,92 \times 10^{-10} \text{ m}$.

3-1) En première approximation, on suppose le caractère ionique de la liaison $H - F$ avec transfert de l'électron de l'hydrogène sur l'atome de fluor. Cet électron étant associé à ceux de fluor, ils forment une sphère chargée négativement, centrée sur le noyau du fluor. Effectuer l'inventaire des charges (protons, électrons) présentes au niveau des noyaux d'hydrogène et de fluor dans la molécule HF . (numéro atomique du fluor $Z = 9$).

3-2) Déterminer la valeur du moment dipolaire $\|\vec{p}\|$, en debye (D)

3-3) En réalité, le moment dipolaire électrique expérimental de la molécule vaut $1,83 D$. On désigne par H et F les positions des noyaux d'hydrogène et de fluor respectivement, et par G le barycentre des charges électroniques de la liaison $H - F$. En déduire la distance FG .

B- Potentiel et champ électrostatique

Les charges ponctuelles $-q$ et $+q$ d'un doublet sont placées respectivement aux points $S_1(0, 0, -\frac{a}{2})$ et $S_2(0, 0, +\frac{a}{2})$ du repère $(OXYZ)$.

On désigne par $p = \|\vec{p}\|$ le moment dipolaire du doublet, par M , un point courant de coordonnées sphériques (r, θ, φ) . $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ sont les vecteurs de base du système de coordonnées sphériques. On pose $r_1 = \|\vec{S}_1M\|$, $r_2 = \|\vec{S}_2M\|$, $r = \|\vec{r}\| = \|\vec{OM}\| = OM$

B-1) Exprimer le potentiel électrostatique $V(M)$ créé par le doublet, au point M , en fonction de q , r_1 et r_2 .

B-2) Établir son expression $V_d(M)$, pour un point M éloigné du doublet ($r \gg a$), en fonction de r , \vec{r} et p .

B-3) Montrer que $\vec{\text{grad}}_M \left(\frac{1}{r^3} \right)$ et $\vec{\text{grad}}_M(\vec{p} \cdot \vec{r})$ s'expriment en fonction de r , \vec{r} et p

B-4) Dédurre du potentiel $V_d(M)$ du dipôle, le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ sous la forme :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{k_1(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} \right)$$

Où k_1 est un facteur numérique que l'on calculera.

B-5) Déterminer les composantes (E_r, E_θ, E_φ) du champ $\vec{E}(M)$ en coordonnées sphériques.

B-6) La direction du champ en M est repérée par l'angle $\beta = (\vec{e}_r; \vec{E}(M))$ Quelle est alors la relation entre les angles β et θ ?

B-7) Calculer, dans le plan YOZ limité au domaine $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'angle $\theta = \theta_1$ correspondant à un champ $\vec{E}(M)$ parallèle à l'axe OY

B-8) Qu'appelle-t-on surfaces équipotentielles? Donner leurs équation en coordonnées polaires pour ce dipôle.

B-9) Qu'appelle-t-on lignes de champ? Donner leur équation en coordonnées polaires.

B-10) Tracer, dans le plan (YOZ) limité au domaine $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'allure de deux lignes équipotentielles ($V_1 > 0$ et $V_2 > V_1$) et de deux lignes de champ.

C- Action d'un champ électrique extérieur uniforme sur un dipôle

On applique dans l'espace un champ extérieur \vec{E}_e .

C-1) Exprimer en fonction de \vec{p} et de \vec{E}_e , la forme résultante \vec{R}_f et le moment du couple $\vec{\Gamma}$ s'exerçant sur le dipôle.

C-2) L'énergie d'interaction U entre le dipôle et le champ extérieur étant définie par $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_e$, étudier les orientations d'équilibre du dipôle et préciser leur stabilité.

Exercice 15 (Dipôle magnétostatique (CCP 2006)):

On considère une spire circulaire plane, d'axe OZ , de rayon R parcouru par un courant stationnaire d'intensité I . On posera $z = OM_a$

1) Donner l'expression du moment magnétique \vec{m} de cette spire en fonction de R , I et \vec{e}_z .

2) Déterminer, à l'aide de la loi de Biot et Savart, l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M_a)$, créé par cette spire, en un point $M_a(z)$ de son axe de révolution.

3) En déduire le champ magnétique $\vec{B}(O)$ au centre O de la spire et $\vec{B}(z)$ en un point $M_a(z)$ de l'axe OZ tel que $z \gg R$.

Un dipôle magnétostatique, de moment magnétique \vec{M} , est placé dans le champ magnétique \vec{B}_e produit par la spire précédente.

4) Formuler, en fonction de \vec{M} et \vec{B}_e , l'énergie potentielle d'interaction E_p et la force $\vec{F} = -\vec{\text{grad}}(E_p)$ subie par le dipôle sous l'action du champ \vec{B}_e .

5) Le dipôle de moment magnétique $\vec{M} = -M\vec{e}_z$ est placé au point M_a sur l'axe OZ de la spire à une distance $z = OM_a$. Exprimer la forme $\vec{F}(z)$ subie par le dipôle en M_a en fonction de μ_0 , M , I , R et z .

6) Quelle est le travail W_0 , que doit fournir un opérateur extérieur, pour amener ce dipôle de la position $z = z_0$ jusqu'au centre O de la spire?

7) Montrer que, si $z_0 = 2\sqrt{2}R$, le travail s'exprime par la relation :

$$W_0 = k \frac{\mu MI}{R}$$

Où k est un facteur numérique que l'on déterminera.

Exercice 16 (Experience de Stern de Gerlach (Mines 2008)):

Dans une enceinte, où règne une faible pression, est placé un four contenant du lithium porté à la température T . Le lithium se vaporise et le gaz d'atomes obtenu se comporte comme un gaz parfait monoatomique à la température T . Un ensemble d'ouvertures pratiquées dans le four permet d'obtenir un jet d'atomes de lithium. On suppose que ce jet est monocinétique et donc que les atomes ont tous la même énergie cinétique $E_{c0} = \frac{1}{2}mv_0^2$ où m est la masse d'un atome de lithium et $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ la vitesse moyenne des atomes dans le four. Le poids des atomes de lithium est négligeable dans toute cette expérience.

En sortie du four, le jet d'atomes de lithium passe dans une région où règne un champ magnétique $\vec{B} = B(z)\vec{e}_z$ tel que $B(z) = a.z$, on admet que cette région est de largeur l et qu'en dehors de celle-ci le champ magnétique est négligeable. On constate que le jet est dévié et que son impact sur un écran situé à l'abscisse $d = l + D$ se situe à une cote z_0 non nulle. Cette déviation est explicable par le fait que les atomes de lithium sont porteurs de moments dipolaires magnétiques \vec{m} constants et que dans la zone où règne le champ magnétique ils sont soumis à une force magnétique dérivant de l'énergie potentielle :

$$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

1) Après avoir exprimé cette force, établir, en fonction de a , $m_z = \vec{m} \cdot \vec{e}_z$, et E_{c0} , la relation entre z et x décrivant la trajectoire d'un atome dans la région où règne le champ magnétique linéaire.

2) Exprimer la cote z_0 en fonction de D , l , E_{c0} , a et m_z .

3) On observe en fait sur l'écran deux taches symétriques par rapport à OX . Que peut-on en déduire?

4) On choisit $E_{c0} = 1,6 \times 10^{-20} \text{ J}$, $a = 10 \text{ T/m}$, $l = 10 \text{ cm}$ et $D = 10 \text{ m}$ et on observe $z = \pm 3 \text{ mm}$. Calculer la composante m_z du moment magnétique des atomes de lithium.

Exercice 17 (Polarisabilité d'un atome (Mines 2014)):

Dans ce problème, on se propose de déterminer l'expression d'une propriété électrique importante de l'atome appelée la polarisabilité α . Pour ce faire, on utilise le modèle de Thomson. Ce modèle postule qu'un atome d'hydrogène est constitué d'un électron ponctuel noté N , de masse m et de charge $q_N = -e$ évoluant dans un nuage sphérique, de centre P , de rayon $a = 5,00 \times 10^{-11} \text{ m}$, et dont la charge totale $q_P = +e$ est répartie dans cette sphère avec une densité volumique de charge ρ uniforme. On suppose que l'électron peut se mouvoir sans frottement à l'intérieur du nuage. La masse M de ce nuage étant très supérieur à celle de l'électron, on pourra supposer P fixe dans le référentiel galiléen d'observation. N est mobile et repéré par son vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{PN}$.

1) Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}_+(N)$ créé par le nuage positif au niveau de l'électron, en fonction de e , a , ϵ_0 et \vec{r} . On suppose que l'électron reste à l'intérieur du nuage.

On applique un champ extérieur uniforme \vec{E}_0 sur le système décrit précédemment.

2) Déterminer la position d'équilibre $\vec{r}_e = \overrightarrow{PN}_{eq}$ de l'électron sous les effets des champs \vec{E}_0 et $\vec{E}_+(N)$, en déduire le moment dipolaire électrique \vec{p} de l'atome qu'induit l'application de \vec{E}_0 . De manière générale, la polarisabilité α d'un atome

est définie par la relation :

$$\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}_0$$

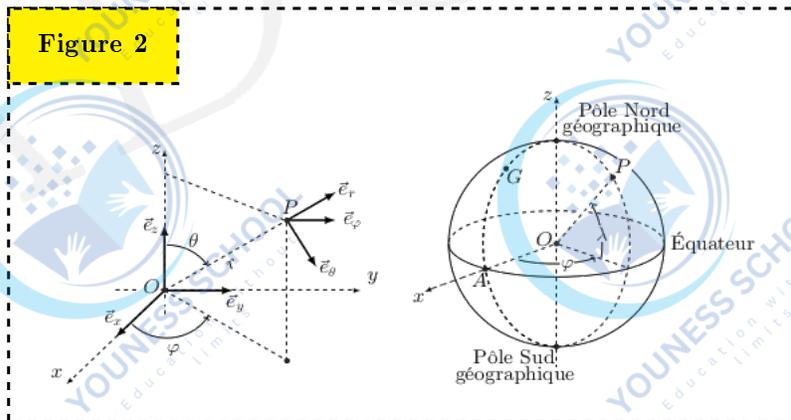
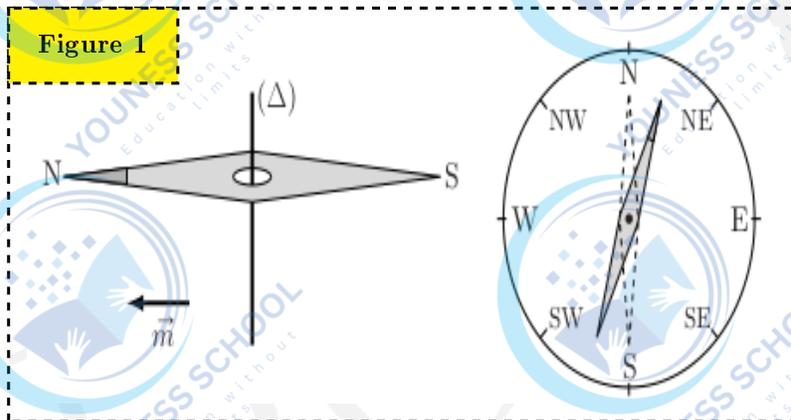
Relier α au volume V du nuage.

Le coefficient numérique trouvé dans la relation entre α et V de la question précédente (imposé par le modèle de Thomson) n'est pas exactement conforme à la réalité. Cependant, à ce coefficient numérique près, la relation se vérifie pour les atomes poly-électroniques et les molécules.

3) Comparer la polarisabilité du lithium ($Z = 3$) et celle du néon ($Z = 10$). Le fluor et l'iode sont deux halogènes situés sur la même colonne de la table périodique, sur la seconde ligne pour le fluor et la cinquième pour l'iode. Comparer la polarisabilité d'une molécule de difluor et celle d'une molécule de diiode.

Exercice 18 (La boussole (Mines 2019 MP)):

Une boussole est formée d'un aimant permanent, solide en forme d'aiguille équivalente à un petit dipôle magnétique \vec{m} de norme constante m , la direction du vecteur \vec{m} étant supposée indiquer le nord. Cette aiguille aimantée peut librement tourner autour d'un axe vertical (Δ) dirigé par le vecteur \vec{e}_r local et formant un pivot à faible frottement (Figure 1).



1) Pourquoi la boussole à l'équilibre indique-t-elle le nord? Cet équilibre est-il stable?

On note I le moment d'inertie de l'aiguille aimantée relativement à son axe de rotation (Δ); légèrement écartée de sa position d'équilibre, l'aiguille aimantée oscille avec une pseudo-période τ_{osc} .

2) Montrer que la connaissance de m , τ_{osc} et I permet de déterminer une des composantes du champ géomagnétique. Laquelle?

On étudie un modèle de champ géomagnétique créé par un dipôle magnétique $\vec{M} = M_0 \vec{e}_z$ disposé au centre O de la Terre (assimilée à une sphère de rayon R_T), l'axe (Oz) étant l'axe polaire géographique dirigé du pôle sud de cet axe vers son

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

pôle nord (Figure 2). On rappelle d'une part qu'un point de la surface est caractérisé par ses coordonnées géographiques φ (longitude) et $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$ (latitude) et d'autre part qu'à l'équateur le champ magnétique terrestre est horizontal, dirigé vers le pôle nord géographique et y a pour intensité B_E .

- 3) Exprimer, en un point de la surface de la Terre et en coordonnées sphériques, le champ géomagnétique en fonction de μ_0 (perméabilité du vide), M_0 et R_T .
- 4) Préciser le signe de M_0 puis estimer sa valeur numérique. Quelles sont la direction et l'intensité du champ géomagnétique aux pôles magnétiques nord et sud ?

En un point P de la surface terrestre, on appelle nord magnétique local la direction \vec{e}_N du champ géomagnétique \vec{B} , projeté dans le plan horizontal, et déclinaison magnétique l'angle D formé par \vec{B} avec le nord magnétique local ; la déclinaison magnétique est positive si \vec{B} est dirigé vers le haut (vers le ciel) et négative s'il est dirigé vers le bas (vers le sol).

- 5) Dans l'hémisphère nord, quel est le signe de D ? Calculer $\tan(D)$ en fonction de la latitude λ puis tracer l'allure de la courbe donnant D en fonction de λ pour toutes les valeurs de λ du pôle sud au pôle nord. Pourquoi lisait-on parfois que les boussoles « s'affolent à proximité des pôles » ? Peut-on déterminer, au moyen d'une boussole, si on se trouve dans l'hémisphère nord ou dans l'hémisphère sud ?

Exercice 19 (Interactions intermoléculaires (Mines 2014 PC)):

Dans le cadre de l'approximation dipolaire, on rappelle qu'un dipôle électrostatique $\vec{p} = p\vec{u}_z$ placé en O crée, en un point M (tel que $\vec{OM} = r\vec{e}_r$), le champ électrostatique exprimé en sphérique par :

$$\vec{E}(M) = \frac{p(2\cos(\theta)\vec{e}_r + \sin(\theta)\vec{e}_\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

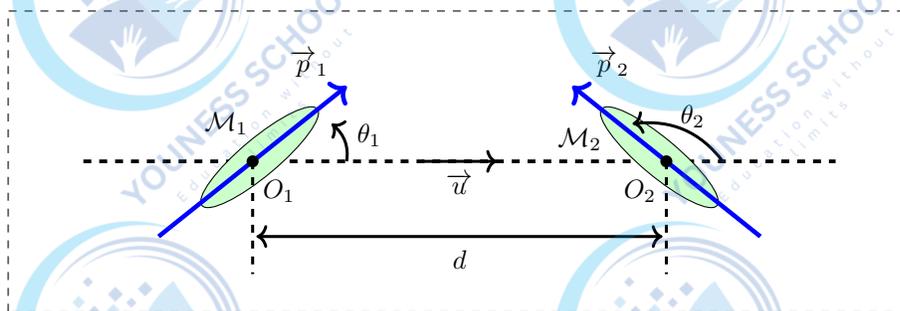
On rappelle également que l'énergie potentielle e_p d'un dipôle rigide \vec{p} placé dans un champ électrique \vec{E} est telle que :

$$e_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

A- Interaction entre deux molécules polaires

Deux molécules fixes \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 de moments dipolaires respectifs \vec{p}_1 et \vec{p}_2 sont respectivement placées aux points O_1 et O_2 tels que $\vec{O_1O_2} = d\vec{u}$. Lorsque deux molécules sont en interaction, la situation étant symétrique, on appellera énergie potentielle d'interaction du couple l'énergie potentielle d'une molécule dans le champ électrique de l'autre.

A priori, \vec{p}_1 et \vec{p}_2 peuvent tourner dans tous les sens à cause de l'agitation thermique, l'énergie potentielle d'interaction $e_{p,i}$ du couple n'est donc pas constante. Les modules respectifs de \vec{p}_1 et \vec{p}_2 sont supposées constantes.



- 1) Comment doit être orienté \vec{p}_1 pour que le module du champ électrostatique \vec{E}_{1O_2} créé par la molécule \mathcal{M}_1 en O_2 soit maximal? En déduire la valeur minimale e_{min} et maximale e_{max} de $e_{p,i}$ et l'écart $\Delta e = e_{max} - e_{min}$. Représenter sur un schéma les positions relatives des deux dipôles dans ces deux états extrêmes.
- 2) Pour deux molécules d'eau $p = \|\vec{p}_1\| = \|\vec{p}_2\| = 6,2 \times 10^{-30} \text{ C.m}$ et $d = 3,7 \text{ nm}$. Déterminer les valeurs numériques de e_{min} , e_{max} et Δe . Comparer les valeurs de Δe et $e_{th} = k_B T$ pour la température $T_1 = 373 \text{ K}$. On rappelle que e_{th} est une évaluation de l'énergie cinétique moyenne de l'agitation thermique. Les deux configurations d'énergie potentielle extrêmes de ce système sont-elles accessibles?

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

B- Interaction entre une molécule polaire et une molécule polarisable

On étudie maintenant la situation dans laquelle la molécule \mathcal{M}_1 est la même que celle étudiée dans la partie précédente, toujours située en O_1 , par contre la molécule \mathcal{M}_2 située en O_2 est à présent non polaire, mais polarisable avec une polarisabilité α . On pose toujours $\overrightarrow{O_1O_2} = d\vec{u}$ et on suppose que \vec{p}_1 est dirigé selon \vec{u} .

On rappelle que lorsqu'on place la molécule \mathcal{M}_2 polarisable dans un champ extérieur \vec{E}_{ext} elle acquiert un moment dipolaire induit donnée par :

$$\vec{p}_2 = \alpha \epsilon_0 \vec{E}_{ext}$$

3) Déterminer l'expression de e_2 l'énergie potentielle d'interaction moyenne entre les molécules en fonction de α , ϵ_0 , d , $p_1 = \|\vec{p}_1\|$. Calculer sa valeur numérique sachant que :

$$p_1 = 6,2 \times 10^{-30} \text{ C.m} \quad ; \quad d = 3,7 \text{ nm} \quad \text{et} \quad \alpha = 1,6 \times 10^{-29} \text{ m}^3$$

C- Interaction entre deux molécules non polaires

Si une molécule est non polaire, son moment dipolaire est nul en moyenne, mais pas en valeur instantanée. Une interaction entre deux molécules non polaires est donc possible par le mécanisme décrit dans la partie B. Un calcul un peu élaboré conduit à une énergie potentielle moyenne d'interaction e_3 entre deux molécules semblables, qui a pour expression :

$$e_3 = \frac{\alpha^2 h f_0}{2d^6}$$

Ici, h est la constante de Planck, α la polarisabilité des molécules, d la distance qui les sépare et f_0 la fréquence de résonance électronique de la molécule.

4) Quelle théorie de la physique permet-elle d'obtenir l'expression de e_3 ? En conservant les valeurs précédentes pour d et α puis en prenant $f_0 = 8,8 \times 10^{14} \text{ Hz}$, calculer la valeur numérique de e_3 .

En réalité, les trois effets évoqués dans les parties précédentes s'ajoutent : une molécule déjà polaire est aussi polarisable... Les valeurs numériques utilisées se rapportent à la vapeur d'eau à $T = 373 \text{ K}$.

5) Comparer les valeurs de e_1 , e_2 et e_3 . Justifier que, lorsqu'elles ne sont pas en contact, la force d'interaction entre deux molécules peut s'écrire :

$$\vec{F} = - \left(C\alpha^2 + \frac{D}{T} \right) \frac{6}{d^7} \vec{u}$$

Où C et D sont des constantes que l'on explicitera en fonction des données du problème et \vec{u} un vecteur unitaire que l'on précisera. Quelle est la valeur de D pour des molécules non polaires ? Quel nom donne-t-on généralement à cette force ?

On donne :

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ (S.I)} \quad ; \quad h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J.s} \quad \text{et} \quad k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

Exercice 20 (Théorie élémentaire de la RMN (CNC 2001 MP)):

Dans toute ce problème, on considère un noyau atomique supposé ponctuel et fixe en un point O du référentiel \mathcal{R} du laboratoire supposé galiléen et auquel on attache un repère orthonormé direct $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Un tel noyau peut être considéré comme un dipôle magnétique élémentaire \vec{m} . En outre, on admet que le noyau possède un moment cinétique intrinsèque rigide de moment magnétique (ou spin) relié au moment magnétique par la relation (que l'on ne cherchera pas à établir)

$$\vec{m} = \gamma \vec{\sigma}$$

Le facteur γ appelé rapport gyromagnétique est une constante positive indépendante du temps.

On négligera, tout au long de cette étude, le poids du noyau. On rappelle l'expression du moment \mathcal{M} des forces exercées

par un champ magnétique \vec{B} sur un dipôle magnétique rigide de moment magnétique \vec{m} :

$$\mathcal{M} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

\wedge désignant le produit vectoriel.

1) Le noyau considéré est soumis à l'action d'un champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ ($B_0 > 0$) uniforme et permanent dans \mathcal{R} .

1-1) En appliquant le théorème du moment cinétique, donner l'équation régissant l'évolution de \vec{m} .

1-2) Montrer que la norme $\|\vec{m}\|$ du moment magnétique \vec{m} ainsi que sa projection $m_z = \vec{m} \cdot \vec{u}_z$ sur la direction du champ magnétique \vec{B}_0 restent constantes au cours du temps.

1-3) Que peut-on dire alors de l'angle entre \vec{m} et \vec{B}_0 ?

1-4) Déterminer les expressions des projections m_x sur OX et m_y sur OY du moment magnétique \vec{m} en fonction du temps en supposant qu'à l'instant $t = 0$, $m_x = m_0$ et $m_y = 0$. On pourra poser avantageusement $\underline{m} = m_x + jm_y$ ($j^2 = -1$) et résoudre l'équation différentielle vérifiée par \underline{m} .

1-5) En déduire que le moment magnétique \vec{m} effectue un mouvement de précession autour de la direction de \vec{B}_0 caractérisé par un vecteur rotation instantané $\vec{\omega}_0$ que l'on exprimera en fonction de γ et \vec{B}_0 .

1-6) Calculer numériquement $\omega_0 = \vec{\omega}_0 \cdot \vec{u}_z$ ainsi que la fréquence correspondante f_0 prenant :

$$\gamma = 2,7 \times 10^8 \text{ (SI)} \quad \text{et} \quad B_0 = 1 \text{ T}$$

Dans quel domaine du spectre électromagnétique cette fréquence se situe-t-elle?

2) Au champ magnétique \vec{B}_0 , on superpose un champ magnétique $\vec{B}_1 = B_1 \vec{u}_X$ uniforme, perpendiculaire à OZ et tournant à la vitesse $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$. Dans toute la suite, on supposera que $0 < B_1 \ll B_0$.

Soit le référentiel \mathcal{R}_1 animé par rapport au référentiel \mathcal{R} d'un mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$ et auquel on attache - en O - la base $(\vec{u}_X, \vec{u}_Y, \vec{u}_z)$. On supposera qu'à l'instant $t = 0$, les axes des repères \mathcal{R} et \mathcal{R}_1 sont confondus. On posera enfin :

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega} - \vec{\omega}_0 \quad \text{et} \quad \vec{\omega}_1 = -\gamma \vec{B}_1$$

2.1) Exprimer $\left(\frac{d\vec{m}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$ en fonction de \vec{m} , $\vec{\omega}_0$ et $\vec{\omega}_1$.

2.2) En déduire $\left(\frac{d\vec{m}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1}$ en fonction de $\vec{\omega}_1$, $\vec{\Omega}$ et \vec{m} .

2.3) Décrire alors le mouvement de \vec{m} dans le référentiel \mathcal{R}_1 en précisant en particulier la signification physique du vecteur $\vec{\omega}_1 - \vec{\Omega}$ et en donnant la valeur de l'angle θ qu'il fait avec l'axe OZ .

2.4) Décrire qualitativement le mouvement du vecteur $\vec{\omega}_1 - \vec{\Omega}$ relativement au référentiel \mathcal{R} . En déduire alors celui du moment magnétique \vec{m} dans \mathcal{R} .

2.5) On s'intéresse à la composante de m_z de $\vec{\omega}$ selon l'axe OZ . On suppose qu'à l'instant prise comme origine des temps $t = 0$, $m_z = m'_0$ constante positive.

2.5.1) Montrer que si la condition de résonance $\vec{\Omega} = \vec{0}$ est réalisée, la composante m_z subit un premier retournement au bout d'un temps Δt que l'on déterminera.

2.5.2) Calculer Δt pour $B_1 = 10^{-6} \text{ T}$ et $\gamma = 2,7 \times 10^8 \text{ (S.I.)}$;

3) En réalité, dans un échantillon macroscopique, seule la moyenne statistique \vec{M} des moments magnétiques microscopiques est accessible à la mesure. On admet que les résultats précédents obtenus pour le moment magnétique microscopique \vec{m} restent valables pour \vec{M} .

À cause de l'agitation thermique, les atomes d'un tel échantillon entrent en collision les uns avec les autres. Il en résulte une tendance à la désorientation des différents moments magnétiques microscopiques \vec{m} et une annulation de leur moyenne statistique \vec{M} lorsqu'aucun champ magnétique n'est appliqué (relaxation).

3-1) On admet que pour tenir compte des interactions microscopiques entre les atomes voisins, il suffit d'ajouter dans l'équation du mouvement de \vec{M} le terme de relation donné par :

$$\left(\frac{d\vec{M}}{dt} \right)_{relaxation} = - \frac{\vec{M} - \vec{M}_0}{\tau} \quad (*)$$

τ étant une constante positive.

3-1-1) A quoi la constante τ est-elle homogène?

3-1-2) Montrer que l'hypothèse de prise en compte de la relaxation mentionnée ci-dessus (2.3.1) est en accord avec la constatation expérimentale suivante : étant donné un échantillon de moment magnétique moyen nul ($\vec{M} = \vec{0}$), lorsque, à l'instant t_0 , on soumet un tel échantillon à la seule action du champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$, son moment magnétique moyen \vec{M} croît en fonction du temps et tend exponentiellement vers la valeur \vec{M}_0 .

3-2) Dans toute la suite, le moment magnétique \vec{M} est soumis aux actions conjuguées du champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ uniforme et permanent dans \mathcal{R} et du champ tournant $\vec{B}_1 = B_1 \vec{u}_X$ décrits en 2.1 et 2.2. En outre, on tiendra compte des phénomènes de relation décrits par l'équation (*) où $\vec{M}_0 = M_0 \vec{u}_z$.

3-2-1) Établir l'équation du mouvement du moment magnétique \vec{M} relativement au référentiel \mathcal{R}_1 défini en 2.2

3-2-2) Établir les équations, dites de Bloch, vérifiées par les composantes u , v et M_z définies par les relations :

$$\begin{cases} M_X = \vec{M} \cdot \vec{u}_X = u.M_0 \\ M_Y = \vec{M} \cdot \vec{u}_Y = v.M_0 \\ M_z = \vec{M} \cdot \vec{u}_z \end{cases} \quad (**)$$

3-3) Dans toute du problème, on s'intéresse au régime établi (ou permanent dans le référentiel tournant \mathcal{R}_1).

3-3-1) Montrer alors que les composantes u , v et M_z sont données par :

$$\begin{cases} u = \frac{-\tau^2 \omega_1 \Omega}{1 + (\tau \omega_1)^2 + (\tau \Omega)^2} \\ v = \frac{-\tau \omega_1}{1 + (\tau \omega_1)^2 + (\tau \Omega)^2} \\ M_z = M_0 - M_0 \frac{(\tau \omega_1)^2}{1 + (\tau \omega_1)^2 + (\tau \Omega)^2} \end{cases} \quad (***)$$

3-3-2) Tracer l'allure des courbes $u(\Omega)$ et $v(\Omega)$ en précisant les positions et les valeurs des maxima et minima éventuels.

3-3-3) Déterminer la largeur à mi-hauteur $\Delta\Omega$ de la courbe $v(\Omega)$. Que représente $\Delta\Omega$ pour la courbe $u(\Omega)$?

3-4) En réalité, dans la pratique, le champ magnétique tournant $\vec{B}_1 = B_1 \vec{u}_X$ est remplacé par un champ alternatif $\vec{B}_2 = 2B_1 \cos(\omega't) \vec{u}_x$ ($\omega' > 0$) de direction fixe dans \mathcal{R} créé par un solénoïde très long parcouru par le courant $i(t) = 2I \cos(\omega't)$.

3-4-1) Montrer que le champ magnétique \vec{B}_2 peut être décomposé en deux champs \vec{B}_2^+ et \vec{B}_2^- tournant autour de OZ respectivement dans le sens direct et le sens inverse. On donnera les expressions de \vec{B}_2^+ et \vec{B}_2^- .

3-4-2) En s'appuyant en particulier sur les résultats de la question 1.5 et 1.6 et en rappelant la définition de la résonance (question 2.5.1), montrer qu'une seule des deux composantes \vec{B}_2^+ ou \vec{B}_2^- permettra d'atteindre la résonance. Exprimer le vecteur rotation instantané de cette composante.