

EXERCICE 1 : (7.5 points)

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par :

$$f(1) = \frac{1}{2} \text{ et pour tout } x \in]1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j})

- 0.5 1- Montrer que f est continue à droite en 1
- 0.5 2- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 0.25 3- a) Soit $x \in]1, +\infty[$
- En posant : $t = (x-1)^2$, vérifier que : $\frac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2} = \frac{-\sqrt{t} + \ln(1+\sqrt{t})}{t}$
- 0.5 b) Montrer que $(\forall t \in]0, +\infty[)$, $-\frac{1}{2} < \frac{-\sqrt{t} + \ln(1+\sqrt{t})}{t} < \frac{-1}{2(1+\sqrt{t})}$
- (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[0; t]$)
- 0.25 c) En déduire que : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2}$
- 0.5 4- a) Montrer que : $\forall x \in]1, +\infty[$, $\frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x-1} = -\frac{\ln(x)}{x-1} \times \frac{1}{2(x+1)} + \frac{\ln(x) - x + 1}{2(x-1)^2}$
- 0.5 b) En déduire que f est dérivable à droite en 1 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 5- Pour tout $x \in]1, +\infty[$ on pose $I(x) = \int_1^x \frac{t^2 - 1}{t^3} dt$ et $J(x) = \int_1^x \frac{t^2 - 1}{t^2} dt$
- 0.5 a) Montrer que : $\forall x \in]1, +\infty[$, $0 \leq I(x) \leq J(x)$
- 0.5 b) Montrer que pour tout $x \in]1, +\infty[$, $I(x) = \ln(x) - \frac{x^2 - 1}{2x^2}$ et $J(x) = \frac{(x-1)^2}{x}$
- 0.5 c) Montrer que : $\forall x \in]1, +\infty[$, $f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{I(x)}{J(x)}$
- 0.5 d) En déduire que : $\forall x \in]1, +\infty[$, $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$
- 0.25 6- a) Dresser le tableau de variations de la fonction f
- 0.5 b) Tracer la courbe (C) (On prendra $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$ et $\|\vec{j}\| = 2\text{cm}$)
- 0.5 7- Montrer que l'équation $f(x) = x - 1$ admet une unique solution a dans $]1, 2[$
- 8- Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :
- $a_0 \in]1, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 1 + f(a_n)$

- 0.5 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), |a_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|a_n - a|$
- 0.5 b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}), |a_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - a|$
- 0.25 c) En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

EXERCICE2 : (2.5 points)

Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;1]$ par : $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$

- 0.5 1-a) Montrer que F est continue, strictement croissante sur $[0;1]$
- 0.5 b) En déduire que F est une bijection de $[0;1]$ vers $[0;\beta]$ avec $\beta = \int_0^1 e^{t^2} dt$
- 2- On note F^{-1} la bijection réciproque de F
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} F^{-1}\left(\frac{k}{n}\beta\right)$
- 0.5 a) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\ell = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta F^{-1}(t) dt$
- 0.5 b) Montrer que $\ell = \frac{1}{\beta} \int_0^1 u e^{u^2} du$
- (On pourra effectuer le changement de variable $u = F^{-1}(t)$)
- 0.5 c) En déduire que : $\ell = \frac{e-1}{2\beta}$

EXERCICE3 : (3.5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})

On considère dans \mathbb{C} l'équation d'inconnue z

$$(E_\alpha): z^2 - 2iz + \alpha = 0 \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{C}$$

Partie I :

- 0.25 1-a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_α) est $\Delta = -4(1+\alpha)$
- 0.25 b) Déterminer l'ensemble des valeurs α pour lesquelles l'équation (E_α) admette dans l'ensemble \mathbb{C} deux solutions distinctes.
- 0.5 2- On note z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_α) .
Déterminer $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$

Partie II :

Soient Ω , M_1 et M_2 les points d'affixes respectivement α , z_1 et z_2

- 1- On suppose que $\alpha = m^2 - 2m$ avec $m \in \mathbb{R}$
- 0.5 a) Déterminer z_1 et z_2 en fonction de m
- 0.25 b) En déduire que les points O , M_1 et M_2 sont alignés.
- 2-On suppose que les points O , M_1 et M_2 ne sont pas alignés.
- 0.25 a) Montrer que $\frac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur si et seulement si $Re(z_1 \bar{z}_2) = 0$
- 0.5 b) Montrer que : $|z_1 - z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2 - 4Re(z_1 \bar{z}_2)$
- 0.25 c) En déduire que $\frac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur si et seulement si $|z_1 - z_2| = 2$
- 0.25 3-a) Montrer que : $(z_1 - z_2)^2 = \Delta$
- 0.5 b) Déterminer l'ensemble Γ des points Ω pour que le triangle OM_1M_2 soit rectangle en O

EXERCICE4 : (3.5 points)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif de zéro la

matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On considère dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ la loi de composition interne T définie par :

$$\forall ((a, b), (c, d)) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*)^2 ; (a, b)T(c, d) = (a\bar{d} + c, bd)$$

(\bar{d} étant le conjugué du nombre complexe d)

- 0.5 1-a) Vérifier que $(i, 2)T(1, i) = (2, 2i)$, puis calculer $(1, i)T(i, 2)$
- 0.25 b) En déduire que la loi T n'est pas commutative dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$
- 0.5 2- Montrer que la loi T est associative dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$
- 0.25 3- Vérifier que $(0, 1)$ est l'élément neutre pour T dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$
- 0.5 4-a) Vérifier que $\forall (a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* ; (a, b)T\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right) = (0, 1)$
- 0.5 b) Montrer que $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T)$ est un groupe non commutatif.
- 0.5 5-a) Montrer que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est stable par la loi de composition interne T
- 0.5 b) Montrer que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T)$

EXERCICES 5 : (3 points)

Soient p et q deux nombres premiers distincts et r un entier naturel premier avec p et avec q

- 1 1- a) Montrer que p divise $r^{p-1} - 1$ et que q divise $r^{q-1} - 1$
- 0.5 b) En déduire que p et q divisent $r^{(p-1)(q-1)} - 1$
- 0.5 c) Montrer que pq divise $r^{(p-1)(q-1)} - 1$
- 1 2- Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation $2024^{192}x \equiv 3 \pmod{221}$ [221] (On donne : $221 = 13 \times 17$)

FIN